ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2004. Серия 1. Том 11, № 2, 3–17

УДК 519.718

О СЛОЖНОСТИ НАДЕЖНЫХ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ОДНОТИПНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ*)

М. А. Алехина

В некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на выходах элементов и в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов для почти всех булевых функций построены схемы, асимптотически наилучшие по надежности, причем сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Введение

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [10]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, т. е. функциональный элемент E с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\bar{e}(\tilde{x})$. Эти же неисправности рассматривались затем в работах С. И. Ортюкова [11] и Д. Улига [14]. Речь идет о реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов в произвольном конечном базисе $B = \{f_1, ..., f_m\}$ [9, 12]. Множество всех функциональных элементов, реализующих функции из базиса B, будем также называть базисом B [9]. Каждому элементу E_i базиса приписано положительное число $v(E_i)$ – вес элемента E_i. Сложность схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов и обозначается через $L(S)$. Предполагается, что во всех элементах схемы независимым образом с вероятностью ε происходят сбои. Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a} = (a_1, ..., a_n)$. Пусть $P(S)$ – максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Величину $P(S)$ назовем *ненадежностью* схемы S. Вводится функция Шеннона $L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \ \min_S L(S)$,

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект 04.01.032) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00053).

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, ..., x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leqslant p$, а максимум – по всем булевым функциям от n переменных.

Пусть $\rho = \min v(E_i)/(n(E_i) - 1)$, где минимум берется по всем таким элементам E_i базиса , что $n(E_i) > 1$, а $n(E_i)$ – число существенных переменных функции e_i, реализуемой элементом E_i, $i = 1, 2, ..., m$. Для схем, реализующих булевы функции и состоящих только из надежных элементов (т. е. $\varepsilon = 0, p = 0$), О. Б. Лупанов [8] показал, что

$$L_{0,0}(n) \sim \rho 2^n/n.$$

Для построения надежных схем из ненадежных элементов Дж. Нейман в 1956 году предложил итерационный метод, позволяющий при некотором ограничении на ε с каждым шагом итерации уменьшать вероятность ошибки на выходе схемы, но на каждом шаге сложность схемы увеличивается примерно в 3 раза. Он нашел предельное значение $\eta = \eta(\varepsilon)$ для вероятности ошибки и показал, что любую булеву функцию можно реализовать схемой с вероятностью ошибки, сколь угодно близкой к предельному значению. Метод дает экспоненциальное увеличение сложности схемы (примерно в 3^k раз, где k – необходимое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Именно сложности надежных схем уделялось главное внимание в работах следующих авторов. Задача синтеза схем наилучших по надежности ими не рассматривалась.

С. И. Ортюков [11] получил следующий результат : если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $L_g \cdot q(\varepsilon) < p < 1/2$, где L_g – сложность минимальной схемы из надежных элементов в рассматриваемом базисе, реализующей функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, то существует такая функция $\rho(\varepsilon) \to \rho$ при $\varepsilon \to 0$, что

$$L_{p,\varepsilon}(n) \lesssim \rho(\varepsilon) 2^n/n.$$

Для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки не более ε Д. Улиг [13] показал, что для любых c, b (c, $b > 0$) существует такое ε', $\varepsilon' \in (0, 1/2)$, что при любых ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ и $\delta \geq (1+b)\varepsilon L_g$ справедливо соотношение

$$L_{\delta,\varepsilon}(n) \lesssim (1 + c)\rho 2^n/n.$$

Таким образом, асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к единице; при этом вероятность сбоя ε ограничена константой.

Упомянутые авторы для булевых функций в классе инверсных неисправностей решали задачу синтеза схем, правильно функционирующих с заданной вероятностью (надежностью). С. И. Ортюков и Д. Улиг нашли методы синтеза схем, оптимальных по сложности и с заданным уровнем надежности. Задача на максимум надежности схем не ставилась.

