ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2004. Серия 1. Том 11, № 1, 13–29

УДК 519.714

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ 3-РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Две известные гипотезы о 3-раскрашиваемости плоских графов состоят в том, что любой плоский граф без циклов длины 4 и 5 является 3-раскрашиваемым, а также существует такое $d > 3$, что любой плоский граф с минимальным расстоянием не меньше d между 3-циклами также 3-раскрашиваем. Ни одна из этих гипотез до сих пор не подтверждена и не опровергнута. В настоящей статье доказано, что если плоский граф не имеет 5-циклов и минимальное расстояние между 3-циклами не меньше 3, то такой граф 3-раскрашиваем.

Введение

Задача о правильной раскраске вершин планарного графа известна уже более ста лет. Ее классическая постановка — это знаменитая ”проблема четырех красок”, решение которой было получено К. Аппелем и В. Хакеном [2, 3]. Ими доказано, что вершины любого планарного графа можно правильно раскрасить в четыре цвета.

Из результата М. Гэри, Д.Джонсона и Л. Стокмейера [6] следует, что вопрос о существовании правильной раскраски вершин планарного графа в три цвета (3-раскрашиваемость) является NP-полной задачей. Учитывая это, вряд ли когда-либо будет получено описание всех 3-раскрашиваемых планарных графов. Вместо этого усилия ведущих графистов в последние 30–40 лет были направлены на нахождение достаточных условий 3-раскрашиваемости, охватывающих как можно более широкие и естественно возникающие классы планарных графов. Характерным примером является результат Грецша [7] о 3-раскрашиваемости планарных графов без циклов длины 3 (3-циклов). В настоящее время

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00796, 02-01-00039), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-06214) и гранта № 6 шестого конкурса-экспертизы молодежных проектов РАН.

этот результат а также усиливающая его теорема Грюнбаума [8] (допускается наличие в графе не более трех 3-циклов) остаются наиболее ценными позитивными результатами о 3-раскрашиваемости планарных графов.

И. Хавел [9] в поисках дальнейших усилений теоремы Грецша задал следующий вопрос: существует ли такая константа C_H, что любой планарный граф, в котором 3-циклы находятся на расстоянии не менее C_H, является 3-раскрашиваемым? Ответ на этот вопрос до сих пор неизвестен, однако примеры плоских графов, найденные В. А. Аксеновым и Л. С. Мельниковым [1], показывают, что если такая константа C_H существует, то она больше 3.

Другая гипотеза, сформулированная Р. Стейнбергом (1975), состоит в том, что любой планарный граф, не имеющий циклов длины 4 и 5, является 3-раскрашиваемым. Это утверждение также остается недоказанным, хотя О. В. Бородину [4] и независимо Д. П. Сандерсу и Й. Жао [10] удалось доказать, что любой планарный граф без циклов длины от 4 до 9 является 3-раскрашиваемым. Естественно возникает следующий вопрос: для какой минимальной константы C_S из отсутствия в планарном графе циклов длины от 4 до C_S следует его 3-раскрашиваемость? Результаты из [4, 10] показывают, что $C_S \leqslant 9$. Если верна гипотеза Стейнберга, то $C_S = 5$.

В последние годы наметилось новое направление исследований, для которого характерно одновременное предъявление к графу требований из гипотез Хавела и Стейнберга. Так О. В. Бородин и А. Распо [5] доказали, что если в планарном графе нет 5-циклов и любые два 3-цикла находятся на расстоянии не менее 4, то такой граф 3-раскрашиваем.

В настоящей статье доказан более сильный результат.

Теорема 1. *Если в планарном графе отсутствуют* 5*-циклы и расстояние между любыми двумя* 3*-циклами не меньше* 3*, то такой граф* 3*-раскрашиваем.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, напомним ряд необходимых определений. Под *плоским графом* понимается конечный граф без петель и кратных ребер, вершины и ребра которого уложены на плоскости таким образом, что никакие два ребра не имеют общих точек кроме, возможно, концевых вершин. Граф G называется *планарным*, если G изоморфен некоторому плоскому графу, который называется *плоской реализацией* графа G. Под *гранью* плоского графа G понимается любая связная открытая область плоскости, граница которой образована вершинами и ребрами графа G. Через $V(G), E(G), F(G)$ обо-

значаются соответственно множества вершин, ребер и граней плоского графа G.

Степенью $d(v)$ вершины $v \in V(G)$ называется число ребер, инцидентных вершине v. *Рангом* $r(f)$ грани $f \in F(G)$ в связном плоском графе G называется число ребер в граничном цикле грани f (мосты засчитываются дважды). Под d-вершиной, r-гранью и k-циклом понимаются соответственно вершина степени d, грань ранга r и простой цикл длины k. Если u, v — две различные вершины в G, то под $(u$-$v)$-*цепью* понимается любая простая цепь с концами в вершинах u и v. *Расстоянием* $\mathrm{dist}(u, v)$ между вершинами u и v в G называется длина кратчайшей $(u$-$v)$-цепи (при этом $\mathrm{dist}(u, v) = \infty$, если вершины u, v принадлежат различным компонентам связности в G). Если $X, Y \subset V(G)$ — два различных подмножества вершин в G, то *расстоянием* между множествами X и Y называется число $\min\limits_{x \in X,\, y \in Y} \mathrm{dist}(x, y)$.

