ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2004. Серия 1. Том 11, № 1, 79–92

УДК 519.714

ПЕРИОДИЧНОСТЬ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

С. А. Пузынина

Раскраска вершин графа называется совершенной, если цветовой состав окружения каждой его вершины однозначно определяется цветом этой вершины. Доказано, что для любой совершенной раскраски графа бесконечной прямоугольной плоской решетки существует периодическая совершенная раскраска этого графа с таким цветовым составом окружения вершин каждого цвета.

Введение

Раскраска вершин графа называется совершенной, если цветовой состав окружения каждой его вершины однозначно определяется цветом этой вершины (строгое определение смотри ниже). Ранее совершенные раскраски изучались в различных контекстах и имели различные названия (см. [1]–[6]). В частности, в работах, близких к теории кодирования, такие раскраски назывались *схемами разбиения* (*partition designs*) [5] или *равномерными разбиениями* (*equitable partitions*) [6]. Также использовались термины *дистрибутивная* [2], *изотропная раскраска* [4] и *делитель графа* [3]. Данное понятие настолько естественно, что было введено независимо в нескольких работах.

Основным способом построения совершенных раскрасок является так называемый орбитный метод, суть которого выражается в следующем очевидном факте (см., например [3]). Пусть G — произвольный обыкновенный граф с группой автоморфизмов H и H' — некоторая подгруппа группы H. Относительно H' множество вершин графа G разбивается на орбиты. Раскрашивая вершины каждой орбиты своим цветом, получаем совершенную раскраску графа G.

Заметим, что любой граф G обладает совершенной раскраской, при которой все его вершины красятся в разные цвета, а если граф G регулярный (т. е. степени всех его вершин одинаковы), то для него существует совершенная раскраска в один цвет.

Ранее изучались совершенные раскраски в два цвета некоторых графов и семейств графов: n-мерного булева куба, графа бесконечной прямоугольной решетки [4], плоских триангуляций минимальной степени пять [1].

Мы рассматриваем совершенные раскраски графа G бесконечной прямоугольной плоской решетки. Надо сказать, что этот граф является очень популярным объектом при изучении различных комбинаторных конструкций, в частности, упаковок, покрытий и замощений [7, 8]. Довольно часто при этом возникают вопросы следующего типа: если некоторая конструкция на графе G существует, то следует ли отсюда существование конструкции с теми же параметрами, обладающей свойством периодичности? Ответ на этот вопрос не всегда оказывается положительным. Например, в работах [7] и [8] рассматривались замощения плоскости плитками. Оказалось, что для некоторого набора плиток замощение существует, но все такие замощения оказываются апериодическими.

Результат нашего исследования показывает, что для любой совершенной раскраски вершин графа бесконечной прямоугольной плоской решетки существует периодическая совершенная раскраска вершин этого графа с таким же цветовым составом окружения вершин каждого цвета.

1. Определения и обозначения

Зафиксируем множество цветов $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и рассмотрим произвольный граф G.

Раскраска вершин графа G в цвета из A с квадратной матрицей $M = (m_{ij})$ порядка n называется *совершенной*, если число вершин цвета a_j, смежных с вершиной цвета a_i, не зависит от выбора этой вершины и равно m_{ij}.

Мы рассматриваем совершенные раскраски графа $G(Z^2)$ — бесконечной прямоугольной плоской решетки. Этот граф является регулярным, степень любой его вершины равна 4. Каждой вершине сопоставляется пара целых чисел — координат: (x, y).

Раскраску графа $G(Z^2)$ можно понимать как функцию

$$\varphi : Z^2 \to A.$$

Раскраска называется *периодической в направлении* (p, q) (p, q — целые числа), если $\varphi(x+p, y+q) = \varphi(x, y)$ для любых целых чисел x, y.

Совершенная раскраска, периодическая в направлениях (p, p) и $(q, -q)$, называется *периодической*. Направление (p, p) назовем *поло-*

жительным, а направление $(q,-q)$ — *отрицательным*; числа p и q назовем периодами соответственно по положительному и отрицательному направлениям.

Совершенную раскраску назовем *периодизуемой*, если существует периодическая совершенная раскраска с такой же матрицей.

