ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2004. Серия 1. Том 11, № 2, 18–31

УДК 519.1

ФАКТОРНАЯ РАСКРАСКА РЕБЕР МУЛЬТИГРАФА

В. Г. Визинг

Вводится понятие k-факторной раскраски ребер мультиграфа, являющееся обобщением правильной раскраски ребер графа. При k-факторной раскраске требуется, чтобы каждой вершине было инцидентно не более k ребер, окрашенных одним и тем же цветом. Исследуется вопрос о минимальном числе цветов, необходимых для k-факторной раскраски всех ребер мультиграфа. Даются неулучшаемые верхние оценки при нечетных $k \geqslant 3$. Основные результаты справедливы и для раскраски в предписанные цвета.

1. Введение. Предварительные сведения

Не определяемые в статье понятия теории графов можно найти в [4–6]. Под мультиграфом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный неориентированный мультиграф без петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Графом называется обыкновенный граф т. е. мультиграф без кратных ребер. *Объединением мультиграфов* $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ с общим множеством вершин V называется мультиграф $G = (V, E)$, у которого $E = E_1 \bigcup E_2$. Если при этом $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$, то будем говорить, что G *разбивается* на мультиграфы G_1 и G_2. Аналогично определяются объединение нескольких мультиграфов и разбиение на несколько мультиграфов.

Через $d_G(v)$ будем обозначать степень вершины v мультиграфа G, а через $\Delta(G)$ — максимальную степень вершины. Если $\Delta(G) = \Delta$, то G называется мультиграфом степени Δ; G называется однородным мультиграфом степени Δ, если степени всех его вершин равны Δ.

Мультиграф $F = (V, E')$ называется *фактором* мультиграфа $G = (V, E)$ (порожденным множеством ребер E'), если $E' \subseteq E$; если при этом $\Delta(F) \leqslant k$, то F называется *k-фактором*; если F — однородный мультиграф степени k, то F называется *однородным k-фактором.*

Известна теорема Петерсена [19]: любой однородный мультиграф положительной четной степени имеет однородный 2-фактор. Отсюда легко следует

Утверждение 1. *Любой мультиграф четной степени $\Delta \geqslant 2$ разбивается на $\Delta/2$ (не обязательно однородных!) 2-факторов.*

Будем говорить, что k-фактор F *касается* вершины v, если $d_F(v) \geqslant 1$, и *насыщает* вершину v, если $d_F(v) = k$.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначается через $\mathbb{N}$. Раскраска некоторого множества ребер мультиграфа — это отображение этого множества ребер в $\mathbb{N}$. Раскраска ребер мультиграфа называется *k-факторной,* если фактор, порожденный ребрами одного цвета, является k-фактором мультиграфа. Наименьшее число цветов, необходимое для k-факторной раскраски всех ребер мультиграфа G, называется *k-факторным хроматическим индексом* мультиграфа G и обозначается через $\chi(k, G)$.

Наряду с традиционной задачей раскраски, начиная с работ [3, 9], в теории графов изучалась и раскраска в предписанные цвета [17]. В применении к задаче факторной раскраски ребер соответствующие определения выглядят так.

Предположим, что каждому ребру e мультиграфа $G = (V, E)$ сопоставлено некоторое подмножество $f(e) \subseteq \mathbb{N}$. Будем говорить, что f является *реберным предписанием* и что цвета $f(e)$ *предписаны* ребру e. Раскраска ребер в предписанные цвета — это такая раскраска, при которой каждое ребро e окрашивается в один из цветов множества $f(e)$. Наименьшее натуральное t такое, что при любом реберном предписании f, удовлетворяющем неравенству $|f(e)| \geqslant t$ для любого $e \in E$, существует k-факторная реберная раскраска в предписанные цвета всех ребер мультиграфа G, называется *списочным k-факторным хроматическим индексом* мультиграфа G и обозначается через $\chi_L(k, G)$.

