ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2004. Серия 1. Том 11, № 1, 93–102

УДК 519.172

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНЦИДЕНТОРНОГО (k, l)-ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА*)

А. В. Пяткин

Исследуется минимальное число цветов, достаточное для (k, l)-раскраски инциденторов любого мультиграфа степени Δ при разных значениях k и l. Доказано, что для мультиграфа степени Δ и $l = \lceil \Delta/2 \rceil$ это число не превосходит $\Delta + k$. Кроме того, для всякого нечетного Δ построена бесконечная серия мультиграфов степени Δ, (1,1)–хроматическое число которых больше $\Delta + 1$.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Через $\Delta(G)$ и $\sigma(G)$ обозначаются соответственно его максимальные степень и полустепень. Пусть $E' \subset E$. Подграф $G' = (V, E')$ называется 2–*фактором*, если $\Delta(G') \leqslant 2$. Отметим, что в отличие от традиционного определения 2–фактора, в этом определении не требуется однородности мультиграфа G'. 2–фактор $G' = (V, E')$ называется *линейным фактором*, если $\sigma(G') \leqslant 1$. Линейный фактор назовем *минимальным*, если каждая его компонента является (ориентированным) путем длины не более 2. Будем говорить, что подграф G' *покрывает* вершину $v \in V$, если ее степень в G' больше нуля.

Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00039 и 02-01-00977), Фонда содействия отечественной науке и молодёжного гранта СО РАН.

отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Для дуги $e = uv$ будем писать $f(e) = (a, b)$, если $f(u, e) = a$ и $f(v, e) = b$. Говорим, что цвет a *занят* или *использован* при вершине v если им окрашен хотя бы один инцидентор, примыкающий к этой вершине, и *свободен* при v в противном случае. Раскраска инциденторов называется *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (k, l)*-раскраской*, где $0 \leqslant k \leqslant l$, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[k, l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (k, l)*-хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$. В настоящее время об этом числе известно следующее:

(1) в случае $k = l = 0$ имеем обычную задачу реберной раскраски мультиграфов, и $\chi_{0,0}(G) = \chi'(G)$ — это реберное хроматическое число мультиграфа G;

(2) если $l \geqslant 1$, то $\chi_{0,l}(G) = \Delta(G)$ [3];

(3) $\chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G), \sigma(G) + k\}$ при любом k [1, 2, 5, 9];

(4) если $k \geqslant \Delta(G) - 1$, то $\chi_{k,k}(G) = \chi_{k,\infty}(G) = \sigma(G) + k$ [2];

(5) если $l \geqslant \Delta(G) - 1$, то $\chi_{k,l}(G) = \chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta, k + \sigma(G)\}$ [2].

Введем обозначение $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G) |\ G$ — мультиграф степени $\Delta\}$. Ясно, что $\chi_{k,l}(\Delta)$ есть минимальное число цветов, достаточное для (k, l)-раскраски инциденторов любого мультиграфа степени Δ. Об этом числе известно следующее:

($1'$) $\chi_{0,0}(\Delta) = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$ (формула Шеннона [7]);

($2'$) если $l \geqslant 1$, то $\chi_{0,l}(\Delta) = \Delta$ [3];

($3'$) $\chi_{k,\infty}(\Delta) = \Delta + k$ при любом k;

($4'$) если $k \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\chi_{k,k}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$ [6];

Формула ($3'$) легко следует из (3), а формула ($4'$) является некоторым аналогом формулы (4). Вопрос о том, верен ли аналог формулы (5), до сих пор оставался открытым. В настоящей статье доказано, что

($5'$) $\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$ при любом $l \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$.

В работе [2] была показана точность оценок (4) и (5), т. е. что при меньших значениях k или l равенство $\chi_{k,l}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$ может не выполняться. Однако доказать аналогичное утверждение для формул ($4'$) и ($5'$) не удается. Нетрудно показать выполнение нижней оценки $\chi_{k,l}(\Delta) \geqslant k + \Delta$ (достаточно рассмотреть мультиграф G с $\sigma(G) = \Delta(G)$). В работе [3] приведен пример мультиграфа степени 3 с (1,1)-хроматическим числом, равным 5. До сих пор это был единственный известный пример мультиграфа, (k, l)-хроматическое число которого превышает

$k+\Delta$. В настоящей статье этот пример обобщается для мультиграфов произвольной нечетной степени $\Delta \geqslant 3$, причем строится бесконечная серия мультиграфов с (1,1)-хроматическим числом, большим $\Delta+1$.