Для произвольного подмножества вершин $X \subset V(G)$ обозначим через $G[X]$ подграф графа G, порожденный множеством вершин X. Если C — простой цикл в плоском графе G, то через $\mathrm{Int}(C)$ (соответственно $\mathrm{Ext}(C)$) обозначим подграф в G, порожденный вершинами из C а также вершинами, расположенными строго внутри (соответственно вне) цикла C. Назовем цикл S *разделяющим* в G, если в каждом подграфе $\mathrm{Int}(S)$, $\mathrm{Ext}(S)$ имеется вершина, не принадлежащая циклу S (см. рис. 1).

Правильной раскраской вершин графа G в k цветов (или просто *k-раскраской* G) называется такое отображение $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ при $xy \in E(G)$. G. Отображение $\psi : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$, заданное на подмножестве вершин $X \subset V(G)$, называется *правильной k-раскраской* множества X, если ψ является правильной k-раскраской вершин подграфа $G[X]$.

Чтобы доказать теорему 1, убедимся в справедливости следующего утверждения о продолжении 3-раскраски с вершин грани в плоском графе.

Теорема 2. *Пусть G — связный плоский граф без 5-циклов, и расстояние между любыми двумя 3-циклами в G не меньше 3. Тогда любая правильная 3-раскраска вершин грани ранга $3, 4$ или 7 продолжаема до правильной 3-раскраски вершин графа G.*

Чтобы вывести теорему 1 из теоремы 2, достаточно заметить, что если в некоторой компоненте связности графа G (удовлетворяющего условиям теоремы 1) имеется 3-цикл T, то, продолжая 3-раскраску с вершин T на подграфы $\mathrm{Int}(T)$ и $\mathrm{Ext}(T)$ (при некоторой плоской реализации G) по

теореме 2, получим 3-раскраску данной компоненты. Если же в рассматриваемой компоненте графа G нет 3-циклов, то она 3-раскрашиваема по теореме Грецша.

1. Свойства минимального контрпримера к теореме 2

Теорему 2 докажем методом от противного. Предположим, что плоский граф G является контрпримером к теореме 2 с минимальным числом вершин, и при этом G имеет минимальное число ребер. Не теряя общности будем считать, что внешняя (бесконечная) грань f_0 графа G имеет ранг 3, 4 или 7 и на ее вершинах задана 3-раскраска φ_0, которую невозможно продолжить на весь граф. Пусть D обозначает граничный цикл грани f_0. Вершину $v \in V(G)$ назовем *внутренней* для G, если $v \notin D$. Грань $f \in F(G)$ назовем *внутренней*, если $f \neq f_0$. Докажем, что граф G обладает следующими свойствами.

(1) $|V(G)| > 5$.

Непосредственный перебор случаев показывает, что при $|V(G)| \leqslant 5$ граф G не является контрпримером к теореме 2.

(2) *В G нет разделяющих циклов длины* $3, 4$ *и* 7.

Пусть S — какой-нибудь такой цикл. Из минимальности выбора G следует, что раскраска φ_0 может быть продолжена до 3-раскраски φ_{ext} вершин графа $\mathrm{Ext}(S)$. При этом в графе $\mathrm{Int}(S)$ раскраска φ_{ext} индуцирует правильную 3-раскраску $\varphi_S = \varphi_{ext}|_{V(S)}$ на вершинах внешней грани f_S, ограниченной циклом S (рис. 1). Из минимальности графа G следует,

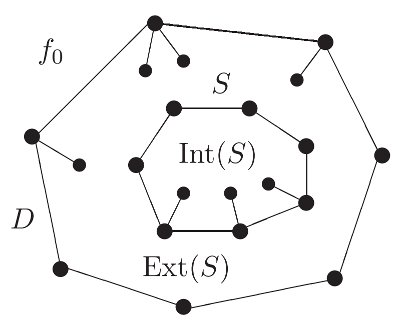

Рис. 1. Разделяющий 7-цикл S

что раскраска φ_S может быть продолжена до 3-раскраски φ_{int} вершин

графа $\mathrm{Int}(S)$. Объединение раскрасок φ_{int} и φ_{ext} дает 3-раскраску вершин графа G. Противоречие.

(3) *Граф G вершинно двусвязен, т. е. связен и не имеет точек сочленения.*

Сначала предположим, что цикл D не является простым. В этом случае $r(f_0) = 7$, и из отсутствия 5-циклов в G следует, что D состоит из 3-цикла T и либо 4-цикла Q, либо двух ребер (рис. 2). Из минимальности

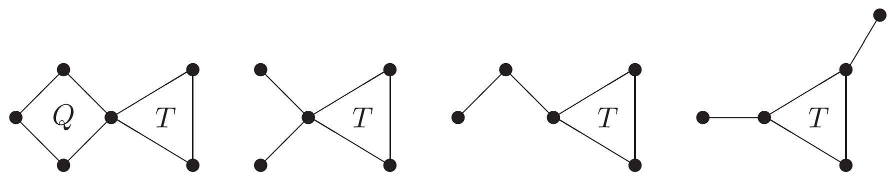

Рис. 2. Случаи, когда цикл D не является простым

графа G следует, что 3-раскраска циклов T и Q, индуцированная раскраской φ_0, продолжаема на графы $\mathrm{Int}(T)$ и $\mathrm{Int}(Q)$ соответственно, что влечет продолжаемость раскраски φ_0 на граф G.

Теперь будем считать, что D — простой цикл. Предположим, что в G имеется висячий блок B с точкой сочленения t. Блок B выберем таким, чтобы его граничный цикл был отличен от D (рис. 3). Из минимальности

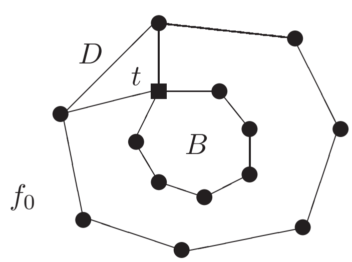

Рис. 3. Висячий блок B и точка сочленения t

графа G и теоремы Грецша следует, что 3-раскраска φ_0 грани f_0 продолжаема на граф $G-(B-t)$, а блок B является 3-раскрашиваемым графом (см. вывод теоремы 1 из теоремы 2). Объединяя 3-раскраски графов B и $G-(B-t)$ и придавая общий цвет вершине t, получим продолжение раскраски φ_0 на граф G. Противоречие.