Вершину (x,y) графа $G(Z^2)$ назовем *четной*, если $x+y$ четно, и *нечетной*, если $x+y$ нечетно. Таким образом, множество вершин графа разбивается на две группы.

Раскраске $\varphi(x,y)$ сопоставим *двудольную раскраску* $\varphi^*(x,y)$ следующим образом:

$$\varphi^*(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y), & \text{если } (x,y) \text{ — четная вершина,} \\ a_{i+n}, & \text{если } (x,y) \text{ — нечетная вершина и } \varphi(x,y) = a_i. \end{cases}$$

Следовательно, если одним цветом окрашены четные и нечетные вершины, то вместо этого цвета вводятся два новых цвета, одним из которых окрашены только четные, а другим только нечетные вершины. У двудольной раскраски множество цветов разбивается на две группы, одна из которых соответствует четным, а другая — нечетным вершинам. Если раскраска $\varphi(x,y)$ совершенная, то φ^* также является совершенной, ее матрица M^* имеет вид:

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ниже вопрос периодизуемости произвольной совершенной раскраски сводится к вопросу периодизуемости двудольной совершенной раскраски. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только двудольные раскраски.

Совершенную раскраску назовем *периодической по четным вершинам в направлении* (p,q) , где $p+q$ — четное, если $\varphi(x+p,y+q) = \varphi(x,y)$ для любой четной вершины (x,y). Совершенную раскраску, периодическую в направлениях (p,p) и $(q,-q)$ по четным вершинам, назовем *периодической по четным вершинам*. Аналогично вводится определение периодичности раскраски по нечетным вершинам.

Раскраска может быть периодической и непериодической в положительном и отрицательном направлениях по четным и нечетным вершинам (всего 8 возможностей).

Цвета i и j назовем *эквивалентными*, если в соответствующей матрице i-я и j-я строки совпадают.

Введем *операцию редукции* для эквивалентных цветов в двудольной раскраске: объединение цветов i и j в один цвет.

Операцию редукции для четных цветов введем следующим образом: проводим операции редукции для эквивалентных цветов в матрице M_1, в результате получим нередуцируемую матрицу, т. е. матрицу без одинаковых строк. Наряду с операцией редукции для четных цветов можем рассматривать обратную операцию, т. е. возвращение к исходным цветам. Аналогично вводится операция редукции для нечетных цветов.

Дальнейшие определения даются с точностью до поворота и зеркального отражения.

Определим *бесконечную диагональ* в положительном (отрицательном) направлении как множество вершин с координатами $(i+d, j+d)$ (соответственно $(i-d, j+d)$), где i, j — фиксированные целые числа, d — произвольное целое число.

n-диагональю в положительном (отрицательном) направлении назовем множество вершин с координатами $(i+d, j+d)$ (соответственно $(i-d, j+d)$), где i, j — фиксированные целые числа, $d \in \{0, ..., n-1\}$. Вершину (i, j) назовем *начальной*. Для бесконечной диагонали в качестве начальной вершины можно выбрать произвольную вершину из диагонали. Положительную n-диагональ обозначим через $D_n^+(i, j)$, отрицательную — через $D_n^-(i, j)$

Любой положительной (отрицательной) диагонали поставим в соответствие слово $\varphi(i, j), \varphi(i+1, j+1), .., \varphi(i+n-1, j+n-1)$ (для отрицательной — слово $\varphi(i, j), \varphi(i-1, j+1), ...\varphi(i-n+1, j+n-1)$). Диагонали будем считать одинаковыми, если соответствующие им слова совпадают.

Бинарная диагональ — это бесконечная диагональ, состоящая из двух чередующихся цветов. *Бинарная n-диагональ* — это n-диагональ, состоящая из двух чередующихся цветов. Бинарную диагональ будем обозначать через $B_{n,x,y}^+(i, j)$ или $B_{n,x,y}^-(i, j)$, где x и y — соответствующие цвета; для сокращения записи иногда мы будем опускать индексы x и y.

Иногда для удобства вместо графа $G(Z^2)$ будем рассматривать двойственный ему граф, так как эти графы изоморфны и будем говорить не "вершина а "клетка". В частности, для наглядности на рисунках окрашены клетки.

