ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2004. Серия 1. Том 11, № 1, 30–51

УДК 517.5–519.7

ОБ ОДНОМ ЯЗЫКЕ, ПОРОЖДЕННОМ ГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ*)

А. Н. Глебов

Применяется новый подход при изучении классов непрерывных функций $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ с ограниченной второй производной и их дискретных аналогов. Описываются минимальные запрещенные подпоследовательности в последовательностях конечных вторых разностей, порождаемых дискретными аналогами функций с односторонне (снизу или сверху) ограниченной второй производной. Исследуются аналогичные последовательности для классов функций с двусторонне ограниченной второй производной.

Введение

Отправной точкой предлагаемой работы является поставленная в [6] и, по-видимому, до сих пор нерешенная [5, 7, 8] задача о вычислении асимптотики ε-энтропии компактов гладких функций. Понятие *ε-энтропии* было введено в [6] в качестве меры информации, заключенной в том или ином вполне ограниченном классе функций. Асимптотика ε-энтропии была подсчитана [6] для классов аналитических функций, а также непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, удовлетворяющих условию Липшица $|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$. Для классов функций более высокой степени гладкости были найдены порядки роста ε-энтропии при $\varepsilon \to 0$.

В работах [1–4] вместо классов непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций рассматривались соответствующие классы дискретных (т. е. определенных и принимающих значения в узлах равномерного разбиения отрезка $[a, b]$ и вещественной оси) функций. В [1–4] эти классы дискретных функций были названы дискретными аналогами соответствующих непрерывных классов и определялись при помощи систем неравенств, верных для конечных разностей функций из исходного непрерывного класса. При этом переход к классам дискретных аналогов аргументировался тем, что

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке голландско–российской программы NWO (грант 047-008-006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00916).

на практике при вычислении значений непрерывной функции приходится находить конечный набор этих значений с ограниченной точностью. Такой процесс формально описывается как вычисление значений конечномерного булева оператора, где двоичные символы соответствуют разрядам двоичной записи значений функции и ее аргумента.

Для классов дискретных функций в [1–4] определялась и исследовалась функция $\log Approx$, аналогичная ε-энтропии в непрерывном случае. Было установлено, что для классов дискретных аналогов, соответствующих функциям конечной и бесконечной гладкости а также аналитическим функциям, функция $\log Approx$ имеет тот же порядок роста, что и ε-энтропия соответствующего непрерывного класса.

Недавно С. В. Августиновичем предложен новый, не вполне традиционный, подход к изучению классов функций конечной гладкости и их дискретных аналогов. В настоящей работе этот подход реализуется в отношении некоторых классов дважды дифференцируемых функций с ограниченной второй производной. Речь идет не о переформулировке старой (вычисление ε-энтропии), а о постановке новой задачи, исследование которой может оказаться интересным и полезным.

Рассматриваются дважды дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции с односторонне ($\varphi''(x) \geqslant \sigma$ или $\varphi''(x) \leqslant \tau$) или двусторонне ($\sigma \leqslant \varphi''(x) \leqslant \tau$) ограниченной второй производной. Значения самих функций и их первых производных не ограничиваются. Ясно, что полученные классы функций не обладают свойством полной ограниченности, что не позволяет говорить об ε-энтропии (в обычном смысле) таких классов.

В рамках указанного подхода на первом этапе каждая непрерывная функция заменяется набором своих значений в узлах равномерного разбиения отрезка $[a,b]$ с шагом $\delta_x = 2^{-\nu}$ (*полудискретный аналог функции*). При этом наряду с полудискретными аналогами непрерывных функций рассматриваются более широкие классы *полудискретных* (заданных в узлах разбиения отрезка $[a,b]$) *функций* с ограниченными сверху и (или) снизу конечными вторыми разностями.

На втором этапе значения рассматриваемой функции (непрерывной или полудискретной) в узлах разбиения округляются с точностью до $\delta_y = 2^{-2\nu}$ (*дискретный аналог функции*) и умножаются на $2^{2\nu}$. В результате получается последовательность целых чисел, конечные вторые разности которой (также целочисленные) ограничены сверху и (или) снизу константами, значения которых зависят от вида ограничений, наложенных на вторую производную (конечную разность) исходной функции.

Например, для класса непрерывных функций, удовлетворяющих условию $\sigma \leqslant \varphi''(x) \leqslant \tau$, где $\sigma, \tau \in Z$, возникающие конечные вторые разности могут принимать лишь значения $\sigma - 1, \sigma, \dots, \tau, \tau + 1$.

Такой набор (конечный или бесконечный) допустимых значений конечных вторых разностей далее рассматривается как алфавит A. По классу функций F определяется язык W над алфавитом A как множество всевозможных последовательностей конечных вторых разностей, соответствующих функциям из F. Ясно, что дискретный аналог любой функции из F однозначно кодируется (а значит, может быть восстановлен) некоторым словом языка W и значениями в двух первых узлах разбиения. Поэтому задача описания дискретных аналогов функций из класса F сводится к описанию языка W.

Из приведенного неформального определения языка W и двусторонней продолжаемости функций из F следует, что язык W является *факторным* и *продолжаемым*, т. е. вместе с каждым словом w содержит все его подслова, а также слова $w_1 = xw$ и $w_2 = wy$, где x и y — некоторые символы алфавита. Очевидно, что всякий факторный язык однозначно определяется множеством своих минимальных (несократимых) запрещенных подслов (минимальных запретов).

В работе исследуются минимальные запреты языков, которые соответствуют классам функций с ограниченной второй производной (конечной разностью). В теоремах 1 и 2 и следствии 1 описаны минимальные запреты, соответствующие классам функций с односторонне (сверху или снизу) ограниченной второй производной. Ключевым моментом данного описания является введенное в разделе 2 понятие *линейного запрета*. В предложении 2 подсчитано число линейных запретов фиксированной длины. В предложениях 3 и 4 из раздела 4 исследуются свойства языков, соответствующих классам функций с двусторонне ограниченной второй производной.

1. Основные понятия и базовые предположения

Рассмотрим следующие классы определенных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ функций:

$F[a, b]$ — класс всех дважды дифференцируемых функций $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}$;

$F_\sigma[a, b]$ — класс всех таких функций из $F[a, b]$, что $\varphi''(x) \geqslant \sigma$ при $x \in [a, b]$;

$F^\tau[a, b]$ — класс всех таких функций из $F[a, b]$, что $\varphi''(x) \leqslant \tau$ при $x \in [a, b]$;

$F_\sigma^\tau[a,b]$ — класс всех таких функций из $F[a,b]$, что $\sigma \leq \varphi''(x) \leq \tau$ при $x \in [a,b]$.
Из данных определений следует, что при любых σ и τ выполняется равенство

$$F_\sigma^\tau[a,b] = F_\sigma[a,b] \cap F^\tau[a,b]. \tag{1}$$

Для положительных целых M и N определим равномерное разбиение отрезка $[a,b]$ и вещественной оси, полагая

$$\delta_x = (b-a)/N,\ \delta_y = 1/M; \quad x_i = a + i\delta_x,\ i = 0,\ldots,N; \quad y_j = j\delta_y,\ j \in Z.$$

При $k, l \in Z$,где $0 \leqslant k \leqslant l$, положим

$$I_{k,l} = \{k, k+1, \ldots, l\};\ I_l = I_{0,l} = \{0, 1, \ldots, l\};$$
$$X_N = \{x_i \,|\, i \in I_N\}; Y_M = \{y_j \,|\, j \in Z\}.$$

Будем называть *полудискретной* любую функцию $\psi : X_N \to \mathbf{R}$ и *дискретной* любую функцию $\eta : X_N \to Y_M$. Если $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ — некоторая функция, то полудискретную функцию $\varphi^{(sd)} = \varphi|_{X_N}$ назовем *полудискрентным аналогом* функции φ. *Дискретным аналогом* функции φ (непрерывной или полудискретной) будем называть дискретную функцию $\varphi^{(d)} : X_N \to Y_M$, определяемую условием

$$0 \leqslant \varphi(x_i) - \varphi^{(d)}(x_i) < \delta_y, \quad i \in I_N. \tag{2}$$