В настоящей статье рассматривается реализация булевых функций схемами в некоторых базисах, функционирующими с асимптотически наилучшей надежностью, при однотипных константных неисправностях на входах или на выходах элементов. Показано, что в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях для почти всех булевых функций можно строить схемы, асимптотически наилучшие по надежности, причем их сложность по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Введем необходимые понятия и определения.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в конечном базисе B [9, 12]. Схема реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы произвольного набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ (при отсутствии в ней неисправностей) на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Предполагается, что все элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, т. е. неисправности могут возникать в любом элементе схемы независимо от состояний других элементов, причем вероятности ошибок на различных наборах, вообще говоря, различны.

Считается, что базисные элементы подвержены однотипным константным неисправностям на их входах (выходах). Определим эти неисправности.

Если неисправность элемента такова, что поступающий на его вход нуль не искажается, а единица с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$) может перейти в нуль, будем называть ее неисправностью типа 0 на входе элемента. Если же неисправность элемента такова, что поступающая на его вход единица не искажается, а нуль с вероятностью γ может превратиться в единицу, будем называть ее неисправностью типа 1 на входе элемента.

Если неисправность такова, что элемент (реалиующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$), реализует константу 0, будем называть ее неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, эту неисправность будем называть неисправностью типа 1 на выходе элемента.

Ненадежность $P(S)$ схемы S, реализующей $f(\tilde{x})$, для указанных неис-

правностей определяется так же, как для инверсных неисправностей, т. е.

$$P(S) = \max_{\tilde{a}} P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a}),$$

где $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S при входном (произвольном) наборе $\tilde{a}$. Надежность схемы равна $1-P(S)$.

Пусть $P(f) = \inf P(S)$, где S — схема из ненадежных элементов, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически наилучшей (асимптотически оптимальной) по сложности,* если $P(A) \sim P(f)$ при $\gamma \to 0$.

Будем считать, что веса всех элементов равны единице. Тогда сложность $L(S)$ схемы S есть число функциональных элементов в ней.

В работе будет доказано, что для некоторых базисов при однотипных константных неисправностях любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant a\gamma + b\gamma^2$ [1, 3], причем для почти всех функций эти схемы являются асимптотически наилучшими по надежности, поскольку $P(S) \geq a\gamma - c\gamma^2$ ($\gamma \leqslant 1/600k$) [6, 7]. Сложность таких схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов: $L(S) \lesssim d \cdot 2^n/n$, (константы a, b, c, d, k – положительны и зависят только от базиса и типа неисправностей).

Во всех дальнейших рассуждениях базис $x|y$ ($x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$) будет играть основополагающую роль, а именно, все другие рассматриваемые базисы при синтезе схем более высокой надежности будут редуцироваться именно к нему. При этом при синтезе схем с рассматриваемыми свойствами особое место будет отведено двум операциям над схемами (одна из них по существу введена в работе [3], а другая использует схему G, реализующую функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$). Выбор схемы G обусловлен базисом и типом неисправностей, пока же важно только то, что схема G реализует функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)$.

Операция φ по произвольной схеме S, реализующей булеву функцию f, строит схему $\varphi(S)$, представленную на рис. 1 (через S_h обозначена схема, реализующая функцию $x|y$). Результат n-кратного применения операции φ к схеме S будем обозначать через $\varphi^n(S)$. Операция ψ по произвольной схеме S, реализующей булеву функцию f, строит схему $\psi(S)$ (она приведена на рис. 2). Результат n-кратного применения операции ψ к схеме S будем обозначать через $\psi^n(S)$.

Очевидно, что в результате применения (возможно, не однократного) операций φ и ψ к схеме S, реализующей булеву функцию f, получаются схемы, реализующие ту же функцию f. Кроме того, применение

этих операций к некоторым схемам S (при некоторых условиях на $P(S)$) приводит к схемам, имеющим более высокую надежность, чем исходная схема S.