На рис. 1 изображена положительная бинарная диагональ.

В дальнейшем не теряя общности будем, как правило, начинать рассуждения с диагоналей положительного направления.

Диагональное двойное слово длины n (n — целое, $n \geqslant 2$) определим как две n-диагонали одного направления со смежными начальными вершинами. *Бесконечное диагональное двойное слово* — это две бесконечные диагонали одного направления, у которых начальные вершины можно выбрать так, чтобы они были смежными.

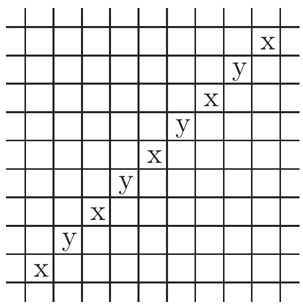

Рис. 1.

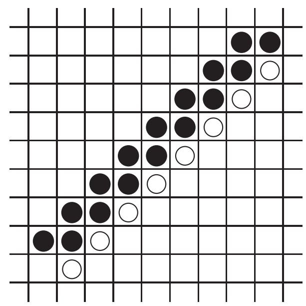

Рис. 2.

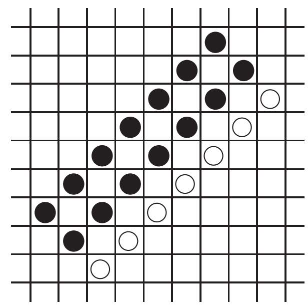

Рис. 3.

На рис. 2 черными кружками изображено такое двойное слово.

Продолжение двойного слова, состоящего из двух n-диагоналей в положительном направлении с начальными вершинами (i, j) и $(i-1, j)$— это n-диагональ с началом $(i, j-1)$. Такое двойное слово будем обозначать через $DD_n^+(i, j)$, а его продолжение — через $r_n^+(i, j)$. Можно также рассматривать продолжение в другую сторону, т. е. положительную n-диагональ с началом $(i-1, j+1)$; обозначим его через $l_n^+(i, j)$. На рис. 2 белыми кружками изображено продолжение двойного слова.

Двойные слова $DD_n^+(i, j)$ и $DD_n^+(k, l)$ будем считать одинаковыми, если их n-диагонали $D_n^+(i, j)$ и $D_n^+(k, l)$, $D_n^+(i-1, j)$ и $D_n^+(k, l-1)$ попарно одинаковы.

Положительное двойное слово, состоящее из двух n-диагоналей в положительном направлении с начальными вершинами (i, j) и $(i, j+1)$, будем обозначать через $DD_n^{*+}(i, j)$; его продолжения — n-диагонали с начальными вершинами $(i+1, j)$ и $(i-1, j+1)$ — через $l_n^{*+}(i, j)$ и $r_n^{*+}(i, j)$.

Аналогично можем определить двойное диагональное слово в отрицательном направлении и его продолжения; нам потребуется бесконечное двойное диагональное слово $DD^-(i, j)$, состоящее из двух бесконечных диагоналей $D^-(i, j)$ и $D^-(i+1, j)$, и его продолжения $l^-(i, j)$ и $r^-(i, j)$, которые являются диагоналями соответственно $D^-(i-1, j)$ и $D^-(i+2, j)$.

Конечное *четное диагональное двойное слово* длины n (где n — целое число) определим как две n-диагонали $D_n^+(i, j)$ и $D_n^+(i-1, j+1)$. Такое слово обозначим через $E_n^+(i, j)$. На рис. 3 черными кружками изображено четное двойное слово.

Продолжение четного двойного слова — это n-диагональ $D_n^+(i{+}1, j{-}1)$.

На рис. 3 белыми кружками изображено продолжение четного двойного слова.

Две бинарные n-диагонали (два диагональных двойных слова, четных двойных слова) в положительном направлении назовем *парными*, если одно получается из другого сдвигом на вектор, коллинеарный вектору $(-1, 1)$. Аналогично определяется парность для слов в отрицательном направлении.