(4) *Цикл D не имеет хорд.*

Если ребро e — хорда цикла D, то граф $G - e$ является контрпримером к теореме 2 с меньшим числом ребер, чем G, что противоречит минимальности G.

(5) *Для любой вершины $v \in V(G)$ выполняется неравенство $d(v) \geqslant 2$. При этом если $d(v) = 2$, то $v \in D$ и вершина v не инцидентна внутренним 3- и 4-граням.*

Пусть $v \in V(G)$. Из (3) следует, что $d(v) \geqslant 2$. Предположим, что $d(v) = 2$. Если $v \notin D$, то ввиду минимальности графа G раскраска φ_0 грани f_0 продолжаема до 3-раскраски графа $G-v$ и далее до 3-ракраски графа G. Следовательно, $v \in D$. При этом если вершина v инцидентна внутренней 3-грани uvw, то в силу (1) ребро uw является хордой цикла D, что противоречит (4).

Предположим, что вершина v инцидентна внутренней 4-грани $f = uvwz$. Из (1), (4) и условия $d(v) = 2$ следует, что $u, v, w \in D$ и $z \notin D$. При этом из отсутствия в G 5-циклов и общих ребер у 3-циклов следует, что вершина z не смежна с вершинами из D, отличными от u и w. Следовательно, раскраску φ_0 можно продолжить на вершину z, полагая $\varphi_0(z) = \varphi_0(v)$, а затем полученную 3-раскраску внешней грани графа $G - v$ продолжить на граф $G - v$, пользуясь минимальностью G. В результате получим 3-раскраску графа G, являющуюся продолжением раскраски φ_0. Противоречие.

(6) *Если внутренняя вершина v смежна с двумя различными вершинами $x, y \in D$, то D является 7-циклом и вершины x, y смежны в D.*

Если D является 3-циклом, то утверждение следует из отсутствия общих ребер у 3-циклов. Пусть $D = z_1z_2z_3 \dots z_m$ — цикл длины 4 или 7. Так как в G нет 5-циклов, то вершины x и y не могут находиться в D на расстоянии 3. Кроме того, если $m = 4$, то x и y не могут быть смежны в D. Предположим, что вершины x и y находятся в D на расстоянии 2. Для определенности пусть $x = z_1$, $y = z_3$. Из (5) следует, что 4-цикл $z_1z_2z_3v$ не может быть границей грани графа G. Поэтому данный цикл является разделяющим, что противоречит (2).

(7) *Если $f = xyzt$ — внутренняя 4-грань, то любая вершина x, y, z, t находится на расстоянии 1 от некоторого 3-цикла (3-грани) в G (рис. 4).*

Из (4)–(6) следует, что вершины x, z не могут одновременно принадлежать циклу D. То же самое верно для вершин y, t. Следовательно, в граничном цикле грани f имеются две смежные внутренние вершины.

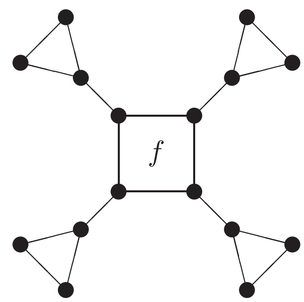

Рис. 4. Внутренняя 4-грань f в окружении 3-циклов

Пусть этими вершинами являются x и y. Обозначим через G_1 плоский граф, получаемый из G отождествлением вершин x и z.

Докажем, что 3-раскраска внешней грани графа G_1, индуцированная раскраской φ_0, является правильной. Предположим, что это неверно. Тогда $z \in D$ и в графе G вершина x смежна с такой вершиной $w \in D$, что $\varphi_0(w) = \varphi_0(z)$. Из (6) и отсутствия 5-циклов в G следует, что $t \notin D$ (рис. 5, *а*). Обозначим через P такую (w-z)-цепь цикла D в G, длина которой

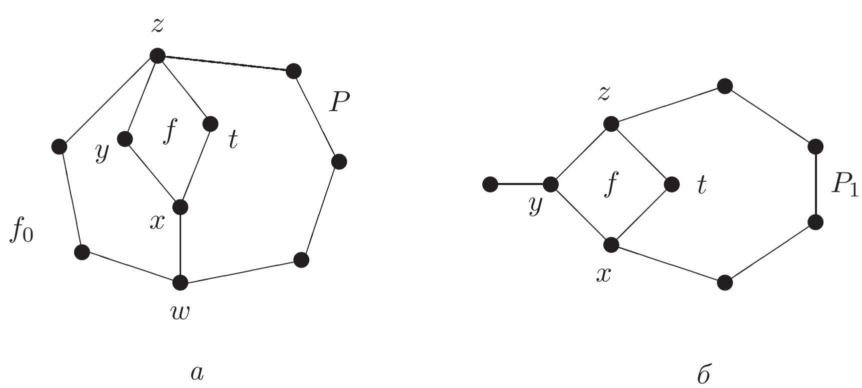

Рис. 5. Конфигурации, препятствующие отождествлению веришн x и z

равна $1, 2$ или 4 (такая цепь существует в силу условия $r(f_0) \in \{3, 4, 7\}$). Если P имеет длину 2, то в G имеется 5-цикл $Pwxyz$. Если же длина P равна 1 или 4, то хотя бы один цикл $Pwxyz$ или $Pwxtz$ является разделяющим и имеет длину 4 или 7, что противоречит (2). Аналогично доказывается, что в графе G_2, полученном из G отождествлением вершин y и t, раскраска внешней грани, индуцированная раскраской φ_0,

является правильной.