Для каждой функции φ (непрерывной, дискретной или полудискретной) определим значения $\Delta^1\varphi(x_i)$ и $\Delta^2\varphi(x_i)$ первой и второй конечных разностей функции φ в узлах разбиения:

$$\Delta^1\varphi(x_i) = (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))/\delta_x, \quad i \in I_{N-1}; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2\varphi(x_i) &= (\Delta^1\varphi(x_{i+1}) - \Delta^1\varphi(x_i))/\delta_x \\ &= (\varphi(x_i) - 2\varphi(x_{i+1}) + \varphi(x_{i+2}))/\delta_x^2, \quad i \in I_{N-2}.\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что если $\varphi \in F_\sigma[a,b]$, то

$$\Delta^2\varphi(x_i) \geqslant \sigma, \quad i \in I_{N-2}. \tag{5}$$

Если $F^\tau[a,b]$, то

$$\Delta^2\varphi(x_i) \leqslant \tau, \quad i \in I_{N-2}. \tag{6}$$

В случае, когда $\varphi \in F_\sigma^\tau[a,b]$, выполняются оба неравенства (5) и (6) и имеем

$$\sigma \leqslant \Delta^2\varphi(x_i) \leqslant \tau, \quad i \in I_{N-2}. \tag{7}$$

Очевидно, что для любой функции $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ верны равенства $\varphi(x_i) = \varphi^{(sd)}(x_i)$, $\Delta^1\varphi(x_i) = \Delta^1\varphi^{(sd)}(x_i)$ и $\Delta^2\varphi(x_i) = \Delta^2\varphi^{(sd)}(x_i)$. Поэтому если какое-либо неравенство (5), (6) или (7) выполняется для функции φ, то это же неравенство справедливо и для ее полудискретного аналога $\varphi^{(sd)}$. Обозначим через $F_\sigma(X_N)$, $F^\tau(X_N)$ и $F_\sigma^\tau(X_N)$ классы полудискретных функций $\psi : X_N \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенствам (5), (6) и (7) соответственно. При любых σ и τ имеем

$$F_\sigma^\tau(X_N) = F_\sigma(X_N) \cap F^\tau(X_N). \tag{8}$$

Из сделанных замечаний следует, что полудискретные аналоги функций из классов $F_\sigma[a,b]$, $F^\tau[a,b]$ и $F_\sigma^\tau[a,b]$ принадлежат классам $F_\sigma(X_N)$, $F^\tau(X_N)$ и $F_\sigma^\tau(X_N)$ соответственно. Покажем, что классы $F_\sigma(X_N)$, $F^\tau(X_N)$ и $F_\sigma^\tau(X_N)$ не исчерпываются указанными аналогами. Для этого приведем пример такой полудискретной функции $\psi \in F_0(X_N)$, что $\psi \neq \varphi^{(sd)}$ ни для какой функции $\varphi \in F_0[a,b]$. Положим $[a,b] = [0,N]$, $X_N = I_N$, и пусть $\psi(i) = 0$ при $i \in I_{N-2}$, $\psi(N-1) = 1$ и $\psi(N) = 2$. Очевидно, что $\psi \in F_0(X_N)$. При этом если бы существовала такая функция $\varphi \in F_0[0,N]$, что $\varphi^{(sd)} = \psi$, то по определению класса $F_0[0,N]$ функция φ была бы выпуклой. Нетрудно убедиться, что единственной выпуклой функцией, удовлетворяющей условию $\varphi^{(sd)} = \psi$, является кусочно-линейная функция $\varphi : [0,N] \to \mathbf{R}$, где $\varphi(x) = 0$ при $x \in [0, N-2]$ и $\varphi(x) = x - N + 2$ при $x \in [N-2, N]$. Однако функция φ имеет излом при $x = N-2$, и, следовательно, не принадлежит классу $F_0[0,N]$.

Из формулы (4) следует, что конечные вторые разности дискретных функций $\eta : X_N \to Y_M$ принимают только значения вида $j\delta_y/\delta_x^2$, где $j \in \mathbf{Z}$. В частности, при $\delta_y = \delta_x^2$ эти значения целочисленны. Для удобства дальнейшего изложения будем считать выполненными следующие

Слабые предположения. *Значения a, b и $x_i \in X_N$ выражаются числами вида $k\delta_x$, где $k \in Z$, $\delta_x = 2^{-\nu}$, $\delta_y = \delta_x^2 = 2^{-2\nu}$ и ν — неотрицательное целое число. Числа σ и τ являются целыми.*

Будем рассматривать последовательности конечных вторых разностей, порождаемые дискретными аналогами функций из классов F_σ, F^τ и F_σ^τ (непрерывных и полудискретных). Заметим, что при слабых предположениях множество исследуемых последовательностей фиксированной длины не зависит (для каждого класса функций) от масштаба разбие-

ния отрезка $[a,b]$ и расположения его концов, т. е. от выбора параметров ν, a и b. Действительно, пусть последовательность конечных вторых разностей $a_i = \Delta^2\varphi^{(d)}(x_i)$, $i = I_{N-2}$, где $N = (b-a)/\delta_x = 2^\nu(b-a)$, порождается дискретным аналогом непрерывной (полудискретной) функции $\varphi \in F_\sigma[a,b]$ (соответственно $\varphi \in F_\sigma(X_N)$). Рассмотрим функцию $\widetilde{\varphi}(x) = 2^{2\nu}\varphi(a + 2^{-\nu}x)$, определенную на отрезке $[0,N]$ (множестве $\widetilde{X}_N = I_N$). Эта функция (при $\delta_x = \delta_y = 1$) удовлетворяет соотношениям $\widetilde{\varphi}(i) = 2^{2\nu}\varphi(i)$, $i \in I_{N-2}$ и принадлежит классу $F_\sigma[0,N]$ (соответственно $F_\sigma(I_N)$), поскольку $\widetilde{\varphi}''(x) = \varphi''(a + 2^{-\nu}x)$ при $x \in [0,N]$ (соответственно $\Delta^2\widetilde{\varphi}(i) = \Delta^2\varphi(i)$ при $i \in I_{N-2}$). При этом нетрудно заметить, что $\widetilde{\varphi}^{(d)}(i) = 2^{2\nu}\varphi^{(d)}(i)$ при $i \in I_{N-2}$. Следовательно, $\Delta^2\widetilde{\varphi}^{(d)}(i) = \Delta^2\varphi^{(d)}(i) = a_i$ при $i \in I_{N-2}$. Таким образом, последовательность конечных вторых разностей, порожденная дискретным аналогом произвольной функции из класса $F_\sigma[a,b]$ ($F_\sigma(X_N)$), порождается также (при $\delta_x = \delta_y = 1$) дискретным аналогом подходящей функции из класса $F_\sigma[0,N]$ (соответственно $F_\sigma(I_N)$). Аналогичные рассуждения применимы к функциям из классов F^τ и F_σ^τ, что позволяет ограничиться рассмотрением случая, когда выполнены следующие

Сильные предположения. *Считаем, что* $[a,b] = [0,N]$; $X_N = I_N$; $x_i = i \in I_N$, $y_j = j \in Z$; $N \geqslant 2$ — *целое число*; σ *и* τ — *целые числа.*

Далее всюду предполагается, что верны сильные предположения, если не оговорено противное. Выражения (2) и (4) для первой и второй конечных разностей функции φ (непрерывной или полудискретной) и соотношения (2) для ее дискретного аналога преобразуются к виду

$$\Delta^1\varphi(i) = \varphi(i+1) - \varphi(i), \quad i \in I_{N-1}; \tag{9}$$

$$\Delta^2\varphi(i) = \varphi(i) - 2\varphi(i+1) + \varphi(i+2), \quad i \in I_{N-2}; \tag{10}$$

$$\varphi^{(d)}(i) = \lfloor\varphi(i)\rfloor, \quad i \in I_N, \tag{11}$$

где через $\lfloor x\rfloor$ обозначено максимальное целое число, не превосходящее x. Из формул (10), (11) следует, что $|\Delta^2\varphi(i) - \Delta^2\varphi^{(d)}(i)| < 2$ при $i \in I_{N-2}$. Поэтому если функция φ принадлежит одному из классов $F_\sigma[0,N]$ или $F_\sigma(I_N)$), то $\Delta^2\varphi^{(d)}(i) \geqslant \sigma - 1$ при $i \in I_{N-2}$. Аналогично, если функция φ принадлежит одному из классов F^τ или F_σ^τ, то выполняются неравенства $\Delta^2\varphi^{(d)}(i) \leqslant \tau + 1$ и $\sigma - 1 \leqslant \Delta^2\varphi^{(d)}(i) \leqslant \tau + 1$ соответственно.