2. Основная теорема

Основной целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *Всякая совершенная раскраска бесконечной прямоугольной решетки периодизуема, причем периодическая совершенная раскраска получается из непериодической сдвигами бесконечных бинарных диагоналей.*

Под сдвигом бинарной диагонали, состоящей из цветов x и y, понимается следующая операция: каждая вершина цвета x из бинарной диагонали красится в цвет y, а каждая вершина цвета y — в цвет x.

Для доказательства теоремы потребуется несколько вспомогательных предложений.

Предложение 1. *Совершенная раскраска φ является периодизуемой тогда и только тогда, когда φ^* периодизуема.*

Доказательство. Если φ является периодизуемой, то существует периодическая совершенная раскраска ψ с той же матрицей. Но тогда ψ^* также является периодической и с такой же матрицей, как и φ^*. Если φ^* периодизуемая, то существует совершенная раскраска ψ^* с той же матрицей, которая является периодической. По определению раскраска φ^* получается из раскраски φ разбиением цвета на два в зависимости от четности вершины. Но тогда в раскраске ψ^* можно обратно объединить соответствующие пары цветов, и полученная совершенная раскраска будет периодической с той же матрицей, что и φ.

Таким образом, вопрос периодизуемости совершенной раскраски сводится к вопросу периодизуемости двудольной совершенной раскраски. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только двудольные раскраски.

Предложение 2. *Раскраска, перидическая в двух неколлинеарных направлениях, является периодической.*

Доказательство. Пусть раскраска является периодической в направлениях (p_1, q_1) и (p_2, q_2), т. е. для любой вершины (x, y)

$$\varphi(x + p_1, y + q_1) = \varphi(x, y),$$

$$\varphi(x + p_2, y + q_2) = \varphi(x, y).$$

Тогда

$$\varphi(x, y) = \varphi(x + (p_2 - q_2) \cdot p_1, y + (p_2 - q_2) \cdot q_1) =$$

$$= \varphi(x + (p_2 - q_2) \cdot p_1 + (p_1 - q_1) \cdot p_2, y + (p_2 - q_2) \cdot q_1 + (p_1 - q_1) \cdot q_2) =$$

$$= \varphi(x + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1, y + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1),$$

т. е. раскраска является периодической в положительном направлении $(q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1, q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1)$. Аналогично убедимся в том, что раскраска является периодической в отрицательном направлении $(q_2 \cdot p_1 - q_1 \cdot p_2, -q_2 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_2)$.

Предложение 3. *Раскраска, полученная из совершенной раскраски операцией редукции для некоторых эквивалентных цветов a_i и a_j, является совершенной.*

Доказательство. В результате проведенной операции цветовой состав окружения вершин той же четности, что и вершин цветов a_i и a_j, не меняется, вершины цветов a_i и a_j имеют одинаковый цветовой состав окружения по определению, каждая вершина другой четности цвета a_k имеет $m_{ki} + m_{kj}$ смежных вершин нового цвета. Таким образом, новая раскраска действительно является совершенной.

Предложение 4. *Продолжения двух одинаковых двойных слов в одну сторону либо одинаковы, либо являются бинарными диагоналями.*

Доказательство. Рассмотрим такую вершину двойного слова, что две смежные с ней вершины принадлежат продолжению, а две другие — двойному слову. Для цветов двух вершин из продолжения возможно не более двух вариантов; если зафиксируем один из них, то цвета остальных вершин из продолжения восстановятся однозначно и это продолжение будет бинарной диагональю.

Предложение 5. *Пусть $l \geqslant 2$. Если любые парные одинаковые четные двойные слова длины не менее l в положительном направлении продолжаются одинаково, то совершенная раскраска является периодической по четным вершинам в отрицательном направлении.*

Доказательство. Разобьем четную группу вершин графа на диагональные полосы ширины l, $l \geqslant 2$. Каждая полоса состоит из парных

l-диагоналей положительного направления (т. е. $D_l^+(i+k, j-k)$, где (i, j) зависит от полосы, а k принимает все целые значения). В каждой такой полосе встретятся два одинаковых четных слова длины l, находящихся друг от друга на расстоянии не более n^{2l}. Так как они продолжаются одинаково, то в каждой из этих полос имеется периодичность в отрицательном направлении, причем длина периода не превосходит n^{2l}. Значит, совершенная раскраска вершин всего графа является периодической по четным вершинам в отрицательном направлении, причем длина периода не превосходит $(n^{2l})!$.