Заметим, что если в графе G_i, $i = 1, 2$ (с меньшим числом вершин, чем G), 3-раскраска внешней грани, индуцированная раскраской φ_0, продолжаема на весь граф, то раскраска φ_0 продолжаема на G, что противоречит выбору G. Поэтому каждый граф G_i, $i = 1, 2$, не удовлетворяет хотя бы одному условию теоремы 2, т. е. в G_i имеется петля, кратное ребро, 5-цикл или два 3-цикла, расстояние между которыми не превосходит 2. Докажем, что при отождествлении в G вершин x, z (аналогично y, t) не образуются петли, кратные ребра и циклы длины 3 и 5. Действительно, в противном случае в G существовала бы (x-z)-цепь P_1 длины $1, 2, 3$ или 5, не проходящая через вершины y, t (рис. 5, *б*). При этом в силу свойства $d(y) > 2$ цикл P_1xyz был бы разделяющим в G и имел бы длину $3, 4, 5$ или 7, что противоречит (2) и отсутствию 5-циклов в G.

Значит, при отождествлении в G вершин x, z (аналогично y, t) расстояние между некоторыми двумя 3-циклами графа G оказываются не более 2. Докажем, что ни одна вершина x, y, z, t не принадлежит 3-циклу в G. Предположим, что в G имеется 3-цикл $T = xuv$. Так как в G нет 5-циклов и общих ребер у 3-циклов, то $\{u, v\} \cap \{y, z, t\} = \emptyset$. Поскольку любые два 3-цикла в G находятся на расстоянии не меньше 3, расстояние от каждой вершины y, t до ближайшего 3-цикла, отличного от T, не меньше 2 (рис. 6). Следовательно, при отождествлении в G вершин y, t

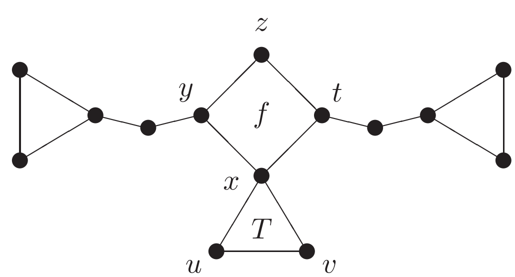

Рис. 6. Случай, когда 4-грани принадлежат 3-циклу

никакие два 3-цикла не могут оказаться на расстоянии не более 2. Из полученного противоречия следует, что каждая из вершин x, y, z, t находится в G на расстоянии не менее 1 от любого 3-цикла. При этом если расстояние от какой-либо из этих вершин, скажем от x, до ближайшего 3-цикла будет больше 1, то при отождествлении вершин x и y снова не могут возникнуть 3-циклы на расстоянии меньше 3. Противоречие.

(8) *Никакая вершина внутренней 4-грани не принадлежит 3-циклу.*

Это следует из (7).

(9) *Если ребро xy инцидентно двум различным внутренним 4-граням, то $d(x) > 3, d(y) > 3$.*

Достаточно доказать неравенство для вершины x. Из (5) следует, что $d(x) > 2$, а из $(7, 8)$, — что $d(x) \neq 3$.

Ребро $e \in E(G)$ будем называть *треугольным*, если e инцидентно внутренней 3-грани в G.

(10) *Если треугольное ребро xy инцидентно 6-грани $f = v_1xyv_4v_5v_6$, причем x, y — внутренние 3-вершины в G, то $v_1, v_4 \in D$, $d(v_1) > 2$ и $d(v_4) > 2$.*

Пусть ребро xy инцидентно 3-грани $T = xyt \neq f_0$. Заметим, что вершина t не инцидентна грани f.

Предположим, что $v_1 \notin D$. Обозначим через G_1 плоский граф, получаемый из G удалением вершин x, y и добавлением ребра v_1v_4. Поскольку $v_1 \notin D$, 3-раскраска внешней грани графа G_1, индуцированная раскраской φ_0, является правильной. Нетрудно заметить, что если эта раскраска продолжаема на G_1, то раскраска φ_0 продолжаема на G, что противоречит выбору G. Поскольку в G_1 меньше вершин, чем в G, для получения противоречия достаточно показать, что граф G_1 удовлетворяет условиям теоремы 2.

Докажем, что в G_1 нет кратных ребер и циклов длины 3 и 5, содержащих ребро v_1v_4. Действительно, если это неверно, то в графе G существует $(v_1$-$v_4)$-цепь P длины $1, 2$ или 4, не проходящая через вершины x, y (рис. 7). Так как в G нет 5-циклов и смежных 3-циклов, то $t \notin P$. Из условия о расстоянии между 3-циклами следует, что в графе G никакая 3-грань, отличная от T, не смежна с гранью f. Значит, цикл Pv_1xyv_4 является разделяющим в G и имеет длину $4, 5$ или 7, что противоречит (2) и отсутствию 5-циклов в G.