1. Верхние оценки для (k,l)–хроматического числа

В этом разделе доказывается следующая

Теорема 1. *При любом $k \geqslant 1$ и $l \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$ выполняется равенство $\chi_{k,l}(\Delta) = \Delta + k$.*

Ввиду очевидного неравенства

$$\chi_{k,l+1}(\Delta) \leqslant \chi_{k,l}(\Delta) \qquad (*)$$

достаточно доказать теорему лишь для случая $l = \lceil \Delta/2 \rceil$. Ее доказательства для четного и нечетного Δ существенно отличаются. Поэтому каждое из них оформлено в виде отдельной леммы. Но сначала нам потребуются некоторые результаты о разбиении мультиграфа на подграфы меньшей степени.

Утверждение 1. *Пусть $G = (V,E)$ — мультиграф четной степени $\Delta = 2t$, а числа $d_1,\ d_2,\ldots,d_m$ удовлетворяют равенству $d_1+d_2+\ldots+d_m = t$. Тогда множество ребер мультиграфа G можно разбить на m таких непересекающихся подмножеств $E_1,\ E_2,\ldots,E_m$, что степень мультиграфа $G_j = (V,E_j)$ не превосходит $2d_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m$.*

Доказательство. По теореме Петерсена [8] G разбивается на t непересекающихся 2-факторов. Объединив их в группы по d_j штук, получим требуемое разбиение. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *В любом ориентированном мультиграфе степени Δ существует минимальный линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ.*

Это утверждение, доказанное в [6], является следствием теоремы Визинга из работы [2], которая отличается от утверждения 2 лишь отсутствием требования минимальности линейного фактора.

Нам потребуются два вида раскрасок инциденторов дуг 2–фактора. Пусть цвета $a,\ b,\ c$ и d удовлетворяют условию $a<b<c<d$. Первая раскраска f строится так. Для каждого цикла (компоненты связности) 2-фактора зададим некоторое направление обхода и положим $f(e)=(a,b)$, если дуга e сонаправлена обходу, и $f(e)=(b,c)$ — в противном случае. Нетрудно убедиться, что f является (k,l)-раскраской инциденторов, где $k=\min\{b-a, c-b\}$ и $l=\max\{b-a, c-b\}$. Такую раскраску 2–фактора будем называть *канонической*. Ясно, что при канонической

раскраске линейного фактора достаточно лишь двух цветов. Для построения второй раскраски g выделим из 2-фактора минимальный линейный фактор F. Тогда оставшийся граф, очевидно, является паросочетанием. Положим $g(e) = (b, c)$, если в пути длины 2 из F дуга e является начальной, $g(e) = (a, b)$ для всех остальных дуг из F и $g(e) = (c, d)$ для всех дуг паросочетания. Такую раскраску 2-фактора будем называть *уравновешенной*. Это название оправдано тем, что в уравновешенной раскраске при каждой вершине занято не более одного цвета из множества $\{a, b\}$ и не более одного цвета из множества $\{c, d\}$. Ясно, что g является (k, l)-раскраской инциденторов, где $k = \min\{b - a, c - b, d - c\}$ и $l = \max\{b - a, c - b, d - c\}$.

Лемма 1. *При любых k и l, $l \geqslant k \geqslant 1$, выполняется равенство $\chi_{k,l}(2l) = 2l + k$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени $2l$. Рассмотрим два случая.