Положим

$$A_\sigma = \{a \in Z \,|\, a \geqslant \sigma - 1\}, \quad A^\tau = \{a \in Z \,|\, a \leqslant \tau + 1\},$$

$$A_\sigma^\tau = A_\sigma \cap A^\tau = \{a \in Z \,|\, \sigma - 1 \leqslant a \leqslant \tau + 1\}.$$

Каждое множество A_σ, A^τ и A_σ^τ будем рассматривать как алфавит, словами в котором являются всевозможные последовательности конечных вторых разностей, порожденные дискретными аналогами функций из классов $F_\sigma[0,N]$, $F_\sigma(I_N)$, $F^\tau[0,N]$, $F^\tau(I_N)$, $F_\sigma^\tau[0,N]$ и $F_\sigma^\tau(I_N)$. Для каждой функции φ, определенной на множестве I_N, положим $w_{m,n}(\varphi) = a_m\, a_{m+1} \ldots a_{n-1}$ и $w_n(\varphi) = w_{0,n}(\varphi) = a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}$, где $a_i = \Delta^2 \varphi^{(d)}(i)$, $0 \leqslant m < n \leqslant N-1$. Заметим, что $w_{m,n}(\varphi) = w_{n-m}(\varphi_1)$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x+m)$. Поэтому все определенные слова представляются в виде $w_n(\varphi)$ при подходящих n и φ.

Будем говорить, что слово w принадлежит *языку* $[W]_\sigma$ (запись $w \in [W]_\sigma$), если $w = w_n(\varphi)$ при некотором положительном целом n, где $\varphi \in F_\sigma[0,n+1]$. Будем говорить, что язык $[W]_\sigma$ порожден функциями из классов $F_\sigma[0,N]$, $N \geqslant 2$. Аналогично определим *языки* $(W)_\sigma$, $[W]^\tau$, $(W)^\tau$, $[W]_\sigma^\tau$ и $(W)_\sigma^\tau$, порожденные функциями из классов $F_\sigma(I_N)$, $F^\tau[0,N]$, $F^\tau(I_N)$, $F_\sigma^\tau[0,N]$ и $F_\sigma^\tau(I_N)$ соответственно. Как отмечалось во введении, все определенные языки являются факторными и продолжаемыми. Из сделанных замечаний следует, что

$$[W]_\sigma \subset (W)_\sigma, \quad [W]^\tau \subset (W)^\tau \quad \text{и} \quad [W]_\sigma^\tau \subset (W)_\sigma^\tau \tag{12}$$

при любых целых σ и τ. Далее будет доказано, что $[W]_\sigma = (W)_\sigma$ и $[W]^\tau = (W)^\tau$ при любых целых σ и τ и $[W]_\sigma^\tau \neq (W)_\sigma^\tau$ при $\sigma < \tau$.

Сначала покажем, что задача описания языков $[W]_\sigma$, $(W)_\sigma$, $[W]^\tau$, $(W)^\tau$, $[W]_\sigma^\tau$ и $(W)_\sigma^\tau$ при произвольных σ и τ сводится к описанию языков $[W]_0$, $(W)_0$, $[W]_0^\tau$ и $(W)_0^\tau$, где $\tau > 0$.

Пусть $x \in Z$ и $w = a_0\, a_1 \ldots a_{n-1}$ — слово над алфавитом $A \subset Z$. Положим $-w = -a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$ и $x + w = x + a_0, x + a_1, \ldots, x + a_{n-1}$. Если W — язык над алфавитом A, то положим $-W = \{-w \,|w \in W\}$ и $x + W = \{x + w \,|w \in W\}$.

Предложение 1. *Для любых целых чисел σ и τ выполняются равенства $[W]_\sigma = \sigma + [W]_0$; $(W)_\sigma = \sigma + (W)_0$; $[W]^\tau = \tau - [W]_0$ и $(W)^\tau = \tau - (W)_0$. При этом если $\sigma < \tau$, то справедливы равенства $[W]_\sigma^\tau = \sigma + [W]_0^{\tau-\sigma}$ и $(W)_\sigma^\tau = \sigma + (W)_0^{\tau-\sigma}$.*

Доказательство. Для доказатедьства первых двух равенств каждой функции φ из класса $F_\sigma[0,n+1]$ $(F_\sigma(I_{n+1}))$ поставим в соответствие функцию $\psi(x) = \varphi(x) - \sigma x(x+1)/2$. Заметим, что $\psi \in F_0[0,n+1]$ (соответственно $\psi \in F_0(I_{n+1})$) и $w_n(\psi) = w_n(\varphi) - \sigma$. Следовательно, выполняются включения $[W]_\sigma \subseteq \sigma + [W]_0$ и $(W)_\sigma \subseteq \sigma + (W)_0$. Обратные включения и равенства $[W]_\sigma^\tau = \sigma + [W]_0^{\tau-\sigma}$ и $(W)_\sigma^\tau = \sigma + (W)_0^{\tau-\sigma}$ доказываются аналогично.

Чтобы доказать равенства $[W]^\tau = \tau - [W]_0$ и $(W)^\tau = \tau - (W)_0$ рассмотрим произвольное слово $w \in [W]^\tau$ ($w \in (W)^\tau$). Из конечности множества I_{n+1} следует существование такой функции $\varphi \in F^\tau[0, n+1]$ (соответственно $\varphi \in F^\tau(I_{n+1})$), что $w_n(\varphi) = w$ и $\varphi(i) > \varphi^{(d)}(i)$ при каждом $i \in I_{n+1}$. Положим $\psi(x) = \tau x(x+1)/2 - \varphi(x)$. Тогда $\psi \in F_0[0, n+1]$ (соответственно $\psi \in F_0(I_{n+1})$) и $w_n(\psi) = \tau - w$. Следовательно, выполняются включения $[W]^\tau_\sigma \subseteq \sigma + [W]^{\tau-\sigma}_0$ и $(W)^\tau_\sigma \subseteq \sigma + (W)^{\tau-\sigma}_0$. Обратные включения доказываются аналогично. Предложение 1 доказано.

2. Линейные запреты

В этом и следующем разделах будут описаны множества минимальных запретов языков $[W]_0$ и $(W)_0$ и доказано, что эти множества совпадают. Тем самым (с учетом предложения 1) будет получено описание минимальных запретов языков $[W]_\sigma$, $(W)_\sigma$, $[W]^\tau$ и $(W)^\tau$ при любых целых σ и τ. При этом будет доказано, что $[W]_\sigma = (W)_\sigma$ и $[W]^\tau = (W)^\tau$.

Будем называть *линейной* любую функцию $L(x) = kx + b$. Пару целых чисел (p, q) назовем *направлением*, если $(p, q) = (0, 1)$, или $p \neq 0$, $q \geqslant 1$ и p и q взаимно просты. Пусть (p, q) — направление и $k \geqslant 1$ — целое число ($k \geqslant 2$ при $q = 1$). Положим

$$n = (k+1)q - 1; \tag{13}$$

$$L_{p,q}(x) = (p/q)x; \tag{14}$$

$$l(p, q, k) = (a_0 - 1), a_1 \dots a_{n-2}, (a_{n-1} - 1), \tag{15}$$

где $a_0\, a_1 \dots a_{n-1} = w_n(L_{p,q})$.

Из (13), (14) и включения $L_{p,q} \in F_0[0, n+1]$ следует, что $a_0 \geqslant 0$, $a_{n-1} \geqslant 0$ и $a_i \geqslant -1$ при $i \in I_{1,n-2}$. Поэтому определенная формулой (15) последовательность $l(p, q, k)$ является словом над алфавитом A_0 (точнее, $l(p, q, k)$ состоит из символов $-1, 0$ и 1).