Предложение 6. *Если в совершенной раскраске имеется бинарная n-диагональ, $n \geqslant 6$, то цвета этой диагонали эквивалентны.*

Доказательство. Справедливость предложения достаточно показать для диагонали длины 6, так как любая диагональ длины $n \geqslant 6$ содержит бинарную поддиагональ длины 6. В этой 6-диагонали число вершин цвета x равно 3. Пусть для некоторого цвета z в матрице совершенной раскраски $m_{xz} \neq 0$. Ясно, что в этом случае $m_{yz} \neq 0$. Рассмотрим множество вершин, смежных с вершинами 6-диагонали. Число этих вершин равно 14, причем среди них имеется $3m_{xz} + C_1$, где $0 \leqslant C_1 \leqslant 2$, вершин цвета z. Ясно, что это число равно числу $3m_{yz} + C_2$, где $0 \leqslant C_2 \leqslant 2$. Таким образом,

$$3m_{xz} + C_1 = 3m_{yz} + C_2,$$

т. е.

$$3(m_{xz} - m_{yz}) = C_2 - C_1,$$

причем $-2 \leqslant C_2 - C_1 \leqslant 2$. Это возможно только тогда, когда $m_{xz} = m_{yz}$, $C_2 = C_1$.

Предложение 7. *Пусть совершенная раскраска является непериодической по четным вершинам в отрицательном направлении. Тогда в четной группе цветов встречаются эквивалентные цвета и сколь угодно длинные парные бинарные диагонали в положительном направлении.*

Доказательство. Проведем операцию нечетной редукции. Эта операция не изменяет цвета четных вершин и, следовательно, не влияет на периодичность по четным вершинам. Поэтому можно рассматривать совершенную раскраску, полученную нечетной редукцией вместо исходной раскраски.

Из предложения 5 следует, что существуют одинаковые парные сколь угодно длинные четные двойные слова в положительном направлении, которые продолжаются по-разному. Возьмем какое-нибудь n (причем его можно выбрать сколь угодно большим) и пусть $E^+_{n+1}(i,j)$ и $E^+_{n+1}(i+k,j+k)$ — такие слова длины $n+1$. Докажем, что продолжения этих двойных слов содержат бинарные диагонали длины n. (На рис. 4 такое двойное слово помечено буквой v.)