1. Если $l - k = 2t$ при некотором целом t, то по утверждению 1 мультиграф G разбивается на два графа степени $2t$ (обозначим их через G_1 и G_2) и k 2–факторов $F_1,\ F_2, \ldots, F_k$. Покажем, что $\chi_{k,l}(G_j) \leqslant l$ при $j = 1, 2$. Действительно, если $k \leqslant 2t$, то $\chi_{k,l}(G_j) \leqslant \chi_{k,2t}(2t) \leqslant 2t + k = l$ по формуле (5). В противном случае, $\chi_{k,l}(G_j) \leqslant \chi_{k,k}(2t) \leqslant 2t + k = l$ по формуле (4). Рассмотрим (k, l)–раскраску графов G_1 и G_2 цветами из интервалов $[1, l]$ и $[l+k+1, 2l+k]$ соответственно. Для каждой вершины $v \in V$ обозначим через $a_1^v < a_2^v < \ldots < a_k^v$ и $b_1^v < b_2^v < \ldots < b_k^v$ свободные при v цвета из этих интервалов. Нетрудно видеть, что $i \leqslant a_i^v \leqslant l - k + i$ и $l + k + i \leqslant b_i^v \leqslant 2l + i$ для всех $i = 1,\ 2, \ldots, k$ и $v \in V$. Для каждого $i = 1,\ 2, \ldots, k$ 2–фактор F_i раскрасим канонически цветами $x_i,\ l + i,\ y_i$ и при каждой вершине v положим $x_i = a_i^v$ и $y_i = b_i^v$ (если эти цвета были использованы при вершине v). Так как $l + i - x_i \in [k, l]$ и $y_i - l - i \in [k, l]$, то имеем (k, l)–раскраску инциденторов в $2l + k$ цветов.

2. Если $l - k = 2t + 1$ при некотором целом t, то по утверждению 1 мультиграф G разбивается на два графа степени $2t$ (обозначим их через G_1 и G_2) и $k + 1$ 2-фактор $F_0,\ F_1, \ldots, F_k$. Аналогично предыдущему случаю $\chi_{k,l}(G_j) \leqslant \chi_{k,l}(2t) \leqslant 2t + k = l - 1$ для $j = 1, 2$. Рассмотрим (k, l)-раскраску графов G_1 и G_2 цветами из интервалов $[1, l - 1]$ и $[l + k + 2, 2l + k]$, соответственно. Для всякой вершины $v \in V$ обозначим через a_0^v и b_0^v минимальный и максимальный свободный при v цвет, соответственно. Ясно, что $a_0^v \in [1, l - k]$ и $b_0^v \in [l + 2k + 1, 2l + k]$. 2-фактор F_0 раскрасим уравновешенно цветами $x_0,\ l,\ l + k + 1,\ y_0$ и положим $x_0 = a_0^v$ и $y_0 = b_0^v$ для каждой вершины v. Из принципа Дирихле

и свойств уравновешенной раскраски следует, что при каждой вершине найдутся k свободных цветов из интервала $[1,l]$ и k свободных цветов из интервала $[l+k+1, 2l+k]$. Как и в предыдущем случае, обозначим эти цвета через $a_1^v < a_2^v < \ldots < a_k^v$ и $b_1^v < b_2^v < \ldots < b_k^v$ соответственно. Каждый 2–фактор F_i для $i = 1,\ 2, \ldots, k$ раскрасим цветами $x_i, l+i,\ y_i$ и положим $x_i = a_i^v$ и $y_i = b_i^v$ при каждой вершине v. Как и в случае 1, получим (k,l)-раскраску в $2l+k$ цветов. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При любых k и l, $l \geqslant k \geqslant 1$, выполняется равенство* $\chi_{k,l}(2l-1) = 2l+k-1$.

Доказательство. Пусть $G = (V,E)$ — мультиграф степени $2l-1$. По утверждению 2 в G есть минимальный линейный фактор G_1, покрывающий все вершины степени $2l-1$. Тогда степень оставшегося мультиграфа G_2 не превосходит $2l-2$. По лемме 1 имеем $\chi_{k,l-1}(G_2) \leqslant 2l+k-2$. Обозначим через g произвольную $(k,l-1)$–раскраску инцидентов мультиграфа G_2 в $2l+k-2$ цвета. Для каждого инцидентора i положим

$$f(i) = \begin{cases} g(i), & \text{если } g(i) \leqslant l-1; \\ g(i)+1, & \text{если } g(i) \geqslant l+k; \\ x_j, & \text{если } g(i) = l-1+j,\ j = 1,\ 2, \ldots, k. \end{cases}$$

Для того чтобы f была (k,l)-раскраской мультиграфа G_2, необходимо выполнение условия $x_j \in \{l+j-1, l+j\}$ для каждого j. Нашей задачей является (k,l)–раскрасить минимальный линейный фактор G_1 и заменить все x_j цветами из указанных множеств, не нарушая правильности раскраски.