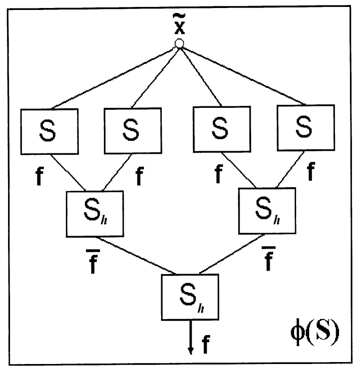

Рис. 1

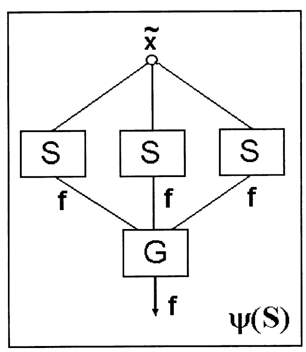

Рис. 2

В работе [3] для базиса B, состоящего из одного элемента $x|y$ и функционирующего с вероятностями ошибок $P_0(00) = \alpha,\ P_0(01) = \beta,\ P_0(10) = \delta,\ P_1(11) = \tau$ $(\alpha, \beta, \delta, \tau < 1/2)$, доказана

Теорема 1. *Пусть произвольная булева функция f реализуется схемой S с ненадежностью $P(S)$. Тогда схема $\varphi(S)$, реализующая функцию f, обладает следующими свойствами*:

$$L(\varphi(S)) = 4L(S) + 3 \lesssim 4L(S),$$
$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S),$$
$$\alpha + (\tau + 2P(S))(\beta + \delta + \tau + 2P(S))\}. \quad (1)$$

В работе [5] доказаны лемма 1 и теорема 2.

Лемма 1. $P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(G)$.

Теорема 2. *В базисе $B = x|y$ при $\mu \leqslant 1/600$ ($\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$) любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой S такой, что $L(S) \lesssim 56 \cdot 2^n/n$ и $P(S) \leqslant 7\mu$.*

Замечание 1. Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждение теоремы 2 верно в базисе $B = x \downarrow y$ при $\mu \leqslant 1/600$, где μ – ненадежность базисного элемента.

§ 1. Неисправности типа 0 на выходах элементов в различных базисах

Пусть базисные элементы независимо друг от друга с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$) переходят в неисправные состояния.

Если неисправность такова, что элемент (реалиующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии реализует константу 0, будем называть ее неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, эту неисправность будем называть неисправностью типа 1 на выходе элемента.

1. Базис $\{x \vee y, \bar{x}\}$.

Моделируя формулу $\overline{x \vee y}$, построим схему, состоящую из двух элементов и реализующую функцию $x \downarrow y$ с ненадежностью $\mu \leqslant 2\gamma$.

По теореме 2, учитывая замечание 1, имеем

Следствие 1. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой A, что $L(A) \lesssim 112 \cdot 2^n/n$ и $P(A) \leqslant 14\gamma$.*

Асимптотически наилучшие по надежности схемы будем строить с использованием схемы S_h, которая реализует функцию $x|y$. Схему S_h построим из трех элементов, моделируя формулу $\bar{x} \vee \bar{y}$. Вероятности ошибок для этой схемы равны: $\alpha = \gamma + \gamma^2 - \gamma^3,\ \beta = \delta = 2\gamma - \gamma^2,\ \tau = 0$, т. е. $\mu = 2\gamma - \gamma^2$.

Пусть произвольная булева функция f реализуется схемой S. Тогда соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид:

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 2P^2(S), \gamma + \gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (2)$$

Теорема 3. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой B, что $L(B) \lesssim 448 \cdot 2^n/n$ и*

$P(B) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma$.

Доказательство. Возьмем схему A, удовлетворяющую условиям следствия 1. Построим по ней схему $\varphi(A)$. Тогда по теореме 1 имеем

$$L(\varphi(A)) \lesssim 4 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 448 \cdot 2^n/n.$$

Из (2) при $\gamma \leqslant 1/1200$ следует, что $P(\varphi(A)) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma$. Схема $\varphi(A)$ есть схема B. Теорема 3 доказана.