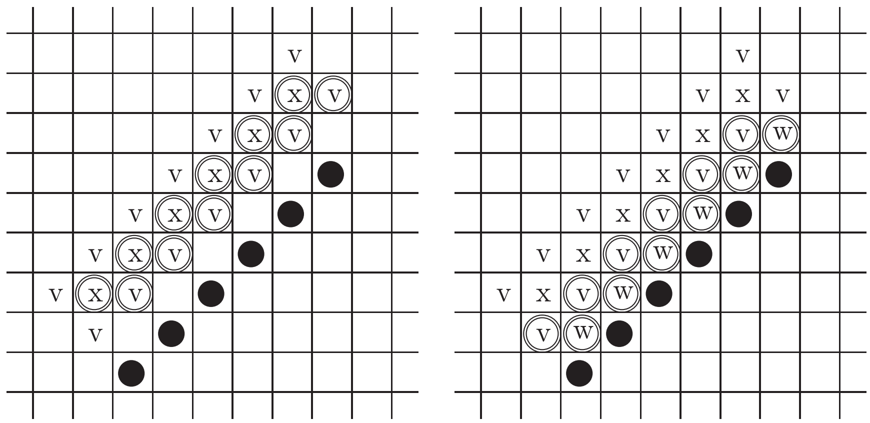

Рис.4 *Рис.5*

Рассмотрим нечетные вершины, содержащиеся внутри каждого из одинаковых четных двойных слов, т. е. диагонали $D^+_n(i,j+1)$ и $D^+_n(i+k,j-k+1)$ (на рис. 4 они помечены буквой x). Цвета соответствующих нечетных вершин в этих нечетных диагоналях будут совпадать, так как эти цвета являются эквивалентными и в результате нечетной редукции объединяются в один цвет. Таким образом, имеются два одинаковых двойных диагональных слова $DD^+_n(i,j+1)$ и $DD^+_n(i+k,j-k+1)$ (на рис. 4 они обведены кружком), у которых продолжения $r^+_n(i,j+1)$ и $r^+_n(i+k,j-k+1)$ по предложению 4 либо одинаковые, либо являются бинарными диагоналями, конечными или бесконечными (на рис. 5 эти продолжения обозначены буквой w). Второй случай невозможен, так как по предложению 6 цвета бинарных диагоналей будут эквивалентными и в результате нечетной редукции объединятся в один цвет. Таким образом, снова имеются два одинаковых двойных диагональных слова $DD^+_n(i,j)$ и $DD^+_n(i+k,j-k)$ (на рис. 5 они обведены кружком), у которых продолжения $r^+_n(i,j)$ и $r^+_n(i+k,j-k)$ по предложению 4 либо одинаковые, либо являются бинарными диагоналями, конечными или бесконечными (на рис. 5 эти продолжения помечены черным кружком). Так как по построению эти продолжения являются продолжениями исходных четных двойных слов и потому различны, то они являются бинарными диагоналями длины n. Предложение доказано.

Отметим, что из этого предложения следует периодичность по четным вершинам совершенной раскраски, получаемой четной редукцией, и, аналогично, периодичность по нечетным вершинам совершенной раскраски, получаемой нечетной редукцией.

Предложение 8. *Если две раскраски, получаемые из исходной совершенной раскраски четной и нечетной редукциями, являются периодическими, то и исходная совершенная раскраска является периодической.*

Доказательство. Так как совершенная раскраска, получаемая из исходной совершенной раскраски четной редукцией, является периодической, а четная редукция не изменяет цвета нечетных вершин, то исходная совершенная раскраска периодическая по нечетным вершинам. Аналогично, периодичность совершенной раскраски, получаемой из исходной совершенной раскраски нечетной редукцией, влечет периодичность исходной совершенной раскраски по четным вершинам. Следовательно, исходная совершенная раскраска является периодической по четным и нечетным вершинам в отдельности. Очевидно, что тогда исходная совершенная раскраска будет периодической (в качестве периода можно взять, например, произведение периодов совершенных раскрасок, получаемых четной и нечетной редукциями).

Доказательство теоремы 1. По предложению 8 если совершенная раскраска является непериодической, то совершенная раскраска, полученная либо четной, либо нечетной редукцией, будет непериодической. Пусть совершенная раскраска, полученная нечетной редукцией (обозначим ее через φ_1), является непериодической. Построим такую совершенную раскраску с той же матрицей, чтобы φ_1 стала периодической, а нечетные вершины при этом не меняли цвет. После этого выполняем операцию, обратную операции нечетной редукции, т. е. возвращаемся на нечетных вершинах к исходным цветам. Затем в случае, когда совершенная раскраска, полученная четной редукцией, также непериодическая, проведем в ней те же действия. Таким образом, получим совершенную раскраску с той же матрицей, у которой совершенные раскраски, полученные четной и нечетной редукциями, являются периодическими. По предложению 8 полученная совершенная раскраска будет периодической.

Пусть φ_1 является непериодической в отрицательном направлении. По предложению 7 в четной группе цветов существуют сколь угодно длинные парные бинарные диагонали в положительном направлении, которые продолжают одинаковые двойные слова (это следует из доказательства предложения). Рассмотрим двойные слова $DD_n^+(i-1, j+1)$

и $DD_n^+(i+k-1, j-k+1)$ (на рис. 6 они обозначены буквой v) длины n, которая в четыре раза больше периода φ_1 по нечетным вершинам