Вершину v назовем *плохой*, если при ней присутствуют все цвета x_j, и ее степень в G_1 равна двум. Пусть плохой вершине v инцидентны входящая дуга e_1 и исходящая дуга e_2 графа G_1. Обозначим через a_v свободный при v цвет из множества $[1, l-1] \cup [l+k+1, 2l+k-1]$. Если $a_v \in [1, l-1]$, то $a_v + l > l$ и $a_v + k < l+k$. Следовательно, найдется цвет $b \in [a_v+k, a_v+l] \cap [l, l+k]$. Полагаем $f(e_2) = (a_v, b)$. В противном случае, $a_v - k > l$ и $a_v - l < l+k$, и для некоторого цвета $b \in [a_v-l, a_v-k] \cap [l, l+k]$ красим $f(e_1) = (b, a_v)$. Проделаем указанную процедуру для всех плохих вершин v и положим $f(e) = (l, k+l)$ для всех остальных дуг графа G_1. После такой раскраски при каждой вершине v выполняется одно из двух условий:

(а) при v помимо цветов x_j занят лишь один цвет α из интервала $[l, l+k]$;

(б) при v использованы цвета l и $l+k$, но отсутствует цвет x_s, где $s \in [1,k]$.

Действительно, условие (а) выполняется в плохих вершинах и в вершинах степени 1 2-фактора G_2, а условие (б) — в вершинах степени 2, не являющихся плохими.

Если вершина v удовлетворяет условию (а), то положим

$$x_j = \begin{cases} l+j-1, & \text{если } l+j \leqslant \alpha; \\ l+j, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Если вершина v удовлетворяет условию (б), то красим

$$x_j = \begin{cases} l+j, & \text{если } j < s; \\ l+j-1, & \text{если } j > s. \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Осуществив такую перекраску для всех вершин v, получим искомую (k,l)-раскраску в $2l+k-1$ цвет. Лемма 2 доказана.

2. Нижние оценки для $(1,1)$-хроматического числа

До настоящего времени был известен [3] лишь один пример мультиграфа степени 3, для которого очевидная нижняя оценка $\chi_{k,l}(G) \geqslant \Delta(G)+k$ не является точной. В данном разделе этот пример обобщается: для любой нечетной степени $\Delta \geqslant 3$ строится бесконечная серия мультиграфов, чьи (1,1)–хроматические числа больше $\Delta+1$.

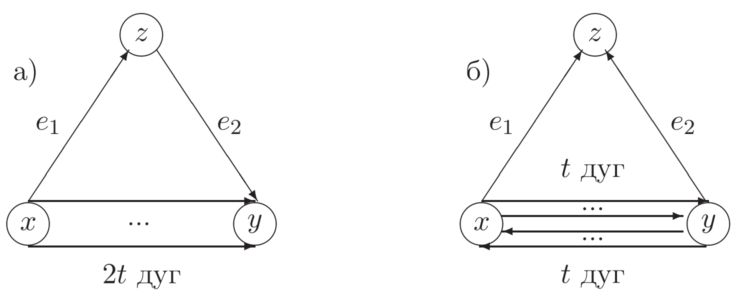

Рис. 1. Треугольники 1-го и 2-го типов

Для построения примеров нам потребуются два типа мультиграфов нечетной степени $\Delta = 2t+1$, которые мы назовем *треугольниками*. Треугольник *первого типа* содержит три вершины x, y и z, дуги $e_1 = xz$, $e_2 = zy$ и $\Delta - 1$ дугу xy (рис. 1а). Треугольник *второго типа* получается из треугольника первого типа обращением дуги zy и $\lfloor \Delta/2 \rfloor$ дуг xy. Формально, он содержит дуги $e_1 = xz$, $e_2 = yz$ и по $\lfloor \Delta/2 \rfloor$ дуг xy и yx (рис. 1б). Докажем несколько свойств (1,1)–раскрасок таких треугольников.