Очевидно, что для любого мультиграфа G степени Δ справедливы неравенства:

$$\lceil \Delta/k \rceil \leqslant \chi(k, G) \leqslant \chi_L(k, G). \tag{1}$$

В работах [12–14] изучалась k-факторная раскраска ребер. Было установлено, что если G — двудольный мультиграф степени Δ, то при любом натуральном k справедливы равенства $\chi(k, G) = \chi_L(k, G) = \lceil \Delta/k \rceil$. Для мультиграфа произвольного вида было доказано

Утверждение 2. *Пусть $G = (V, E)$ —мультиграф степени Δ. Если k — натуральное четное число, то $\chi(k, G) = \chi_L(k, G) = \lceil \Delta/k \rceil$.*

Паросочетание является 1-фактором и 1-факторная раскраска ребер называется правильной раскраской. Проблеме правильной раскраски ребер посвящено много работ, обзор которых можно найти в [10, 15]. Мы

будем использовать некоторые факты, связанные с правильной раскраской ребер. Из известной теоремы Кенига [18] о том, что для двудольного графа G степени Δ выполняется равенство $\chi(1, G) = \Delta$, легко вытекает

Утверждение 3. *Пусть G — мультиграф степени Δ, в котором вершины степени Δ попарно не смежны. Тогда существует паросочетание, касающееся всех вершин степени Δ.*

В [11] доказано следующее

Утверждение 4. *Если G — двудольный мультиграф степени Δ, то $\chi_L(1, G) = \Delta$.*

В [8] доказано обобщение утверждения 4.

Утверждение 5. *Пусть $G = (V, E)$ — двудольный мультиграф, f — такое реберное предписание, что для любого ребра $e = (u, v)$ выполняется неравенство $|f(e)| \geqslant \max(d_G(u), d_G(v))$. Тогда существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа в предписанные цвета.*

Утверждение 6. *Пусть G — мультиграф степени Δ. Тогда*

$$\chi(1, G) \leqslant \lfloor (3/2)\Delta \rfloor, \tag{2}$$

$$\chi_L(1, G) \leqslant \lfloor (3/2)\Delta \rfloor. \tag{3}$$

Неравенство (2) — это теорема Шеннона [20]. Неравенство (3) доказано в [8]. Назовем мультиграфом Шеннона степени Δ мультиграф с вершинами v_1, v_2, v_3, в котором вершины v_1 и v_2, так же как и вершины v_2 и v_3, соединены пучком из $\lfloor \Delta/2 \rfloor$ ребер, а вершины v_1 и v_3 соединены пучком из $\lceil \Delta/2 \rceil$ ребер. Если S — мультиграф Шеннона степени Δ, то $\chi(1, S) = \lfloor (3/2)\Delta \rfloor$.

Утверждение 7 [1, 2]. *Если G — обыкновенный граф степени Δ, то $\chi(1, G) \leqslant \Delta + 1$.*

2. Верхние оценки k-факторного хроматического индекса при нечетных k

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф натуральной четной степени Δ, a и b — неотрицательные четные числа такие, что $a + b = \Delta$. Тогда G разбивается на два фактора, один из которых является мультиграфом степени a, а другой — степени b.*

Доказательство. В силу утверждения 1 мультиграф G разбивается на $(a/2 + b/2)$ 2-факторов. Объединив $a/2$ из них, получим мультиграф G' степени a; объединение остальных $b/2$ есть мультиграф G'' степени b. Мультиграф G является объединением мультиграфов G' и G'' без общих

ребер. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф четной степени Δ. Если k — нечетное число и $k \geqslant 3$, то*

$$\chi(k, G) \leqslant \chi_L(k, G) \leqslant \lceil 3\Delta/(3k-1)\rceil. \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\Delta = 0$. Пусть $\Delta > 0$. В силу неравенства (1) достаточно доказать, что $\chi_L(k, G) \leqslant \lceil 3\Delta/(3k-1)\rceil$. Представим степень Δ мультиграфа G в виде

$$\Delta = (3k-1)p + q, \tag{5}$$

где p и q — целые числа, $p \geqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant 3k-2$. Так как k — нечетное число, то q — четное и $q \leqslant 3k-3$. Пусть

$$T = \lceil 3\Delta/(3k-1)\rceil = 3p + \lceil 3q/(3k-1)\rceil. \tag{6}$$

Нужно доказать, что

$$\chi_L(k, G) \leqslant T. \tag{7}$$

Пусть f — произвольное реберное предписание, которое для любого $e \in E$ удовлетворяет условию $|f(e)| \geqslant T$. Выражение (5) перепишем в виде $\Delta = 3(k-1)p + q + 2p$. По лемме 1 мультиграф G является объединением таких мультиграфов $G' = (V, E')$ и $G'' = (V, E'')$ без общих ребер таких, что $\Delta(G') = 3(k-1)p + q$ и $\Delta(G'') = 2p$. Покажем, что