Лемма 2. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ функцию голосования*

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$$

можно реализовать такой схемой S_g, что $L(S_g) = 205$ и $P(S_g) \leqslant 2\gamma + 30\gamma^2$.

Доказательство. Моделируя формулу $\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x_1 \& x_2$. Используя две таких схемы и два дизъюнктора, моделируем формулу $x_1 \& (x_2 \vee x_3) \vee x_2 \& x_3$ и строим схему C. Она реализует функцию голосования g и состоит из десяти элементов. Очевидно, что $L(C) = 10$ и $P(C) \leqslant 10\gamma$.

По схеме C построим такую схему $\varphi(C)$ (см. теорему 1), что сложность $L(\varphi(C)) = 49$, а согласно (2) ненадежность при $\gamma \leqslant 1/1200$ удовлетворяет неравенству: $P(\varphi(C)) \leqslant 2\gamma + 282\gamma^2 \leqslant 2.235\gamma$.

По схеме $\varphi(C)$ построим схему $\varphi^2(C)$. Тогда по теореме 1 имеем $L(\varphi^2(C)) = 4L(\varphi(C)) + 9 = 205$. При $\gamma \leqslant 1/1200$ из (2) следует, что $P(\varphi^2(C)) \leqslant 2\gamma + 30\gamma^2$. Схема $\varphi^2(C)$ есть схема S_g. Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой H, что $L(H) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n$ и $P(H) \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2$.*

Доказательство. Возьмем схему S, удовлетворяющую условиям следствия 1. Построим по ней схему $\psi(S)$, взяв в качестве схемы G схему S_g из леммы 2. Тогда $L(\psi(S)) \lesssim 3 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 336 \cdot 2^n/n$. По леммам 1 и 2 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем

$$P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(S_g) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 30\gamma^2 = 2\gamma + 618\gamma^2 \leqslant 2.52\gamma.$$

По схеме $\psi(S)$ построим схему $\varphi(\psi(S))$. Тогда

$$L(\varphi(\psi(S))) \lesssim 4 \cdot 336 \cdot 2^n/n = 1344 \cdot 2^n/n.$$

При $\gamma \leqslant 1/1200$ с использованием (2) получаем

$$P(\varphi(\psi(S))) \leqslant 2\gamma + 2\gamma^2 + 8\gamma 2.52\gamma + 2(2.52\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(S))$ есть схема H. Теорема 4 доказана.

Таким образом, в базисе $\{\vee, {}^{-}\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых при $\gamma \to 0$ асимптотически не превосходит 2γ, и для почти всех функций эта оценка ненадежности не улучшаема [6]. Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждения этого раздела справедливы в двойственном базисе $\{\&, {}^{-}\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

II. Базис $\{\sim, \vee, \oplus\}$.

Моделируя формулу $(x \vee y) \sim (x \oplus x)$, построим схему, состоящую из трех элементов и реализующую функцию $x \downarrow y$ с ненадежностью $\mu \leqslant 2\gamma$.

Из теоремы 2 и замечания 1 вытекает

Следствие 2. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* A, *что* $P(A) \leqslant 14\gamma$ *и* $L(A) \lesssim 168 \cdot 2^n/n$.

Асимптотически наилучшие по надежности схемы будем строить с использованием схемы D_h, которая реализует функцию $x|y$. Схему D_h построим из четырех элементов, моделируя формулу $(x \sim (x \oplus x)) \vee (y \sim (x \oplus x))$. Вероятности ошибок для этой схемы равны: $\alpha = \gamma + \gamma^2 - \gamma^3$, $\beta = \delta = 2\gamma - \gamma^2$, $\tau = 0$, т. е. $\mu = 2\gamma - \gamma^2$. Заметим, что схемы D_h и S_h из п. 1 имеют различные сложности, но равные вероятности ошибок на соответствующих наборах. Поэтому для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ в этом базисе также справедливо неравенство

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma + 2\gamma^2 + 8\gamma P(S) + 2P^2(S), \gamma + \gamma^2 + 8\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (2)$$

Теорема 5. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* B, *что*

$$P(B) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma \text{ и } L(B) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему S, удовлетворяющую условиям следствия 2. Построим по ней схему $\varphi(S)$. Тогда по теореме 1 имеем

$$L(\varphi(S)) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n.$$

Из (2) при $\gamma \leqslant 1/1200$ следует, что $P(\varphi(S)) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma$. Схема $\varphi(S)$ есть схема B. Теорема 5 доказана.