Лемма 3. *Пусть в некоторой $(1,1)$–раскраске f треугольника первого типа в $\Delta+1$ цвет инцидентор (z, e_2) окрашен цветом a. Тогда инцидентор (z, e_1) окрашен цветом $a+1$.*

Доказательство. Так как $f(y, e_2) = a + 1$, то при окраске конечных инциденторов дуг xy использованы все цвета из интервала $[2, \Delta+1]$ кроме $a+1$. Значит, в раскраске начальных инциденторов этих дуг заняты все цвета из интервала $[1, \Delta]$ кроме a. Следовательно, $f(x, e_1) = a$ и $f(z, e_1) = a + 1$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть в некоторой $(1,1)$–раскраске f треугольника второго типа в $\Delta+1$ цвет инцидентор (z, e_1) окрашен нечётным цветом $2a+1$, а инцидентор (z, e_2) — четным цветом $2b+2$. Тогда $a > b$.*

Доказательство. Допустим, что $a \leqslant b$. Имеем $f(x, e_1) = 2a$, $f(y, e_2) = 2b + 1$. В раскраске f при вершине x свободен ровно один цвет. Рассмотрим два случая.

1. При вершине x свободен четный цвет. Тогда все нечетные цвета $1,\ 3, \ldots, 2t + 1$ использованы при вершине x. С помощью индукции покажем, что все примыкающие к вершине x инциденторы, окрашенные этими цветами, являются начальными. Действительно, инцидентор цвета 1 может быть только начальным. Если инцидентор цвета $2j - 1$ при некотором $j \geqslant 1$ является начальным, то сопряженный к нему инцидентор при вершине y является конечным и имеет цвет $2j$. Но тогда цветом $2j + 1$ при вершине x не может быть раскрашен конечный инцидентор, так как цвет $2j$ при вершине y уже занят. Итак, все примыкающие к x инциденторы, окрашенные нечетными цветами, являются начальными. Но число таких цветов равно $t + 1$, а из $t + 1$ примыкающего к x начального инцидентора один уже раскрашен четным цветом $2a$. Пришли к противоречию.

2. При вершине x свободен нечетный цвет. Так как $a \leqslant b$, цвета $2b+2,\ 2b+4, \ldots, 2t+2$ использованы при вершине x для окраски инциденторов дуг, соединяющих x и y. Примыкающий к вершине x нцидентор, окрашенный цветом $2b + 2$, не может быть конечным, так как цветом $2b + 1$ при вершине y окрашен инцидентор (y, e_2). Следовательно, цветом $2b + 2$ при x окрашен начальный инцидентор. То же рассуждение, как и в предыдущем случае, показывает, что все примыкающие к x инциденторы, окрашенные цветами $2b+2,\ 2b+4, \ldots, 2t+2$, являются начальными. Однако начальный инцидентор не может быть окрашен цветом $\Delta + 1 = 2t + 2$, противоречие.

Следовательно, $a > b$. Лемма 4 доказана.

Замечание. Если в треугольнике второго типа поменять направление дуг xz и yz, то для полученного мультиграфа лемма 4 также будет верна (доказательство аналогично).

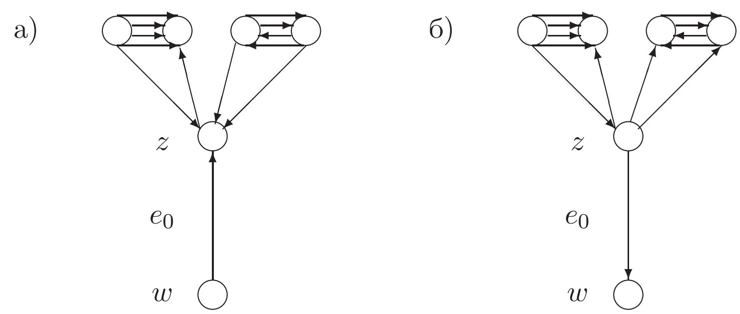

Рис. 2. Цветок и антицветок

Рассмотрим $t-1$ копию треугольника первого типа и один треугольник второго типа с общей вершиной z. К этому мультиграфу добавим вершину w и дугу $e_0 = wz$. Полученный мультиграф назовем *цветком*. Мультиграф, полученный из цветка сменой направления всех дуг, назовем *антицветком*. Цветок и антицветок для $\Delta = 5$ изображены на рис. 2а и 2б соответственно.

Лемма 5. *Для любой* $(1,1)$*-раскраски* f *цветка* (*антицветка*) *в* $\Delta+1$ *цвет выполняется условие* $f(w,e_0) \neq 1$ $(f(w,e_0) \neq \Delta+1)$.