$$\chi_L(k-1, G') = T. \tag{8}$$

По утверждению 2 имеем

$$\chi_L(k-1, G') = \lceil \Delta(G')/(k-1)\rceil = 3p + \lceil q/(k-1)\rceil = 3p + \lceil 3q/(3k-3)\rceil. \tag{9}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при четном q, удовлетворяющим неравенствам $0 \leqslant q \leqslant 3k-3$, выполняется равенство

$$\lceil 3q/(3k-1)\rceil = \lceil 3q/(3k-3)\rceil. \tag{10}$$

Из (9), (10) и (6) имеем $\chi_L(k-1, G') = 3p + \lceil 3q/(3k-1)\rceil = T$, т. е. равенство (8) справедливо. А это означает, что существует $(k-1)$-факторная раскраска всех ребер мультиграфа G' в предписанные цвета. Построим такую раскраску.

Рассмотрим мультиграф G''. Так как $\Delta(G'') = 2p$, то в силу неравенства (3) (утверждение 6) имеем

$$\chi_L(1, G'') \leqslant 3p \leqslant T.$$

Следовательно, существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа G'' в предписанные цвета. Не изменяя раскраски ребер мультиграфа G', правильно раскрасим в предписанные цвета все ребра мультиграфа G''. В итоге получим k-факторную раскраску всех ребер мультиграфа G в предписанные цвета. Следовательно, неравенство (7) справедливо. Теорема 1 доказана.

Если S — мультиграф Шеннона четной степени Δ, то

$$\chi(k, S) = \lceil 3\Delta/(3k-1) \rceil$$

при любом нечетном k. Действительно, любой k-фактор мультиграфа S имеет не более двух вершин степени k. Поэтому он содержит не более $k + (k-1)/2 = (3k-1)/2$ ребер, которые могут быть окрашены одним цветом. Так как S имеет всего $3\Delta/2$ ребер, то

$$\chi(k, S) \geqslant (3\Delta/2)/((3k-1)/2) = 3\Delta/(3k-1).$$

Отсюда и из формулы (4), получаем равенство

$$\chi(k, S) = \chi_L(k, S) = \lceil 3\Delta/(3k-1) \rceil.$$

Таким образом, верхнюю оценку (4) улучшить нельзя, если, кроме степени мультиграфа, не использовать никакой другой информации о нем.

Для получения не улучшаемой верхней оценки факторного хроматического индекса в случае нечетного Δ нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть G — мультиграф степени $\Delta > 0$. Тогда G имеет 2-фактор, который касается всех вершин максимальной степени.*

Доказательство. Если Δ — четное число, то по утверждению 1 мультиграф G разбивается на $\Delta/2$ 2-факторов; каждый из них насыщает все вершины степени Δ. Следовательно, любой из указанных факторов касается всех вершин максимальной степени. Если Δ — нечетное число, то добавим ребра так, чтобы получился мультиграф четной степени $\Delta + 1$, каждая вершина которого имеет четную степень. Полученный мультиграф имеет 2-фактор, насыщающий все вершины степени $\Delta + 1$; удалив добавленные ребра, получим 2-фактор, касающийся всех вершин мультиграфа G степени Δ. Лемма 2 доказана.

Связный 3-вершинный граф с двумя ребрами будем называть *вилкой.* Каждая вилка имеет одну вершину степени 2, называемую *центром* вилки, и две вершины степени 1, называемые *концами* вилки. 2-фактор мультиграфа называется *вилочным,* если в нем каждая компонента связности является либо вилкой, либо ребром, либо изолированной

вершиной.

Лемма 3. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени $\Delta > 0$. Тогда G имеет вилочный фактор, который касается всех вершин максимальной степени и обладает тем свойством, что любые две вершины, являющиеся концами различных вилок, не смежны в G.*