Лемма 3. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$

при $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать такой схемой* S_g, *что* $L(S_g) = 316$ *и* $P(S_g) \leqslant 2\gamma + 30\gamma^2$.

Доказательство. Поскольку $\bar{x} = (x \oplus x) \sim x$, инвертор можно реализовать со сложностью два и ненадежностью не более γ. Моделируя формулу $\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$, построим схему из семи элементов, реализующую функцию $x_1 \& x_2$ с ненадежностью не более 4γ. Используя две таких схемы и два дизъюнктора, моделируем формулу $x_1\&(x_2 \vee x_3) \vee x_2\&x_3$ и строим схему C. Она реализует функцию голосования g и состоит из шестнадцати элементов. Очевидно, что $L(C) = 16$ и $P(C) \leqslant 10\gamma$.

По схеме C построим схему $\varphi(C)$ (см. теорему 1) такую, что $L(\varphi(C)) = 76$, а согласно (2) ненадежность схемы $\varphi(C)$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ удовлетворяет неравенству $P(\varphi(C)) \leqslant 2\gamma + 282\gamma^2 \leqslant 2.235\gamma$. По схеме $\varphi(C)$ построим схему $\varphi^2(C)$. Тогда по теореме 1 имеем $L(\varphi^2(C)) = 4L(\varphi(C)) + 12 = 316$. При $\gamma \leqslant 1/1200$ из (2) следует, что $P(\varphi^2(C)) \leqslant 2\gamma + 30\gamma^2$. Схема $\varphi^2(C)$ есть схема S_g. Лемма 3 доказана.

Теорема 6. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* H, *что* $P(H) \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2$ *и* $L(H) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n$.

Доказательство. Возьмем схему S, удовлетворяющую условиям следствия 2. Построим по ней схему $\psi(S)$, выбрав в качестве схемы G схему S_g из леммы 3. Тогда $L(\psi(S)) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 1 и 3 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем

$$P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(S_g) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 30\gamma^2 = 2\gamma + 618\gamma^2 \leqslant 2.52\gamma.$$

По схеме $\psi(S)$ построим схему $\varphi(\psi(S))$. Тогда

$$L(\varphi(\psi(S))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n.$$

При $\gamma \leqslant 1/1200$ с использованием (2) получаем $P(\varphi(\psi(S))) \leqslant 2\gamma + 2\gamma^2 + 8\gamma 2.52\gamma + 2(2.52\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2$. Схема $\varphi(\psi(S))$ есть схема H. Теорема 6 доказана.

Таким образом, в базисе $\{\sim, \vee, \oplus\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых при $\gamma \to 0$ асимптотически не превосходит 2γ, и для почти всех функций эта оценка ненадежности не улучшаема [6]. Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждения этого раздела справедливы в двойственном базисе $\{\oplus, \&, \sim\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

III. Базис $\{\sim, \vee, 0\}$.

Моделируя формулу $(x \vee y) \sim 0$, построим схему, состоящую из трех элементов и реализующую функцию $x \downarrow y$ с ненадежностью $\mu \leqslant 2\gamma$.

По теореме 2, учитывая замечание 1, имеем

Следствие 3. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* A, *что* $P(A) \leqslant 14\gamma$ *и* $L(A) \lesssim 168 \cdot 2^n/n$.