Для завершения доказательства (10) заметим, что из наличия 3-цикла T в графе G следует, что каждая из вершин v_1, v_4 находится в G на расстоянии не менее 2 от любого другого 3-цикла. Это означает, что при добавлении ребра v_1v_4 никакие два 3-цикла графа G, отличные от T, не оказываются на расстоянии не более 2. Поскольку в G_1 нет цикла T и не создаются новые циклы длины 3 и 5, граф G_1 удовлетворяет условиям теоремы 2. Из полученного противоречия следует, что $v_1 \in D$. Аналогично доказывается, что $v_4 \in D$. Теперь неравенства $d(v_1) > 2$, $d(v_4) > 2$ следуют из того, что $x, y \notin D$.

(11) *В G нет 5-граней.*

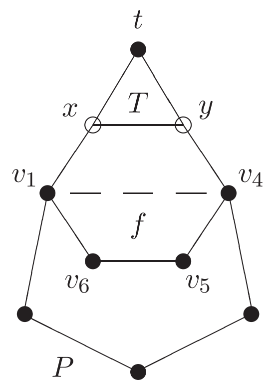

Рис. 7. Цепь P между вершинами v_1 и v_4

Согласно (3) в графе G любая грань ограничена простым циклом. Поэтому данное утверждение следует из отсутствия 5-циклов в G.

(12) *Любая вершина инцидентна не более одной 3-грани.*

Следует из условия о расстоянии между 3-циклами в G.

2. Применение формулы Эйлера

Положим $V = V(G)$, $F = F(G)$. Формулу Эйлера для графа G запишем в виде

$$\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(r(f)-4)=-8, \qquad (*)$$

или

$$\sum_{x\in V\cup F}\mu(x)=0, \qquad (**)$$

где число $\mu(v) = d(v) - 4$ называется *начальным зарядом* вершины $v \in V$, число $\mu(f) = r(f) - 4$, — *начальным зарядом* грани $f \in F \backslash \{f_0\}$, а начальный заряд грани f_0 определяется как $\mu(f_0) = r(f_0) + 4$.

Вершины и грани графа G будем называть *элементами* графа G. Из доказанных свойств G следует, что все элементы графа G кроме 3-граней и вершин степени 2 и 3 имеют неотрицательный начальный заряд. Перераспределим заряды между элементами графа G таким образом, чтобы их сумма осталась прежней, а новый заряд $\mu^*(x)$ каждого элемента $x \in V \cup F$ стал неотрицательным. Тогда для завершения доказательства теоремы 2 достаточно будет доказать неравенство $\mu^*(f_0) > 0$, которое противоречит $(**)$. Определим следующие правила П1–П5 перераспределения зарядов в G.

П1. Каждая внутренняя 3-грань T получает заряд $1/3$ от каждой инцидентной вершины.

П2. Пусть f — такая внутренняя грань, что $r(f) > 5$, и $x, v, y \in V$ — последовательные вершины в граничном цикле грани f.

а) Если $d(v) = 2$, то вершина v получает заряд $1/3$ от грани f.

б) Если v — внутренняя 3-вершина, инцидентная 3-грани, то v получает заряд $2/3$ от f.

в) Если v — внутренняя вершина и ребра vx, vy — нетреугольные, то v получает заряд $1/3$ от f (рис. 8).

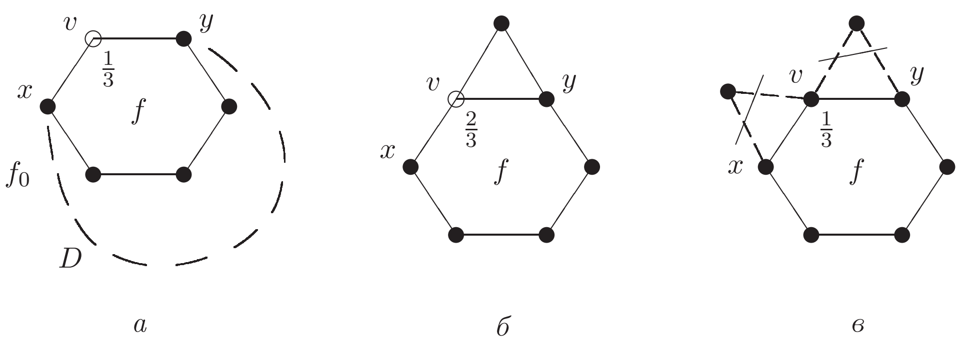

Рис. 8. Применение правилв П2

П3. Пусть $v \in D$.

а) Если $d(v) = 2$ то вершина v получает заряд $5/3$ от грани f_0.

б) Если $d(v) = 3$ и вершина v инцидентна внутренней 3- или 4-грани, то v получает заряд $4/3$ от f_0.

в) В остальных случаях вершина v получает заряд 1 от грани f_0 (рис. 9).

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1–П3.

П4. Пусть $v \in V$ — такая вершина, что $\mu_1(v) > 0$, и v инцидентна в точности $m > 0$ внутренним 4-граням в G. Тогда вершина v передает заряд $\mu_1(v)/m$ каждой такой 4-грани.

П5. Каждая внутренняя 4-грань передает заряд $1/3$ каждой инцидентной внутренней 3-вершине.

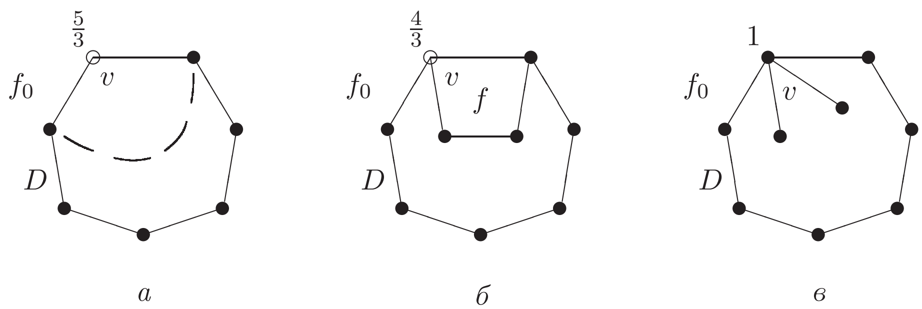

Рис. 9. Применение правила П3

Обозначим через $\mu^*(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1–П5.