Теорема 1. *Любое слово $l(p, q, k)$ является минимальным запретом языков $(W)_0$ и $[W]_0$.*

Замечание 1. Минимальный запрет $l(p, q, k)$ назовем *линейным запретом кратности k, соответствующим направлению (p, q).*

Лемма 1. *Пусть $n \geq 1$, $\varphi \in F_0(I_{n+1})$, $w_n(\varphi) = a_0 \dots a_{n-1}$ и $t_i = \varphi^{(d)}(i)$ при $i \in I_{n+1}$.*

(а) *Если $\psi(i) = \varphi(i) + li + m$, $i \in I_{n+1}$, где l и m — любые целые числа, то $\psi \in F_0(I_{n+1})$ и $w_n(\psi) = w_n(\varphi)$.*

(б) *Для любых целых чисел s_0 и s_1 существует такая полудискретная функция $\psi \in F_0(I_{n+1})$, что $\psi^{(d)}(0) = s_0$, $\psi^{(d)}(1) = s_1$ и $w_n(\psi) = w_n(\varphi)$.*

(в) *Если функция* $\psi \in F_0(I_{n+1})$ *такова, что при некотором* $j \leqslant n$ *выполняются равенства* $\psi^{(d)}(j) = t_j$, $\psi^{(d)}(j+1) = t_{j+1}$ *и* $\Delta^2\psi^{(d)}(i) = a_i$ *при любом* $i \in I_{j,n-1}$, *то* $\psi^{(d)}(i) = t_i$ *при любом* $i \in I_{j,n+1}$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (а), заметим, что при прибавлении к функции φ любой линейной функции конечные вторые разности не меняются. Следовательно, $\psi \in F_0(I_{n+1})$. Из целочисленности коэффициентов l и m следует, что при этом не меняются и значения $\Delta^2\varphi^{(d)}(i)$. Следовательно, $w_n(\psi) = w_n(\varphi)$. Для доказательства утверждения (б) достаточно воспользоваться результатом (а), полагая $m = s_0 - t_0$ и $l = (s_1 - s_0) - (t_1 - t_0)$. Утверждение (в) получается индукцией по i с использованием соотношений $t_{i+1} = a_{i-1} - t_{i-1} + 2t_i$ и $\psi^{(d)}(i+1) = a_{i-1} - \psi^{(d)}(i-1) + 2\psi^{(d)}(i)$. Лемма 1 доказана.

Замечание 2. Все утверждения леммы 1 остаются в силе (вместе с доказательством), если вместо полудискретных функций из класса $F_0(I_{n+1})$ всюду рассматривать непрерывные функции из класса $F[0, n+1]$.

Лемма 2. *Если* $\psi \in F_0(I_N)$ *и* $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant N$, *то*

$$(k-i)\psi(j) \leqslant (k-j)\psi(i) + (j-i)\psi(k).$$

Доказательство. При каждом $i \in I_{1,N}$ определим линейную функцию $L_i(x) = k_i x + b_i$ равенствами $L_i(i-1) = \psi(i-1)$ и $L_i(i) = \psi(i)$. Пусть $\widetilde{\psi} : [0, N] \to \mathbf{R}$ — такая кусочно-линейная функция, что $\widetilde{\psi}(x) = L_i(x)$ при $x \in [i-1, i]$, $i \in I_{1,N}$. Из условия $\psi \in F_0(I_N)$ следует, что $k_i \leqslant k_{i+1}$ при каждом $i \in I_{1,N-1}$. Поэтому функция $\widetilde{\psi}$ выпукла. Отсюда и из равенств $\psi(i) = \widetilde{\psi}(i)$ при $i \in I_{1,N}$ следует утверджение леммы. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

I) Докажем, что слово $l(p, q, k) = l_0 \dots l_{n-1}$, определенное формулой (15), где $n = (k+1)q-1$, является запретом языка $(W)_0$ (и, следовательно, языка $[W]_0$). Согласно (15) имеем $w_n(L_{p,q}) = (l_0+1), l_1 \dots l_{n-2}, (l_{n-1}+1)$. Положим $\eta_i = L^{(d)}_{p,q}(i) = \lfloor pi/q \rfloor$ при $i \in I_{n+1}$.

Допустим, что существует такая полудискретная функция $\varphi \in F_0(I_{n+1})$, что $w_n(\varphi) = l_0 \dots l_{n-1}$. Положим $t_i = \varphi^{(d)}(i)$ при $i \in I_{n+1}$. Используя утверждение (б) леммы 1, функцию φ выберем такой, что $t_0 = \eta_0 - 1 = -1$ и $t_1 = \eta_1$. Тогда

$$t_2 = l_0 - t_0 + 2t_1 = (l_0 + 1) - \eta_0 + 2\eta_1 = \eta_2.$$

Утверждение (в) леммы 1, примененное к функциям $\varphi\,|_{I_n}$ и $L_{p,q}\,|_{I_n}$ при $j = 1$, показывает, что $t_i = \eta_i$ при $i \in I_n$. Поскольку последний символ в слове $w_n(L_{p,q})$ на единицу больше последнего символа в слове

$w_n(\varphi)$, имеем $t_{n+1} = \eta_{n+1} - 1$. Отсюда следует, что $t_0 = \eta_0 - 1 = -1$, $t_{n+1} = \eta_{n+1} - 1 = (k+1)p - 1$ и $t_i = \eta_i$ при $i \in I_{1,n}$. В частности, должны выполняться неравенства $\varphi(0) < t_0 + 1 = 0 = L_{p,q}(0)$, $\varphi(n+1) < t_{n+1} + 1 = (k+1)p = L_{p,q}(n+1)$ и $\varphi(q) \geqslant t_q = \eta_q = p = L_{p,q}(q)$, противоречащие лемме 2. Следовательно, слово $l(p,q,k)$ является запретом языка $(W)_0$.

II) Докажем минимальность запрета $l(p,q,k)$ для языков $(W)_0$ и $[W]_0$. Достаточно показать, что $l_0 \dots l_{n-2} \in [W]_0$ и $l_1 \dots l_{n-1} \in [W]_0$. Будем использовать линейные функции, "достаточно близкие" к функции $L_{p,q}$. В первом случае рассмотрим функции вида $L_\varepsilon(x) = (p/q + \varepsilon)\,x - \varepsilon q$, где $\varepsilon > 0$. График любой такой функции, как и график функции $L_{p,q}$, проходит через точку (q,p) и имеет угловой коэффициент $p/q + \varepsilon > p/q$. Выбирая ε достаточно малым, можно добиться выполнения равенств $(L_\varepsilon)^{(d)}(0) = -1 = \eta_0 - 1$ и $(L_\varepsilon)^{(d)}(i) = \eta_i$ при каждом $i \in I_{1,n}$. Отсюда следует, что $w_{n-1}(L_\varepsilon) = l_0 \dots l_{n-2} \in [W]_0$.

В случае слова $l_1 \dots l_{n-1}$ аналогично определим линейную функцию $L^\varepsilon(x) = (p/q - \varepsilon)\,x + k\varepsilon q$ (ее график проходит через точку (kq, kp)). При достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $(L^\varepsilon)^{(d)}(n+1) = \eta_{n+1} - 1$ и $(L^\varepsilon)^{(d)}(i) = \eta_i$ при $i =\in I_{1,n}$. Следовательно, $l_1 \dots l_{n-1} = w_{1,n}(L^\varepsilon) \in [W]_0$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех линейных запретов и через $\mathcal{L}_n$ множество всех линейных запретов длины $n \geqslant 2$. Оказывается, существует простая формула для подсчета $|\mathcal{L}_n|$.

Предложение 2. *При каждом целом $n \geqslant 2$ выполняется равенство*

$$|\mathcal{L}_n| = n + 1 - \varphi(n+1),$$

где φ — функция Эйлера.

Доказательство. Из утверждения (а) леммы 1 и определений направления и линейного запрета следует, что если (p,q) — направление и $p \neq 0$, то при каждом целом l пара $(p + lq, q)$ является направлением и $l(p,q,k) = l(p + lq, q, k)$ при каждом целом $k \geqslant 1$. Отсюда следует, что любой линейный запрет представим в виде $l(p,q,k)$, где $0 \leqslant p < q$.

Набор целых чисел (p,q,k) назовем *n-допустимым*, если (p,q) — направление, $0 \leqslant p < q$, $k \geqslant 1$ и n определяется формулой (13). Очевидно, что по каждому n-допустимому набору (p,q,k) однозначно определяется линейный запрет $l(p,q,k)$ длины n. Наоборот, любой линейный запрет длины n совпадает с $l(p,q,k)$ для некоторого n-допустимого набора (p,q,k).