Наилучшие по надежности схемы будем строить с использованием схемы S, которая реализует функцию $x|y$. Схему S построим из четырех элементов, моделируя формулу $(x \sim 0) \vee (y \sim 0)$. Вероятности ошибок для этой схемы равны вероятностям ошибок схемы D_h на соответствующих наборах. Поскольку сложности схем одинаковы, воспользуемся результатами п. 2.

Теорема 7. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* B, *что*

$$P(B) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma \text{ и } L(B) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Теорема 8. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* H, *что* $P(H) \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2$ *и* $L(H) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n$.

Таким образом, в базисе $\{\sim, \vee, 0\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых при $\gamma \to 0$ асимптотически не превосходит 2γ, и для почти всех функций эта оценка ненадежности не улучшаема [6]. Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждения этого раздела справедливы в двойственном базисе $\{\oplus, \&, 1\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

§ 2. Неисправности типа 0 на входах элементов

Пусть базисные элементы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния на входах, причем вероятность неисправности каждого входа равна γ $(\gamma < 1/2)$.

Если неисправность элемента такова, что поступающий на его вход нуль не искажается, а поступающая на его вход единица с вероятностью γ может превратиться в нуль, будем называть ее неисправностью типа 0 на входе элемента. Если же неисправность элемента такова, что поступающая на его вход единица не искажается, а нуль с вероятностью γ

может превратиться в единицу, будем называть ее неисправностью типа 1 на входе элемента.

I. Базис $\{x \vee y, \bar{x}\}$.

Моделируя формулу $\overline{x \vee y}$, построим схему из двух элементов, реализующую функцию $x \downarrow y$. Вероятности ошибок на выходе этой схемы равны: $P_0(00) = 0,\ P_1(01) = P_1(10) = 2\gamma - \gamma^2,\ P_1(11) = \gamma + \gamma^2 - \gamma^3$.

Известно [2], что вероятности ошибок для двойственных схем на противоположных входных наборах равны. Следовательно, равны ненадежности двойственных схем. Поэтому можно воспользоваться теоремами 1 и 2, считая, что имеем схему S_h, реализующую функцию $x|y$ (функция $x|y$ двойственна функции $\downarrow y$) с вероятностями ошибок $\tau = 0, \beta = \delta = 2\gamma - \gamma^2, \alpha = \gamma + \gamma^2 - \gamma^3$. Тогда $\mu = 2\gamma - \gamma^2$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид:

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma+2\gamma^2+8\gamma P(S)+2P^2(S), \gamma+\gamma^2+8\gamma P(S)+4P^2(S)\}. \quad (3)$$

По теореме 2, учитывая замечание 1, имеем

Следствие 4. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leqslant 14\gamma$ и $L(A) \lesssim 112 \cdot 2^n/n$.*

Теорема 9. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой B, что*

$$P(B) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma \text{ и } L(B) \lesssim 448 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A, удовлетворяющую условиям следствия 4. Применим к ней операцию φ. Тогда имеем $L(\varphi(A)) \lesssim 4 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 448 \cdot 2^n/n$. Из (3) следует, что $P(\varphi(A)) \leqslant 2\gamma + 506\gamma^2 \leqslant 2.5\gamma$. Схема $\varphi(A)$ есть схема B. Теорема 9 доказана.

Лемма 4. *Функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $\gamma \leqslant 1/1200$ можно реализовать такой схемой S_g, что $L(S_g) = 205$ и $P(S_g) \leqslant 2\gamma + 30\gamma^2$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 10. *При $\gamma \leqslant 1/1200$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой H, что $P(H) \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2$ и $L(H) \lesssim 1344 \cdot 2^n/n$.*

Доказательство. Возьмем схему A, удовлетворяющую условиям следствия 4. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему S_g из леммы 4. Тогда имеем $L(\psi(A)) \lesssim 3 \cdot 112 \cdot 2^n/n = 336 \cdot 2^n/n$. По