Доказательство. Предположим, что в некоторой (1,1)-раскраске f цветка инцидентор (w,e_0) имеет цвет 1 (для антицветка доказательство аналогично). Тогда $f(z,e_0) = 2$ и по лемме 3 цвет 1 не может быть использован для раскраски остальных инциденторов, примыкающих к вершине z. Следовательно, для раскраски этих инциденторов использованы все цвета из множества $C = \{3,\ 4,\dots,2t+2\}$. Заметим, что множество C обладает следующими двумя свойствами: во-первых, в нем содержится одинаковое число четных и нечетных цветов, а во-вторых, наименьший цвет является нечетным. По лемме 3 для раскраски примыкающих к вершине z инциденторов дуг треугольников первого типа используется два идущих подряд цвета. Ясно, что удаление из C непересекающихся пар подряд идущих цветов не нарушает указанных свойств множества C. Следовательно, для раскраски примыкающих к вершине z инциденторов дуг треугольника второго типа использованы два цвета, меньший из которых является нечетным, а больший — четным. Но это противоречит лемме 4. Лемма 5 доказана.

Теперь мы можем построить бесконечную серию примеров мультиграфов, (1,1)-хроматическое число которых больше $\Delta + 1$. Для этого рассмотрим произвольное ориентированное дерево дерево T нечетной степени Δ, в котором каждая вершина имеет степень 1 или Δ. Далее заменим все висячие дуги такого дерева цветками и антицветками по следующему правилу. Пусть uv — висячая дуга дерева T, причем степень вершины u равна Δ. Заменим эту дугу цветком, отождествляя вершину u с w, а вершину v с z. Если же степень вершины v равна Δ, то дуга uv заменяется таким антицветком, так что вершина v отождествляется с w, а вершина u — с z. В результате получается однородный мультиграф нечетной степени Δ, который мы назовем *букетом*.

Теорема 2. *Для любого букета G выполняется неравенство $\chi_{1,1}(G) \geqslant \Delta + 2$.*

Доказательство. Пусть букет G построен из дерева T, в котором есть m вершин степени Δ. Множество таких вершин обозначим через M. Предположим от противного, что для G существует (1,1)–раскраска инциденторов в $\Delta + 1$ цвет. Тогда к каждой вершине из M примыкает хотя бы один инцидентор, окрашенный либо цветом 1, либо цветом $\Delta+1$. Поскольку $\Delta \geqslant 3$, ни одна дуга не может состоять сразу из двух инциденторов, окрашенных этими цветами. Так как в T содержится лишь $m - 1$ дуга, соединяющая вершины из M, то по крайней мере один из инциденторов, примыкающих к вершине из M и окрашенных цветом 1 или $\Delta + 1$, принадлежит дуге e_0 некоторого цветка или антицветка (эта дуга была висячей в T). Но поскольку начальный инцидентор не может быть окрашен цветом $\Delta + 1$, а конечный — цветом 1, то получаем противоречие с леммой 5. Теорема 2 доказана.

Замечание. Пример из [3] получается из теоремы 2, если в качестве дерева T взять звезду $K_{1,3}$, все дуги которой направлены к ее центру.

В заключение хотелось бы обратить внимание на ряд вопросов по (1,1)-раскраске, до сих пор остающихся нерешенными.

1) Существует ли мультиграф G четной степени Δ со свойством $\chi_{1,1}(G) \geqslant \Delta + 2$?

2) Любой букет не содержит совершенного паросочетания, поскольку в качестве множества Татта можно рассмотреть любую вершину из T, которой инцидентны не менее двух висячих дуг (определение множества Татта можно найти в [4]). Существует ли мультиграф G нечетной степени Δ с совершенным паросочетанием, обладающий свойством $\chi_{1,1}(G) \geqslant \Delta+2$?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.

2. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.

3. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.

4. **Дистель Р.** Теория графов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002.

5. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Новосибирск, 1999.

6. **Пяткин А. В.** Некоторые верхние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 66–78.

7. **К. Э. Шеннон** Теорема о раскраске ребер графа // Кибернетический сборник. Вып. 1. М: Мир, 1960. С. 249–253.

8. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

9. **Pyatkin A. V.** The incidentor coloring of multigraphs and its applications // Discrete Appl. Math. 2002. V. 120, N 1–3. P. 209–217.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
21 августа 2003 г.