Докажем, что различным n-допустимым наборам соответствуют различные линейные запреты. Пусть (p,q,k) и (p',q',k') — n-допустимые

наборы и $l(p,q,k) = l(p',q',k')$. Согласно (15) имеем

$$w_n(L_{p,q}) = w_n(L_{p',q'}). \tag{16}$$

Из (14) и неравенств $0 \leqslant p < q$ и $0 \leqslant p' < q'$ следует, что

$$L^{(d)}_{p,q}(0) = L^{(d)}_{p,q}(1) = L^{(d)}_{p',q'}(0) = L^{(d)}_{p',q'}(1) = 0.$$

Отсюда с использованием (16) и утверждениея (в) леммы 1 получаем $L^{(d)}_{p,q} = L^{(d)}_{p',q'}$. Следовательно, $L_{p,q} = L_{p',q'}$ и $p/q = p'/q'$. Поскольку (p,q) и (p',q') — направления, имеем $(p,q) = (p',q')$. Отсюда и из (13) следует, что $k = k'$ и $(p,q,k) = (p',q',k')$. Поэтому число линейных запретов длины n равно числу различных n-допустимых наборов.

Пусть (p,q,k) — n-допустимый набор. Из (13) следует, что $1 \leqslant q < n+1$ и $q|(n+1)$. При этом k однозначно определяется по заданным n и q. Поэтому число различных n-допустимых наборов с заданным $q \geqslant 1$ равно числу положительных целых $p < q$, взаимно простых с q, т. е. равно $\phi(q)$ (если $q = 1$, то имеется единственный n-допустимый набор $(0,1,n)$). Следовательно, число всех n-допустимых наборов (линейных запретов длины n) задается формулой

$$|\mathcal{L}_n| = \sum_{q|(n+1)} \varphi(q) \; - \varphi(n+1). \tag{17}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что значение суммы в правой части (17) равно $n+1$ согласно свойствам сумматорной функции для функции ϕ. Предложение 2 доказано.

3. Минимальные запреты языков $[W]_\sigma$, $(W)_\sigma$, $[W]^\tau$ и $(W)^\tau$

Докажем, что $\mathcal{L}$ есть множество всех минимальных запретов языка $[W]_0$ и, следовательно, языка $(W)_0$. Определим дискретную функцию $\eta : I_{n+1} \to \mathbf{Z}$, полагая $\eta(0) = \eta(1) = 0$ и $\eta(i) = a_{i-2} - \eta(i-2) + 2\eta(i-1)$ при $i \in I_{2,n+1}$. В этом случае $\Delta^2\eta(i) = a_i$ при каждом $i \in I_{n-1}$.

Лемма 3. *Пусть $k, l \in I_{n+1}$, $k < l$ и $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — такая линейная функция, что $L(k) = \eta(k) + 1$ и $L(l) = \eta(l) + 1$. Тогда $L(i) > \eta(i)$ при каждом $i \in I_{k,l}$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $l - k$. Очевидно, что утверждение леммы верно при $l - k = 1$. Если $l - k = 2$, то $L(k+1) > \eta(k+1)$, так как в противном случае имеем

$$a_k = \eta(k) + \eta(l) - 2\eta(k+1) \leqslant (L(k) - 1) + (L(l) - 1) - 2L(k+1) = -2,$$

что противоречит условию $a_k \in A_0$.

Пусть $l-k \geqslant 3$. Из определения функции L следует, что $L(k) > \eta(k)$ и $L(l) > \eta(l)$. Положим $J = \{i \in I_{k+1,l-1} \,|\, i \neq (k+l)/2\}$.

1) Докажем, что $L(i) \geqslant \eta(i)$ при каждом $i \in J$. Положим

$$m = \arg\max_{i \in J}(\eta(i) - L(i)).$$

Допустим, что $\eta(m) - L(m) = r > 0$.

а) Рассмотрим случай, когда $m < (k+l)/2$ и $m \neq (3k+l)/4$. В этом случае имеем $2m-k > m$ и $2m-k \in J$. Определим линейную функцию L' равенствами $L'(k) = \eta(k)+1$ и $L'(2m-k) = \eta(2m-k)+1$. Из индукционного предположения следует, что $L'(m) > \eta(m) = L(m) + r$. Отсюда и из равенства $L(k) = L'(k)$ получаем, что

$$L'(2m-k) - L(2m-k) = 2(L'(m) - L(m)) > 2r$$

и

$$\begin{aligned}\eta(2m-k) = L'(2m-k) - 1 > L(2m-k) + 2r - 1 \\ = 2(L(m)+r) - L(k) - 1 = 2\eta(m) - \eta(k) - 2. \quad (18)\end{aligned}$$

Из (18) и включений $\eta(2m-k) \in Z$ и $2\eta(m) - \eta(k) - 2 \in Z$ следует, что $\eta(2m-k) \geqslant L(2m-k) + 2r$ и $\eta(2m-k) - L(2m-k) \geqslant 2r > r$ вопреки предположению о максимальности r.

б) Пусть $m = (3k+l)/4$. Тогда $3m - 2k = (k+3l)/4 \in J$. Определим линейную функцию L'' равенствами $L''(k) = \eta(k)+1$ и

$$L''(3m-2k) = \eta(3m-2k) + 1.$$

Аналогично случаю а) получаем

$$L''(3m-2k) - L(3m-2k) = 3(L''(m) - L(m)) > 3r$$

и $\eta(3m-2k) - L(3m-2k) \geqslant 3r > r$, что противоречит максимальности r.

в) Пусть $m > (k+l)/2$ и $m \neq (k+3l)/4$. Тогда $2m-l \in J$. Аналогично случаю а) доказывается, что $\eta(2m-l) - L(2m-l) \geqslant 2r > r$ вопреки предположению о максимальности r.

г) Пусть $m = (k+3l)/4$. Тогда $3m-2l = (3k+l)/4 \in J$. Аналогично случаю б) доказывается, что $\eta(3m-2l) - L(3m-2l) \geqslant 3r > r$ вопреки предположению о максимальности r.

2) Докажем, что $L(m) \geqslant \eta(m)$ при $m = (k+l)/2 \in Z$. Имеем $m-k = l-m \geqslant 2$. Предположим, что $\eta(m) - L(m) = r > 0$. Тогда выполняется равенство

$$2r = 2\eta(m) - 2L(m) = 2\eta(m) - L(k) - L(l) = 2\eta(m) - \eta(k) - \eta(l) - 2,$$

из которого следует, что $2r \in Z$. Так как $r > 0$, то

$$r \geqslant 1/2. \tag{19}$$

Определим линейную функцию L' равенствами

$$L'(k+1) = \eta(k+1) + 1 \;\text{ и }\; L'(l-1) = \eta(l-1) + 1. \tag{20}$$

Из (20) и результата пункта 1) следует, что $L'(k+1) \leqslant L(k+1)+1$ и $L'(l-1) \leqslant L(l-1)+1$. Следовательно, $L'(x) \leqslant L(x)+1$ при любом $x \in [k+1, l-1]$. В частности, при $x = m$ имеем

$$L'(m) \leqslant L(m) + 1. \tag{21}$$

С другой стороны, из индукционного предположения следует, что

$$L'(m) > \eta(m) = L(m) + r. \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) заключаем, что $r < 1$. Отсюда, учитывая неравенство (19) и целочисленность $2r$, следует, что

$$r = 1/2. \tag{23}$$

Докажем, что $L(k+1) \notin Z$ и $L(l-1) \notin Z$. Предположим, что хотя бы одно значение $L(k+1)$ или $L(l-1)$ является целым. Тогда из целочисленности $L(k)$ и $L(l)$ следует, что $L(i) \in Z$ при любом $i \in Z$. В этом случае имеем $r = \eta(m) - L(m) \in Z$, что противоречит (23).