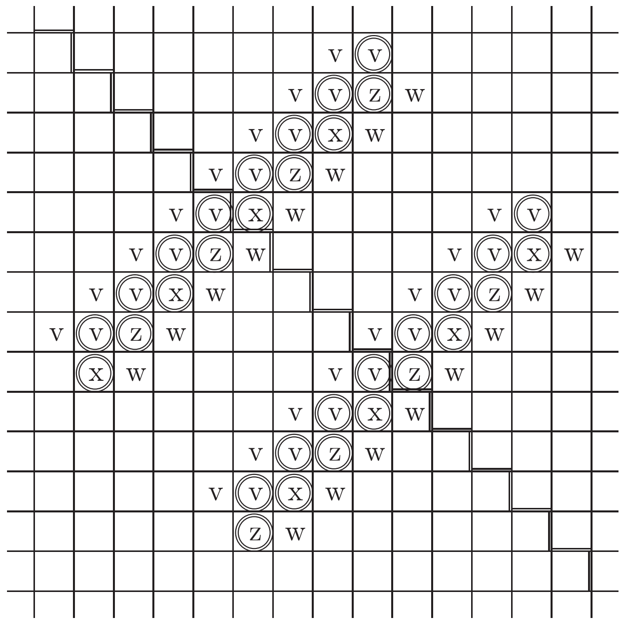

Рис.6

в отрицательном направлении и их продолжения бинарными диагоналями $B^+_{n,x,z}(i,j)$ и $B^+_{n,z,x}(i+k, j-k)$ (на рис. 6 эти продолжения обозначены буквами x и z). Рассмотрим новые парные двойные слова $DD_n^{*+}(i, j-1)$ и $DD_n^{*+}(i+k, j-k-1)$ (на рис. 6 они обведены кружками), их продолжения $r_n^{*+}(i, j-1)$ и $r_n^{*+}(i+k, j-k-1)$ будут либо одинаковыми, либо бинарными диагоналями (на рис. 6 эти продолжения обозначены буквой w). В силу периодичности по нечетным вершинам последнее невозможно. Значит, эти продолжения будут одинаковыми и можно рассматривать следующие двойные слова $DD_n^+(i,j)$ и $DD_n^+(i+k, j-k)$ (на рис. 7 они обведены кружками). Заметим также, что каждое из этих двойных слов состоит из двух одинаковых подслов, одно из которых находится под жирной ломаной линией на рис. 6 и 7, а другой над ней (в силу периодичности по нечетным вершинам и выбора длины исходных двойных слов). Продолжения этих парных слов $r_n^+(i,j)$ и $r_n^+(i+k, j-k)$ (на рис. 6 они обозначены буквой s) либо одинаковы, либо являются бинарными диагоналями, причем куски каждого из этих продолжений над жирной ломаной и под ней одинаковы.