леммам 1 и 4 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем

$$P(\psi(A)) \leqslant 3P^2(S) + P(S_g) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 30\gamma^2 = 2\gamma + 618\gamma^2 \leqslant 2.52\gamma.$$

По схеме $\psi(A)$ построим схему $\varphi(\psi(A))$. Тогда

$$L(\varphi(\psi(A))) \lesssim 4 \cdot 336 \cdot 2^n/n = 1344 \cdot 2^n/n.$$

При $\gamma \leqslant 1/1200$ с использованием (3) получаем

$$P(\varphi(\psi(A))) \leqslant 2\gamma + 2\gamma^2 + 8\gamma 2.52\gamma + 2(2.52\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 34\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(A))$ есть схема H. Теорема 10 доказана.

Таким образом, в базисе $\{x \vee y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых при $\gamma \to 0$ асимптотически не превосходит 2γ, и для почти всех функций эта оценка ненадежности не улучшаема [7]. Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждения этого раздела справедливы в двойственном базисе $\{\&, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов.

II. Базис $\{\sim, \vee, 0\}$.

Моделируя формулу $x \sim 0$, построим схему I, реализующую инверсию $\bar{x}$ с вероятностями ошибок $p_0 = 0$, $p_1 = \gamma$, т. е. функционирующую также как функциональный элемент, который реализует инверсию, при неисправности типа 0 на входе. Используя результаты предыдущего пункта, теорему 2 и замечание 1, имеем

Следствие 5. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* A, *что* $P(A) \leqslant 14\gamma$ *и* $L(A) \lesssim 168 \cdot 2^n/n$.

Моделируя формулу $(x \sim 0) \vee (y \sim 0)$, построим схему из четырех элементов, реализующую функцию $x|y$. Вероятности ошибок для нее равны: $\alpha = \gamma^2, \beta = \gamma - \gamma^2 + \gamma^3 = \delta, \tau = 2\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3 - \gamma^4$. Тогда $\mu \leqslant 2\gamma$, а соотношение (1) для ненадежностей $P(S)$ и $P(\varphi(S))$ схем S и $\varphi(S)$ принимает вид:

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\gamma - \gamma^2 + 4\gamma P(S) + 2P^2(S), 9\gamma^2 + 12\gamma P(S) + 4P^2(S)\}. \quad (4)$$

Теорема 11. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* B, *что* $P(B) \leqslant 2\gamma + 447\gamma^2$

и $L(B) \lesssim 672 \cdot 2^n/n$.

Доказательство. Возьмем схему A, удовлетворяющую условиям следствию 5. Применим к ней операцию φ. Тогда имеем

$$L(\varphi(A)) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n.$$

Из (4) следует, что $P(\varphi(A)) \leqslant 2\gamma + 447\gamma^2$. Схема $\varphi(A)$ есть схема B. Теорема 11 доказана.

Лемма 5. *Функцию голосования* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ *при* $\gamma \leqslant 1/1200$ *можно реализовать такой схемой* S_g, *что* $L(S_g) = 316$ *и* $P(S_g) \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2$.

Доказательство. Моделируя формулу $\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$ (для реализации инверсии использована схема I сложности два и ненадежности $P(I) \leqslant \gamma$), построим схему из семи элементов, реализующую функцию $x_1\&x_2$ с ненадежностью не более 4γ. Используя две такие схемы и два дизъюнктора, моделируем формулу $x_1\&(x_2 \vee x_3) \vee x_2\&x_3$ и строим схему C. Она реализует функцию голосования g и состоит из шестнадцати элементов. Очевидно, что $L(C) = 16$ и $P(C) \leqslant 10\gamma$.

По схеме C построим схему $\varphi(C)$ (см. теорему 1) такую, что $L(\varphi(C)) = 76$, а согласно (4) ее ненадежность при $\gamma \leqslant 1/1200$ удовлетворяет неравенству: $P(\varphi(C)) \leqslant 2\gamma + 239\gamma^2 \leqslant 2.2\gamma$. По схеме $\varphi(C)$ построим схему $\varphi^2(C)$. Тогда по теореме 1 имеем $L(\varphi^2(C)) = 4L(\varphi(C)) + 12 = 316$. При $\gamma \leqslant 1/1200$ из (4) следует, что $P(\varphi^2(C)) \leqslant 2\gamma + 18\gamma^2$. Схема $\varphi^2(C))$ есть схема S_g. Лемма 5 доказана.