Лемма 1. *Для любой вершины $v \in V$ выполняется неравенство* $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Доказательство. Если вершина v передает заряд по правилу П4, то из правил П4 и П5 следует, что $\mu^*(v) \geqslant 0$. Поэтому можно считать, что v не передает заряд по правилу П4. Кроме того, из (12) следует, что вершина v передает заряд не более чем одной 3-грани по правилу П1.

Согласно (5) имеем $d(v) \geqslant 2$. Если $d(v) = 2$, то $v \in D$ и вершина v не инцидентна внутренним 3- и 4-граням. В последнем случае v получает заряд 5/3 от грани f_0 по правилу П3(а) и получает заряд 1/3 от другой инцидентной грани по правилу П2(а). Так как в рассматриваемом случае вершина v не передает заряд по правилу П1, то $\mu^*(v) = -2+4/3+2/3 = 0$.

Пусть $d(v) = 3$. Вначале предположим, что $v \in D$. Если вершина v инцидентна внутренней 3-грани T, то v получает заряд 4/3 от грани f_0 по правилу П3(б) и отдает заряд 1/3 грани T по правилу П1. Следовательно, $\mu^*(v) \geqslant -1 + 4/3 - 1/3 = 0$. Если вершина v не инцидентна внутренним 3-граням, то v получает заряд не менее 1 от f_0 по правилу П3 и не передает заряд по правилу П1. В этом случае имеем $\mu^*(v) = -1 + 1 = 0$. Теперь предположим, что $v \notin D$. Если вершина v инцидентна 3-грани T, то согласно (8), (11), (12) ранг двух других граней, инцидентных v, не меньше 6. В этом случае вершина v передает заряд 1/3 грани T и получает заряд 2/3 от каждой из двух других инцидентных граней по правилу П2(б). Следовательно, $\mu^*(v) = -1 - 1/3 + 2 \cdot 2/3 = 0$. Наконец, если вершина v не инцидентна 3-граням, то v получает заряд 1/3 от каждой инцидентной грани по правилам П2(в) и П5 и не передает заряд по правилу П1. Поэтому $\mu^*(v) = -1 + 3 \cdot 1/3 = 0$.

Пусть $d(v) \geqslant 4$. Если вершина v не инцидентна внутренним 3-граням, то v по-прежнему не передает заряд по правилу П1. Следовательно, $\mu^*(v) \geqslant \mu(v) \geqslant 0$. Предположим, что вершина v инцидентна внутренней 3-грани $T = vxy$. Если $v \in D$, то v получает заряд 1 от грани f_0 по правилу П3(в). В этом случае имеем $\mu^*(v) \geqslant \mu(v) - 1/3 + 1 \geqslant 2/3 > 0$. Если $v \notin D$, то обозначим через f такую грань в G, которая инцидентна вершине v и не инцидентна ребрам vx, vy (такая грань существует, так как $d(v) \geqslant 4$). Из свойств (8), (11), (12) следует, что $r(f) \geqslant 6$. Поэтому грань f передает заряд 1/3 вершине v по правилу П2(в). Следовательно, $\mu^*(v) \geqslant \mu(v) - 1/3 + 1/3 \geqslant 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f = xyzt$ — такая внутренняя 4-грань, что y не является внутренней 3-вершиной в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Вершина y передает заряд не менее 1/3 грани f по правилу П4.*

(б) *Если x, z — внутренние 3-вершины в G, то вершина y передает заряд не менее 1 грани f по правилу П4.*

Доказательство. Согласно (5) степень каждой вершины x, y, z, t не меньше 3. Из (7), (8) следует, что ни одна из вершин x, y, z, t не принадлежит 3-циклу, и существуют такие ребра $xv_x, yv_y, zv_z, tv_t \in E$, что каждая вершина v_x, v_y, v_z, v_t принадлежит некоторому 3-циклу в G. Из первого свойства следует, что вершина y не передает заряд по правилу П1.

Пусть $d(y) = d \geqslant 3$ и вершина y инцидентна в точности m внутренним 4-граням. Обозначим через f_1 и f_2 грани, инцидентные ребру yv_y в G (вариант расположения граней f_1, f_2 показан на рис. 10, *а*). Согласно (8), (11) каждая из граней f_1, f_2 имеет ранг не менее 6 или совпадает с f_0. Отсюда следует, что $1 \leqslant m \leqslant d-2$. Если $d \geqslant 4$, то вершина y получает суммарный заряд не менее 2/3 от граней f_1 и f_2 по правилам П2(в) и П3(в). Если же $d = 3$, то из условий леммы 2 следует, что $y \in D$. В этом случае вершина y получает заряд 4/3 от грани f_0 по правилу П3(б). Таким образом, при $d \geqslant 4$ вершина y передает грани f по правилу П4 заряд $\mu_1(y)/m \geqslant (d-4+2/3)/(d-2) = (3d-10)/(3d-6) = 1-4/(3d-6) \geqslant 1/3$, а при $d = 3$ — заряд $\mu_1(y)/m \geqslant (-1 + 4/3)/1 = 1/3$. Утверждение (а) доказано.