Из (22), (23) и равенства $m = ((k+1)+(l-1))/2$ следует, что

$$\eta(m) = L(m) + r = L(m) + 1/2 < L'(m) = (L'(k+1) + L'(l-1))/2, \tag{24}$$

причем согласно (20) и результату пункта 1) имеем

$$\begin{aligned} L'(k+1) + L'(l-1) &= \eta(k+1) + \eta(l-1) + 2 \leqslant \lfloor L(k+1) \rfloor + \lfloor L(l-1) \rfloor + 2 \\ &= L(k+1) + L(l-1) - \{L(k+1)\} - \{L(l-1)\} + 2, \end{aligned} \tag{25}$$

где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x. Из линейности функции L и соотношений $L(k) \in Z$, $L(l) \in Z$, $L(k+1) \notin Z$ и $L(l-1) \notin Z$ следует, что

$$\{L(k+1)\} + \{L(l-1)\} = 1.$$

Поэтому неравенство (25) принимает вид

$$L'(k+1) + L'(l-1) \leqslant L(k+1) + L(l-1) + 1.$$

Отсюда и из (24) получаем

$$L(m) + 1/2 < (L(k+1) + L(l-1))/2 + 1/2 = L(m) + 1/2.$$

Из этого противоречия следует, что $L(m) \geqslant \eta(m)$.

3) Докажем, что $L(i) > \eta(i)$ при каждом $i \in I_{k,l}$. Из результатов пунктов 1) и 2) следует, что

$$L(i) \geqslant \eta(i) \text{ при } i \in I_{k,l}. \tag{26}$$

Предположим, что $L(j) = \eta(j)$ при некотором $j \in I_{k+1,l-1}$, причем j с этим свойством минимально. Тогда пара чисел

$$(L(j) - L(k), j-k) = (\eta(j) - \eta(k) - 1, j-k)$$

является направлением и существует такое целое число $z \geqslant 2$, что

$$l - k = z(j-k) \text{ и } L(l) - L(k) = \eta(l) - \eta(k) = z(L(j) - L(k)) \\ = z(\eta(j) - \eta(k) - 1). \tag{27}$$

Докажем, что

$$L(i) < \eta(i) + 1 \text{ при } i \in I_{k+1,l-1}. \tag{28}$$

Допустим, что $L(i) \geqslant \eta(i)+1$ при некотором $i \in I_{k+1,l-1}$. Если $k < i < j$, то определим линейную функцию L' равенствами $L'(i) = \eta(i) + 1$ и $L'(l) = L(l) = \eta(l) + 1$. Если $j < i < l$, то положим $L'(i) = \eta(i) + 1$ и $L'(k) = L(k) = \eta(k) + 1$. В любом случае получим $L'(j) \leqslant L(j) = \eta(j)$, что противоречит индукционному предположению.

Из неравенств (26), (28) следует, что $L^{(d)}(i) = \eta(i)$ при $i \in I_{k+1,l-1}$ и

$$\Delta^2 L^{(d)}(i) = a_i \text{ при } i \in I_{k+1,l-3}. \tag{29}$$

Из равенств $L^{(d)}(k) = L(k) = \eta(k)+1$ и $L^{(d)}(l) = L(l) = \eta(l)+1$ получаем

$$\Delta^2 L^{(d)}(k) = a_k + 1 \text{ и } \Delta^2 L^{(d)}(l-2) = a_{l-2} + 1. \tag{30}$$

Из равенств (29), (30), (270 следует, что $a_k a_{k+1} \dots a_{l-2} = l(\eta(j) - \eta(k) - 1, j-k, z-1)$. Таким образом, в слове w имеется линейный запрет $a_k a_{k+1} \dots a_{l-2}$, что противоречит условиям леммы. Лемма 3 доказана.

Теперь покажем, что существует такая кусочно-линейная выпуклая функция $\psi : [0, n+1] \to \mathbf{R}$, что $\psi^{(d)}(i) = \eta(i)$ при каждом $i \in I_{n+1}$.

Линейную функцию L назовем *линейным* (k,l)*-приближением* (или просто (k,l)*-приближением*) функции η, если $0 \leqslant k < l \leqslant n+1$ и $L^{(d)}(i) = \eta(i)$ при каждом $i \in I_{k,l}$. Назовем (k,l)-приближение L *непродолжаемым*, если не существует $(k, l+1)$- и $(n-1, l)$-приближений для n.

При каждом $i \in I_{n+1}$ выберем такое непродолжаемое (k_i, l_i)-приближение L_i для η, что $k_i \leqslant i \leqslant l_i$. Докажем, что кусочно-линейная функция $\psi(x) = \max\limits_{i \in I_{n+1}} L_i(x)$, является искомой. Из определения функции ψ следует, что ψ выпукла (как максимум выпуклых функций). Поэтому остается доказать, что $\psi^{(d)}(i) = \eta(i)$ при $i \in I_{n+1}$. Достаточно применить следующую лемму.

Лемма 4. *Если L — непродолжаемое (k,l)-приближение функции η, то $L(i) < \eta(i) + 1$ при каждом $i \in I_{n+1}$.*

Доказательство. Согласно определению (k,l)-приближения имеем

$$\eta(i) \leqslant L(i) < \eta(i) + 1 \text{ при } i \in I_{k,l}. \tag{31}$$

Предположим, что

$$L(j) \geqslant \eta(j) + 1 \tag{32}$$

при некотором $j \notin I_{k,l}$.

Рассмотрим случай $j \in I_{0,k-1}$. Будем считать, что выбрано максимальное $j \in I_{0,k-1}$ со свойством (32) (случай $j \in I_{l+1,n+1}$, рассматривается аналогично, при этом j выбирается минимальным). Из максимальности j следует, что $L(i) < \eta(i) + 1$ при каждом $i \in I_{j+1,l}$. Отсюда и из непродолжаемости приближения L следует, что

$$L(k-1) < \eta(k-1), \text{ если } j < k-1. \tag{33}$$

При каждом $i \in I_{k,l}$ определим линейную функцию $\lambda_i(x) = q_i x + b_i$ равенствами

$$\lambda_i(j) = \eta(j) + 1 \text{ и } \lambda_i(i) = \eta(i) + 1. \tag{34}$$

Положим $\lambda = \lambda_m$, где $q_m = \min\limits_{i \in I_{k,l}} q_i = q$. Докажем, что

$$\eta(i) < \lambda(i) \leqslant \eta(i) + 1 \text{ при } i \in I_{k-1,l}. \tag{35}$$

Из леммы 3 и равенств (34) при $i = m$ получаем

$$\lambda(i) > \eta(i) \text{ при } i \in I_{j,m}. \tag{36}$$

В частности, неравенство (36) верно при $i \in I_{k-1,m} \subset I_{j,m}$. Из (31)–(34) следует, что

$$\lambda(j) = \eta(j) + 1 \leqslant L(j) \tag{37}$$

и

$$\lambda(m) = \eta(m) + 1 > L(m). \tag{38}$$

Используя (31), (37), (38), неравенство $j < m$ и линейность функций L и λ, получаем

$$\lambda(i) > L(i) \geqslant \eta(i) \text{ при } i \in I_{m+1,l}. \tag{39}$$

Аналогично из линейности функций λ и λ_i и соотношений $q \leqslant q_i$, $j < k$ и $\lambda_i(j) = \lambda(j)$ (последнее равенство следует из (34)) следует, что

$$\lambda(i) \leqslant \lambda_i(i) = \eta(i) + 1 \text{ при } i \in I_{k,l}. \tag{40}$$

Докажем, что

$$\lambda(k-1) \leqslant \eta(k-1) + 1. \tag{41}$$

Если $j = k-1$, то согласно первому равенству из (34) имеем $\lambda(k-1) = \eta(k-1)+1$. Пусть $j < k-1$. Положим $\mu = 1/(k-j) > 0$. Из линейности функций L и λ и неравенств (33), (37), (40) следует, что

$$\begin{aligned}\lambda(k-1) - \eta(k-1) &< \lambda(k-1) - L(k-1)\\ &= \mu(\lambda(j) - L(j)) + (1-\mu)(\lambda(k) - L(k)) \leqslant (1-\mu)(\lambda(k) - L(k))\\ &\leqslant (1-\mu)((\eta(k)+1) - \eta(k)) = 1 - \mu < 1.\end{aligned}$$

Полученное неравенство влечет (41). Теперь (35) следует из (36) и (39)–(41).

Неравенства (35) показывают, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $\lambda - \varepsilon$ является $(k-1, l)$-приближением для η, что противоречит непродолжаемости (k,l)-приближения L. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 и определения функции ψ следует, что

$$\eta(i) \leqslant L_i(i) \leqslant \psi(i) < \eta(i) + 1$$

при каждом $i \in I_{n+1}$. Следовательно, $\psi^{(d)}(i) = \eta(i)$ при $i \in I_{n+1}$, т. е. ψ — искомая кусочно-линейная функция.