Теорема 12. *При* $\gamma \leqslant 1/1200$ *произвольную булеву функцию от* n *переменных можно реализовать такой схемой* H, *что*

$$P(H) \leqslant 2\gamma + 22\gamma^2 \text{ и } L(H) \lesssim 2016 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему A, удовлетворяющую условиям следствия 5. Применим к ней операцию ψ, выбрав в качестве схемы G схему S_g из леммы 5. Тогда $L(\psi(A)) \lesssim 3 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 504 \cdot 2^n/n$. По леммам 1 и 5 при $\gamma \leqslant 1/1200$ имеем

$$P(\psi(A)) \leqslant 3P^2(A_{30}) + P(A_{32}) \leqslant 3(14\gamma)^2 + 2\gamma + 17.5\gamma^2 = 2\gamma + 605.5\gamma^2 \leqslant 2.51\gamma.$$

К схеме $\psi(A)$ применим операцию φ. Тогда

$$L(\varphi(\psi(A))) \lesssim 4 \cdot 504 \cdot 2^n/n = 2016 \cdot 2^n/n,$$

и при $\gamma \leqslant 1/1200$ из (4) следует, что

$$P(\varphi(\psi(A))) \leqslant 2\gamma - \gamma^2 + 4\gamma 2.51\gamma + 2(2.51\gamma)^2 \leqslant 2\gamma + 22\gamma^2.$$

Схема $\varphi(\psi(A))$ есть схема H. Теорема 12 доказана.

Таким образом, в базисе $\{\sim, \vee, 0\}$ при неисправностях типа 0 на входах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых при $\gamma \to 0$ асимптотически не превосходит 2γ, и для почти всех функций эта оценка ненадежности не улучшаема [7]. Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [2], утверждения этого раздела справедливы в двойственном базисе $\{\oplus, \&, 1\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов.

В заключение автор благодарит профессора Н. П. Редькина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** Верхние оценки ненадежности схем в базисах из двухвходовых функционалных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы IV Молодежной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18 – 23 сентября 2000 г.). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2000. С. 12–20.
2. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара “Синтез и сложность управляющих систем” (Нижний Новгород, 20 – 25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 6–8.
3. **Алехина М. А.** О надежности схем из ненадежных элементов $x|y$ // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем"(Нижний Новгород, 20 – 25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 9–14.
4. **Алехина М. А.** Верхние оценки ненадежности схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Материалы VII Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2001 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 49–52.
5. **Алехина М. А.** Синтез и сложность надежных схем из ненадежных функциональных элементов. Вып. 11. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 2002. С. 193–218.
6. **Алехина М. А.** О надежности схем в базисах $\{x \vee y, \bar{x}\}, \{x \vee y, x \sim y, 0\}$, $\{x \vee y, x \sim y, x \oplus y\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. 2003. № 2. С. 44–50.

7. **Алехина М. А.** О надежности схем в базисах $\{x \vee y, \bar{x}\}, \{x \vee y, x \sim y, 0\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Труды Международного юбилейного симпозиума “Актуальные проблемы образования и науки”. Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2003. Т. 1. С. 13–17.
8. **Лупанов О. Б.** Об одном методе синтеза схем. // Изв. вузов, Радиофизика. 1958. Т. 1, № 1. С. 120–140.
9. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
10. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.
11. **Ортюков С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУб 1989. С. 166–168.
12. **Редькин Н. П.** Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
13. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT’87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verlag, 1987. P. 462-469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский государственный
университет,
ул. Красная, д. 40,
440026 г. Пенза,
Россия.
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
4 октября 2003 г.