Докажем утверждение (б). Обозначим через f_3 и f_4 грани в G, отличные от f и инцидентные ребрам xy, yz соответственно (один из вариантов расположения граней f_1, f_2, f_3, f_4 показан на рис. 10, *б*). Из условия пункта (б) леммы и свойств (8), (9), (11) следует, что f_3, f_4 — внутренние грани ранга не менее 6. Так как вершина y инцидентна граням f_3, f_4 и

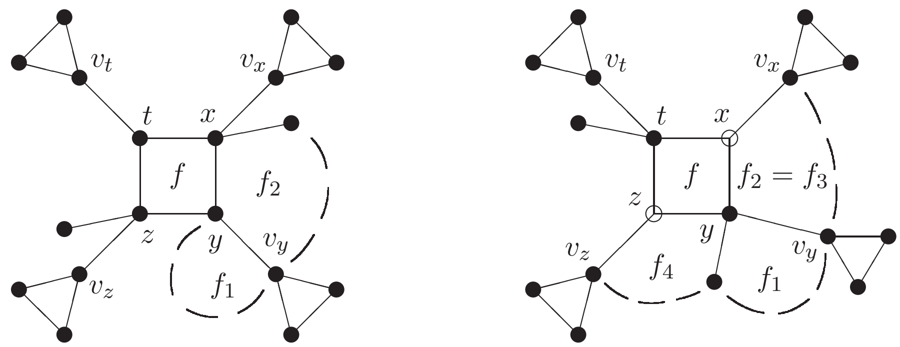

Рис. 10. Конфигурации из леммы 2

не является внутренней 3-вершиной, то $d(y) \geqslant 4$. Отсюда следует, что хотя бы одна грань f_1 или f_2, для определенности f_1, не совпадает с f_3 и f_4. Следовательно, $m \leqslant d-3$. Если вершина y является внутренней, то y получает заряд $1/3$ от каждой из граней f_1, f_3, f_4 по правилу П2(в). Если же $y \in D$, то y получает заряд 1 от грани f_0 по правилу П3(в). В любом случае величина заряда, который грань f получает от вершины y по правилу П4, оценивается как $\mu_1(y)/m \geqslant (d-4+1)/(d-3) = 1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любой грани $f \in F$ выполняется неравенство $\mu^*(f) \geqslant 0$. Кроме того, $\mu^*(f_0) > 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $f \neq f_0$. Если $r(f)=3$, то согласно правилу П1 имеем $\mu^*(f) = -1 + 3 \cdot 1/3 = 0$.

Пусть $r(f) = 4$. Если грань f инцидентна не более чем двум внутренним 3-вершинам в G, то согласно утверждению (а) леммы 2 грань f получает заряд не менее $1/3$ от каждой другой инцидентной вершины по правилу П4. Так как f передает заряд $1/3$ каждой инцидентной внутренней 3-вершине по правилу П5, то $\mu^*(f) \geqslant 0 + 2 \cdot 1/3 - 2 \cdot 1/3 = 0$. Если f инцидентна в точности трем внутренним 3-вершинам, то согласно утверждению б) леммы 2 грань f получает заряд не менее 1 от четвертой инцидентной вершины. Отсюда следует, что $\mu^*(f) \geqslant 0 + 1 - 3 \cdot 1/3 = 0$.

Наконец, пусть 4-грань f инцидентна только внутренним 3-вершинам x, y, z, t. Обозначим через G_1 плоский граф, получаемый из G удалением вершин x, y, z, t. Из минимальности G следует, что 3-раскраска внешней грани графа G_1, индуцированная раскраской φ_0, продолжаема до

3-раскраски φ_1 вершин графа G_1. Так как в графе G каждая вершина грани f смежна с единственной окрашенной вершиной из G_1, то для каждой вершины x, y, z, t имеется список из двух цветов, допустимых при раскраске этой вершины. Иными словами, на вершинах цикла $xyzt$ в G задано предписание размера 2. Так как всякий цикл четной длины предписанно 2-раскрашиваем, то 3-раскраску φ_1 можно продолжить на граф G. Противоречие.

Предположим, что $r(f) = m \geqslant 6$. Обозначим через C граничный цикл грани f в G. Если $m \leqslant 7$, то из условия о расстоянии между 3-циклами в G следует, что в цикле C имеется не более одного треугольного ребра. Если в C нет треугольных ребер, то грань f передает заряд не более 1/3 каждой инцидентной вершине по правилу П2(а,в). В этом случае имеем $\mu^*(f) \geqslant m - 4 - m \cdot 1/3 = 2(m-6)/3 \geqslant 0$.

Пусть грань f инцидентна треугольному ребру xy и пусть w, x, y, z — последовательные вершины цикла C. Будем говорить, что вершины w, x, y, z составляют *окрестность* ребра xy в C. Согласно (5) имеем $d(x) > 2$, $d(y) > 2$. Если $m = 7$, то грань f передает заряд не более 2/3 каждой из вершин x, y и заряд не более 1/3 любой другой инцидентной вершине по правилу П2. Отсюда следует, что $\mu^*(f) \geqslant 3 - 2 \cdot 2/3 - 5 \cdot 1/3 = 0$.

Пусть $m = 6$. Если хотя бы одна вершина треугольного ребра xy, например x, не является внутренней 3-вершиной в G, то грань f не передает заряд вершине x. Так как f передает заряд не более 2/3 вершине y и заряд не более 1/3 каждой другой инцидентной вершине по правилу П2, то $\mu^*(f) \geqslant 2 - 2/3 - 4 \cdot 1/3 = 0$. Предположим, что x, y — внутренние 3-вершины в G. Согласно (10) имеем $w, z \in D$ и $d(w) > 2$, $d(z) > 2$. Отсюда следует, что грань f не передает заряд вершинам w и z. Так как f передает заряд 2/3 каждой из вершин x, y и заряд не более 1/3 каждой инцидентной вершине, отличной от w, x, y, z, то $\mu^*(f) \geqslant 2 - 2 \cdot 2/3 - 2 \cdot 1/3 = 0$.