Теперь сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. *Если $w = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ — слово над алфавитом A_0, не имеющее линейных запретов, то $w \in [W]_0$.*

Доказательство. Воспользуемся определенными выше функциями η и ψ. Из определения функции η следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно найти такую функцию $\varphi \in F_0[0, n+1]$, что $\varphi^{(d)}(i) = \eta(i)$ при каждом $i \in I_{n+1}$. Пусть $x_1 < x_2 \ldots < x_m$ — все точки излома функции ψ в интервале $(0, n+1)$. Положим $x_0 = 0$, $x_{m+1} = n+1$ и $y_i = \psi(x_i)$ при $i \in I_{m+1}$. Имеем

$$\psi(x) = q_i x + b_i \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{42}$$

где $q_i = (y_i - y_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$; $b_i = (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)/(x_i - x_{i-1})$, $i \in I_{1,m+1}$. Из выпуклости функции ψ следует, что $q_{i+1} > q_i$ при каждом $i \in I_m$. Положим $\varepsilon_x = \min\limits_{i \in I_m}(x_{i+1} - x_i)$; $\varepsilon_y = \min\limits_{i \in I_{n+1}}(\eta(i) + 1 - \psi(i))$; $\theta = \min\limits_{i \in I_m} 1/(q_{i+1} - q_i)$; $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x, \theta\varepsilon_y\}/3$. Определим функцию $\varphi : [0, n+1] \to \mathbf{R}$, полагая

$$\varphi(x) = y_i - \frac{q_{i+1} - q_i}{16\varepsilon^3}(x - x_i)^4 + \frac{3(q_{i+1} - q_i)}{8\varepsilon}(x - x_i)^2 + \frac{q_i + q_{i+1}}{2}(x - x_i) + \frac{3\varepsilon(q_{i+1} - q_i)}{16} \tag{43}$$

при $x \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, $i \in I_{1,m}$, и $\varphi(x) = \psi(x)$ при остальных $x \in [0, n+1]$. Из (42), (43) и определения y_i следует, что $\varphi(x_i + \varepsilon) = y_i + \varepsilon q_{i+1} = \psi(x_i + \varepsilon)$ и $\varphi(x_i - \varepsilon) = y_i - \varepsilon q_i = \psi(x_i - \varepsilon)$ при каждом $i \in I_{1,m}$. Следовательно, функция φ непрерывна.

Докажем, что $\varphi \in F_0[0, n+1]$. Из (43) следует, что

$$\varphi'(x) = -\frac{q_{i+1} - q_i}{4\varepsilon^3}(x - x_i)^3 + \frac{3(q_{i+1} - q_i)}{4\varepsilon}(x - x_i) + \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \tag{44}$$

и

$$\varphi''(x) = \frac{3(q_{i+1} - q_i)}{4\varepsilon}\left(1 - \frac{(x - x_i)^2}{\varepsilon^2}\right) \tag{45}$$

при $x \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, где $i \in I_{1,m}$. Из (42), (44) следует, что при $i \in I_{1,m}$

$$\varphi'(x_i + \varepsilon) = q_{i+1} = \psi'(x_i + \varepsilon) \text{ и } \varphi'(x_i - \varepsilon) = q_i = \psi'(x_i - \varepsilon). \tag{46}$$

Из (42), (45) получаем при $x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon), i \in I_{1,m}$

$$\varphi''(x_i \pm \varepsilon) = \psi''(x_i \pm \varepsilon) = 0 \text{ и } \varphi''(x) > 0. \tag{47}$$

Соотношения (47) и равенства $\varphi''(x) = \psi''(x) = 0$ при $x \notin [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, $i \in I_{1,m}$, показывают, что $\varphi \in F_0[0, n+1]$.

Остается доказать, что

$$\varphi^{(d)}(i) = \eta(i) \text{ при } i \in I_{n+1}. \tag{48}$$

Из (46), (47) и определения функции φ следует, что

$$\varphi(x) \geqslant \psi(x) \text{ при } x \in [0, n+1]. \tag{49}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\varphi(i) \geqslant \psi(i) \geqslant \eta(i) \text{ при } i \in I_{n+1}. \tag{50}$$

Убедимся в том, что

$$\varphi(i) < \eta(i) + 1 \text{ при } i \in I_{n+1}. \tag{51}$$

Как видно из определения ε_y, достаточно показать, что

$$\varphi(i) - \psi(i) < \varepsilon_y \text{ при } i \in I_{n+1}. \tag{52}$$

Докажем, что $\varphi(x) - \psi(x) < \varepsilon_y$ при любом $x \in [0, n+1]$. Из определения функции φ следует, что $\varphi(x) - \psi(x) = 0 < \varepsilon_y$ при $x \notin [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, $i \in I_{1,m}$. Пусть $x \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, где $i \in I_{1,m}$. Тогда из (42), (43), (49) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \psi(x) = |\varphi(x) - \psi(x)| = \Bigg| &-\frac{q_{i+1} - q_i}{16\varepsilon^3}(x - x_i)^4 \\
&+ \frac{3(q_{i+1} - q_i)}{8\varepsilon}(x - x_i)^2 \pm \frac{q_{i+1} - q_i}{2}(x - x_i) + \frac{3\varepsilon(q_{i+1} - q_i)}{16}\Bigg| \\
&\leqslant (q_{i+1} - q_i)\left(\frac{|x - x_i|^4}{16\varepsilon^3} + \frac{3|x - x_i|^2}{8\varepsilon} + \frac{|x - x_i|}{2} + \frac{3\varepsilon}{16}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\theta}\left(\frac{\varepsilon^4}{16\varepsilon^3} + \frac{3\varepsilon^2}{8\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon}{16}\right) = \frac{9\varepsilon}{8\theta} \leqslant \frac{3\varepsilon_y}{8} < \varepsilon_y,
\end{aligned}$$

что влечет (52) и, следовательно, (51). Из доказанных неравенств (50) и (51) следует (48). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *При любых целых σ и τ множество минимальных запретов языков $[W]_\sigma$ и $(W)_\sigma$ ($[W]^\tau$ и $(W)^\tau$) совпадает с $\sigma + \mathcal{L}$(соответственно с $\tau - \mathcal{L}$).*

Следствие 2. *При любых целых σ и τ выполняются равенства $[W]_\sigma = (W)_\sigma$ и $[W]^\tau = (W)^\tau$*

4. Свойства языков $[W]_\sigma^\tau$ и $(W)_\sigma^\tau$

Из следствия 2 и соотношений (1), (8), (12) следует, что при любых целых $N \geqslant 2$, σ и τ выполняется цепочка включений и равенств

$$[W]_\sigma^\tau \subset (W)_\sigma^\tau \subset [W]_\sigma \cap [W]^\tau = (W)_\sigma \cap (W)^\tau. \tag{53}$$

В этом разделе будет доказано, что оба включения в (53) являются строгими при $\sigma < \tau$. По предложению 1 для доказательства неравенства $[W]_\sigma^\tau \neq (W)_\sigma^\tau$ достаточно убедиться в том, что $[W]_0^\tau \neq (W)_0^\tau$ при каждом целом $\tau > 0$.