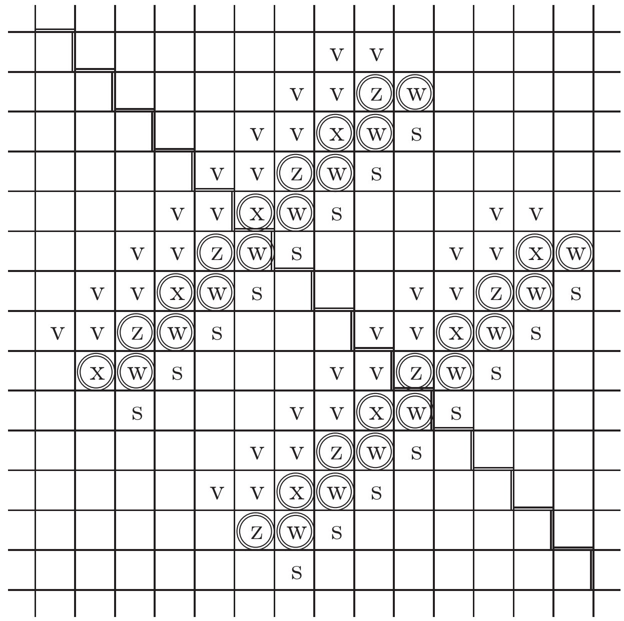

Рис.7

Далее рассуждаем аналогично, пока не доходим до второй бинарной диагонали (картинки сливаются). Продолжая процесс в обе стороны, получим бесконечную полосу, в которой можно рассмотреть два одинаковых бесконечных двойных диагональных слова в отрицательном направлении $DD^-(i+n-1, j+n-1)$ и $DD^-(i+\frac{n}{2}-1, j+\frac{n}{2}-1)$ (на рис. 8 они отмечены белыми кружками). Их продолжения $r^-(i+n-1, j+n-1)$ и $r^-(i+\frac{n}{2}-1, j+\frac{n}{2}-1)$ либо одинаковые, либо являются бесконечными бинарными диагоналями (на рис. 8 они отмечены черными кружками). В таком случае одну из диагоналей можно сдвинуть и продолжения станут одинаковыми. Далее рассматриваем диагональные одинаковые слова, наполовину состоящие из старых слов, наполовину — из их продолжений $DD^-(i+n-2, j+n-1)$ и $DD^-(i+\frac{n}{2}-2, j+\frac{n}{2}-1)$ и продолжения новых слов $r^-(i+n-2, j+n-1)$ и $r^-(i+\frac{n}{2}-2, j+\frac{n}{2}-1)$. Если они оказываются разными, т. е. бинарными диагоналями, то сдвигаем одну из них. Продолжая процесс, получим совершенную раскраску, периодическую (по построению) по четным вершинам в положительном направлении, причем длина периода не превосходит длины удвоенного периода четной редукции по нечетным вершинам.

Теперь в полученной раскраске (в силу периодичности в положительном направлении) все достаточно длинные бинарные диагонали (больше периода в положительном направлении) являются подсловами бесконечных бинарных диагоналей. Так как бесконечные бинарные диагонали можно сдвигать, то возьмем их так, чтобы все достаточно длинные одинаковые парные диагональные двойные слова продолжались одинаково. Полученная совершенная раскраска является периодической в отрицательном направлении. Значит, она периодическая.

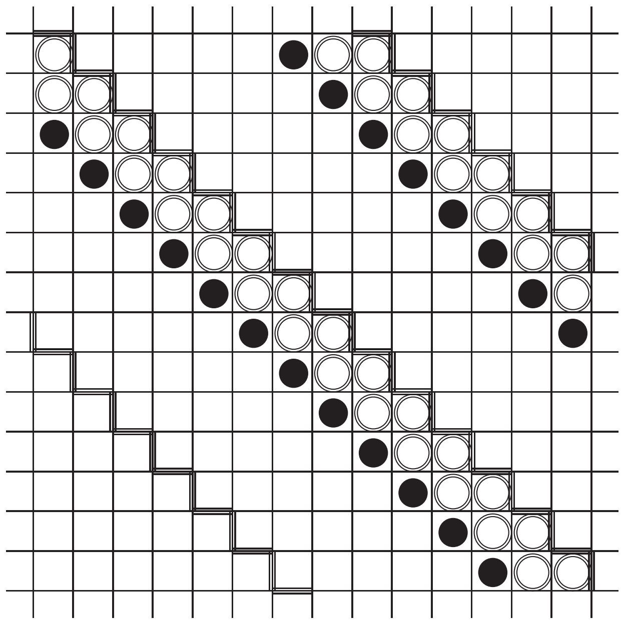

Рис.8

Теперь выполняем операцию, обратную нечетной редукции, т. е. на нечетных вершинах возвращаемся к старым цветам. Если совершенная раскраска непериодическая по нечетным вершинам, то выполняем точно такие же операции с нечетными вершинами, как описано выше для четных вершин. Так как при этом цвета четных вершин не меняются, то периодичность не нарушается. Таким образом, получена периодическая совершенная раскраска. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–16.
2. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
3. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Киев: Наукова думка, 1984. С. 121–138.

4. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268, N 1–3. P. 31–49.
5. **Camion P., Courteau B., Delsarte Ph.** On r-partition designs in Hamming spaces // Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 1992. V. 2. P. 147–162.
6. **Godsil C. D., Martin W. J.** Quotients of association schemes // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69, N 2. P. 185–199.
7. **Penrose R.** The role of aethetics in pure and applied mathematical research. // Bull. Inst. Math. Appl. 1974. V. 10. P. 266–271.
8. **Robinson R. M.** Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane // Inventiones Math. 1971. V. 12, N 3. P. 177–209.

Адрес автора:

Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск,
Россия
E-mail: sveta_nsu@ngs.ru

Статья поступила
23 июня 2003 г.