Пусть $m \geqslant 8$. Из условия о расстоянии между 3-циклами в G следует, что окрестности различных треугольных ребер из C не пересекаются. При этом если вершины w, x, y, z составляют окрестность треугольного ребра xy, то грань f передает заряд не более 2/3 каждой из вершин x, y и заряд не более 1/3 каждой из вершин w, z по правилу П2. Таким образом, суммарный заряд, передаваемый гранью f на вершины из окрестности треугольного ребра, не превосходит 2. Так как любая вершина $v \in C$, не принадлежащая окрестности треугольного ребра из C, получает от f заряд не более 1/3 по правилу П2, то средняя величина заряда, передаваемого гранью f на каждую инцидентную вершину, не превосходит 1/2. Отсюда следует, что $\mu^*(f) \geqslant m - 4 - m \cdot 1/2 = (m-8)/2 \geqslant 0$.

Докажем, что $\mu^*(f_0) > 0$. Заметим, что грань f_0 передает каждой инцидентной вершине заряд не более 5/3 по правилу П3. Поэтому при $r(f_0) \leqslant 4$ имеем $\mu^*(f_0) \geqslant r(f_0) + 4 - r(f_0) \cdot 5/3 = 2(6 - r(f_0))/3 \geqslant 4/3 > 0$.

Предположим, что $r(f_0) = 7$. Из (3) следует, что грань f_0 инцидентна не менее чем двум вершинам степени более 2. Если f_0 инцидентна не менее чем трем таким вершинам, то согласно правилу П3 имеем $\mu^*(f_0) \geqslant 11 - 3 \cdot 4/3 - 4 \cdot 5/3 = 1/3 > 0$. Если f_0 инцидентна в точности двум вершинам степени больше 2 и передает одной из них заряд 1 по правилу П3(в), то $\mu^*(f_0) \geqslant 11 - 1 - 4/3 - 5 \cdot 5/3 = 1/3 > 0$.

Остается рассмотреть случай, когда грань f_0 передает двум инцидентным вершинам x, y заряд 4/3 по правилу П3(б), а степени остальных вершин, инцидентных грани f_0, равны 2. Из правила П3(б) следует, что $d(x) = d(y) = 3$ и каждая вершина x, y инцидентна внутренней грани ранга 3 или 4 в G. Нетрудно убедиться, что подобное возможно только в случае, когда вершины x, y смежны в D и ребро xy инцидентно внутренней 3- или 4-грани f. Если $f = xyt$ является 3-гранью, то вершина t — точка сочленения в G, что противоречит (3) (см. рис. 3).

Пусть $f = xyzt$ — 4-грань (рис. 11). Заметим, что вершины z, t —

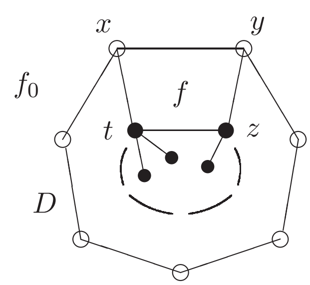

Рис. 11. Случай $r(f) = 4$

внутренние в G и не смежны с вершинами из D, отличными от x, y. Следовательно, 3-раскраска φ_0 вершин грани f_0 может быть продолжена на вершины z и t. Рассмотрим плоский граф G_1, получаемый из G удалением всех 2-вершин из D. Из минимальности графа G следует, что определенная выше 3-раскраска грани f продолжаема на граф G_1. Это означает, что раскраска φ_0 продолжаема на G. Противоречие. Лемма 3 доказана.

Теперь из правил П1–П5 и лемм 1, 3 получаем

$$\sum_{x\in V\cup F}\mu(x)=\sum_{x\in V\cup F}\mu^*(x)>0,$$

что противоречит $(**)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Aksenov V. A., Mel'nikov L. S.** Some counterexamples associated with the three–color problem // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 1980. V. 28, N 1. P. 1–9.
2. **Appel K., Haken W.** The existence of unavoidable sets of geographically good configurations // Illinois J. Math. 1976. V. 20, N 2. P. 218–297.
3. **Appel K., Haken W.** The solution of the four-color-map problem // Scientific American. 1977. V. 237, N 4. P. 108–121.
4. **Borodin O. V.** Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings // J. Graph Theory. 1996. V. 21, N 2. P. 183–186.
5. **Borodin O. V., Raspaud A.** A suffucient condition for planar graphs to be 3-colorable // J. Combinatorial Theory. Ser. B. 2003. V. 88, N 1. P. 17–27.
6. **Garey M. R., Johnson D. S., Stockmeyer L. J.** Some simplified NP-complete graph problems // Theoret. Comput. Sci. 1976. V. 1, N 3. P. 237–267.
7. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Natur. Reihe. 1959. V. 8, N 1. P. 109–120.
8. **Grünbaum B.** Grötzsch's theorem on 3-coloring // Michigan Math. J. 1963. V. 10, N 3. P. 303–310.
9. **Havel I.** O zbarvitelnosti rovinnych grafů theremi barvami // Math. Geometrie a theorie grafů (Praha). 1970. P. 89–91.
10. **Sanders D. P., Zhao Y.** A note on the three color problem // Graphs Combin. 1995. V. 11, N 1. P. 91–94.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: angle@math.nsc.ru,
brdnoleg@math.nsc.ru

Статья поступила
15 сентября 2003 г.