Предложение 3. *Пусть $w = a_0 a_1 \dots a_{m+n+1}$ — слово над алфавитом A_0^τ, где $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $a_i = 0$ при $i \in I_{m-1}$, $a_m = -1$, $a_{m+1} = 1$ и $a_i = \tau$ при $i \in I_{m+2,m+n+1}$ (т. е. $w = 0^m - 11\tau^n$). Тогда $w \in (W)_0^\tau \setminus [W]_0^\tau$ при условии, что выполняется неравенство*

$$24/(m+1) + (\tau+8)/n \leqslant 2\tau. \tag{54}$$

Доказательство. Определим дискретную функцию $t : I_{m+n+3} \to Z$, полагая $t(0) = t(1) = 0$ и $t(i) = a_{i-2} - t(i-2) + 2t(i-1)$ при $i \in I_{2,m+n+3}$. В этом случае $\Delta^2 t(i) = a_i$ при каждом $i \in I_{m+n+1}$. Нетрудно показать, что $t(i) = 0$ при $i \in I_{m+1}$ и $t(i) = q(i)$ при $i \in I_{m+2,m+n+3}$, где

$$q(x) = \tau x^2/2 - \tau(m+5/2)x + \tau(m+2)(m+3)/2 - 1.$$

Докажем, что $w \in (W)_0^\tau$ при всех целых положительных m и n. Определим полудискретную функцию $\psi : I_{m+n+3} \to \mathbf{R}$, полагая

$$\psi(i) = (m+1-i)/(2m+2) \text{ при } i \in I_{m+2}$$

и

$$\psi(i) = t(i) + (2m+1)/(2m+2) \text{ при } i \in I_{m+3,m+n+3}.$$

Легко проверяется, что $\psi \in F_0^\tau(I_{m+n+3})$ и $\psi^{(d)} = t$. Отсюда следует, что $w \in (W)_0^\tau$.

Докажем, что если выполнено неравенство (54), то $w \notin [W]_0^\tau$. Предположим, что $w \in [W]_0^\tau$. Тогда согласно утверждению (б) леммы 1 существует такая функция $\varphi \in F_0^\tau[0, m+n+3]$, что $\varphi^{(d)} = t$. Из выпуклости φ и неравенств $\varphi(0) < t(0) + 1 = 1$ и $\varphi(m+1) \geqslant t(m+1) = 0$ следует, что

$$\varphi(m+5/2) > -3/(2m+2). \tag{55}$$

Положим $r(x) = \varphi(x) - q(x)$. Докажем, что $r'(x) > -(1+\tau/8)/n$ при $x \in [m+5/2, m+3]$. При любом $x \in [0, m+n+3]$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \varphi(m+n+3) - t(m+n+3) = r(m+n+3) = r(x) + \int\limits_{x}^{m+n+3} r'(\xi)\, d\xi. \quad (56)$$

Если $x \in [m+5/2, m+3]$, то из выпуклости φ и неравенств $\varphi(m+2) < t(m+2)+1 = 0$ и $\varphi(m+3) < t(m+3)+1 = 0$ следует, что $\varphi(x) < 0$. Отсюда получаем

$$r(x) = \varphi(x) - q(x) < -q(x) \leqslant -q(m+5/2) = 1 + \tau/8. \quad (57)$$

Так как $r''(\xi) = \varphi''(\xi) - q''(\xi) = \varphi''(\xi) - \tau \leqslant 0$, то функция $r'(\xi)$ монотонно не возрастает на отрезке $[0, m+n+3]$. Пользуясь этим фактом и неравенством (57), можно преобразовать (56) к виду

$$0 \leqslant r(x) + \int\limits_{x}^{m+n+3} r'(\xi)\, d\xi < 1 + \tau/8 + (m+n+3-x) r'(x).$$

Следовательно, при $x \in [m+5/2, m+3]$ имеем

$$\varphi'(x) - q'(x) = r'(x) > -(1+\tau/8)/(m+n+3-x) \geqslant -(1+\tau/8)/n.$$

Отсюда и из (55) получаем

$$0 = 16(t(m+3)+1) > 16\varphi(m+3) = 16\varphi(m+5/2) + 16 \int\limits_{m+5/2}^{m+3} \varphi'(x) dx$$

$$> \; -24/(m+1) + \int\limits_{m+5/2}^{m+3} (16q'(x) - 2(\tau+8)/n) dx$$

$$= 16q(x)\Big|_{m+5/2}^{m+3} - 24/(m+1) - (\tau+8)/n = 2\tau - 24/(m+1) - (\tau+8)/n,$$

что противоречит (54). Предложение 3 доказано.

Следствие 3. *Если σ и τ — целые числа и $\sigma < \tau$, то $[W]_\sigma^\tau \neq (W)_\sigma^\tau$.*

Предложение 4. *Пусть $w = a_0 a_1 \ldots a_8$ — слово над алфавитом A_0^τ, где $a_0 = a_2 = a_6 = -1$, $a_3 = a_7 = a_8 = 0$, $a_1 = a_5 = 1$ и $a_4 = \tau + 1$ (т. е. $w = -11-10(\tau+1)1-100$). Тогда $w \in ([W]_0 \cap [W]^\tau) \setminus (W)_0^\tau$.*

Доказательство. Согласно следствию 1 в слове w отсутствуют минимальные запреты языков $[W]_0$ и $[W]^\tau$. Следовательно, $w \in [W]_0 \cap [W]^\tau$.

Докажем, что слово w является минимальным запретом языка $(W)_0^\tau$. Предположим, что $w \in (W)_0^\tau$. Определим дискретную функцию $t : I_{10} \to Z$, полагая $t(0) = t(1) = 2$ и $t(i) = a_{i-2} - t(i-2) + 2t(i-1)$ при $i \in I_{2,10}$. Отсюда следует, что $t(2) = t(3) = 1$, $t(4) = 0$, $t(5) = -1$, $t(6) = \tau - 1$ и $t(i) = (i-5)\tau$ при $i \in I_{7,10}$. Согласно утверждению (б) леммы 1 существует такая полудискретная функция $\varphi \in F_0^\tau(I_{10})$, что $\varphi^{(d)} = t$. Из леммы 2 и неравенств $\varphi(0) < t(0) + 1 = 3$ и $\varphi(3) \geqslant t(3) = 1$ получаем

$$\varphi(4) > 1/3. \tag{58}$$

Аналогично из леммы 2 и неравенств $\varphi(7) \geqslant t(7) = 2\tau$ и

$$\varphi(10) < t(10) + 1 = 5\tau + 1$$

следует, что

$$\varphi(6) > \tau - 1/3. \tag{59}$$

Используя (58), (59) и неравенство $\varphi(5) < t(5) + 1 = 0$, получаем

$$\Delta^2\varphi(4) = \varphi(4) - 2\varphi(5) + \varphi(6) > \tau,$$

что противоречит условию $\varphi \in F_0^\tau(I_{10})$. Следовательно, слово w — запрет языка $(W)_0^\tau$.

Для доказательства минимальности запрета w рассмотрим полудискретные функции $\varphi : I_9 \to \mathbf{R}$ и $\psi : I_{1,10} \to \mathbf{R}$, где $\varphi(i) = -0,65i + 2,95$ и $\psi(i) = -0,8i + 3,4$ при $i \leqslant 4$, $\varphi(5) = \psi(5) = -0,01$ и $\varphi(i) = (\tau + 0,4)i - 5\tau - 2,8$ и $\psi(i) = (\tau + 0,3)i - 5\tau - 2,1$ при $i \geqslant 6$. Нетрудно заметить, что $\varphi \in F_0^\tau(I_9)$ и $\psi \in F_0^\tau(I_{1,10})$, причем $\varphi^{(d)} = t|_{I_9}$ и $\psi^{(d)} = t|_{I_{1,10}}$. Отсюда следует, что $w_8(\varphi) = a_0 a_1 \ldots a_7 \in (W)_0^\tau$ и $w_{1,9}(\psi) = a_1 \ldots a_8 \in (W)_0^\tau$. Предложение 4 доказано.

Следствие 4. *Если σ и τ — целые числа и $\sigma < \tau$, то*

$$(W)_\sigma^\tau \neq [W]_\sigma \cap [W]^\tau.$$

Автор благодарен С. В. Августиновичу за постановку задачи и оказанную неоценимую помощь при ее решении и написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аманжаев Г. Г.** Дискретный аналог гладких функций // Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 4–24.
2. **Аманжаев Г. Г.** О дискретных аналогах классов непрерывных функций различной гладкости // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 2. С. 54–58.
3. **Аманжаев Г. Г.** О дискретных приближениях непрерывных функций с ограниченной второй производной // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 2. С. 5–15.
4. **Аманжаев Г. Г.** Дискретные аналоги классов непрерывных функций различной гладкости и сложность их схемной реализации (Дисс. . . . доктор физ.-мат. наук). М.: МГУ, 1996.
5. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. 2-е изд. М.; Ижевск: РХД, 2002.
6. **Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.** ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 3–86.
7. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
8. **Тихомиров В. М.** Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. Т. 14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1987. С. 103–260.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия,
E-mail: angle@math.nsc.ru

Статья поступила
3 марта 2003 г.