Доказательство. Пусть F — 2-фактор с наименьшим числом ребер, который касается всех вершин степени Δ. Такой 2-фактор существует в силу леммы 2. Фактор F не имеет ни одного ребра, оба конца которого имеют в F степень 2. Действительно, такое ребро можно было бы удалить из F, получив 2-фактор с меньшим числом ребер, касающийся всех вершин степени Δ мультиграфа G. Таким образом, F является вилочным фактором. Пусть F имеет не менее двух вилок, и w_1, w_2 — произвольные две вилки, v' — конец вилки w_1, а v'' — конец вилки w_2. Покажем, что вершины v' и v'' не смежны в мультиграфе G. Действительно, в противном случае рассмотрим три ребра: ребро (v', v''), ребро вилки w_1, не инцидентное вершине v', и ребро вилки w_2, не инцидентное вершине v''. Заменив вилки w_1 и w_2 этими тремя ребрами, получим вилочный фактор с меньшим числом ребер, касающийся всех вершин мультиграфа G степени Δ, что невозможно. Таким образом, вилочный фактор F удовлетворяет требованиям леммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф нечетной степени Δ, a и b — такие натуральные нечетные числа, что $a + b = \Delta + 1$. Тогда G разбивается на два таких фактора F и H, что $\Delta(F) \leqslant a$, $\Delta(H) \leqslant b$, причем вершины степени a фактора F (если они есть) попарно не смежны в мультиграфе G.*

Доказательство. При $\Delta = 1$ утверждение очевидно. Будем считать, что $\Delta \geqslant 3$. Пусть W — вилочный фактор, обладающий свойствами, указанными в лемме 3. Удалив ребра фактора W, получим мультиграф G' с $\Delta(G') \leqslant \Delta - 1 = (a-1) + (b-1)$. В силу леммы 1 мультиграф G' разбивается на два таких мультиграфа F' и H', что $\Delta(F') \leqslant a-1$, $\Delta(H') \leqslant b-1$. Обозначим через U множество центров вилок фактора W (случай $U = \varnothing$ не исключается). Пусть U_1 — подмножество всех тех вершин из U, степени которых в мультиграфе F' не больше $a-2$, обозначим $U_2 = U \setminus U_1$. Из каждой вилки фактора W, центр которой принадлежит U_1, выберем по одному ребру и добавим к мультиграфу F'; получившийся мультиграф обозначим через F. Остальные ребра фактора W добавим к мультиграфу H'; получившийся мультиграф обозначим через H. Множество концов добавленных к F' ребер, не принадлежащих U_1, обозначим через

X. Вершины множества X имеют в F степень не больше a и по лемме 3 попарно не смежны в мультиграфе G. Степени остальных вершин мультиграфа F не больше $a-1$. Таким образом, мультиграф F удовлетворяет требованиям леммы. Осталось показать, что $\Delta(H) \leqslant b$. Если $v \notin U_2$, то при образовании мультиграфа H к мультиграфу H' добавлялось не более одного ребра фактора W, инцидентного вершине v. Так как $d_{H'}(v) \leqslant b-1$, то $d_H(v) \leqslant b$. Если же $v \in U_2$, то $d_{F'}(v) = a-1$, а так как в этом случае $d_{F'}(v) + d_{H'}(v) \leqslant a+b-3$, то $d_{H'}(v) \leqslant b-2$ и $d_H(v) = d_{H'}(v) + 2 \leqslant b$. Следовательно, степень любой вершины мультиграфа H не больше b. Лемма 4 доказана.

Пусть множество V вершин мультиграфа $G = (V, E)$ разбито на два непустых подмножества V_1 и V_2. *Разрезом* мультиграфа G называется двудольный фактор F, у которого V_1 и V_2 — множества вершин первой и второй долей соответственно и который содержит все ребра мультиграфа G, один конец которых принадлежит V_1, а другой — V_2. Разрез называется *максимальным,* если он имеет наибольшее число ребер среди всех разрезов мультиграфа G. Легко видеть, что если F — максимальный разрез мультиграфа G, то $d_F(v) \geqslant d_G(v)/2$ для любой вершины $v \in V$. (В противном случае вершину v можно было бы переместить в другую долю, получив разрез с большим числом ребер.)

Лемма 5. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф без изолированных вершин, $V' \subseteq V$ — некоторое подмножество попарно несмежных вершин, F — наибольший разрез мультиграфа G, определенный парой (V_1, V_2). Тогда существует подграф Q мультиграфа F с непустыми множествами вершин и ребер такой, что если w вершина Q, то $d_Q(w) \geqslant d_G(w)/2$, причем $d_Q(w) > d_G(w)/2$ если $w \in V'$.*

Доказательство. Так как мультиграф G не содержит изолированных вершин, то множество $V'' = V \setminus V'$ не пусто и так как $d_F(v) \geqslant d_G(v)/2 > 0$ для любой вершины v, фактор F не имеет изолированных вершин. Вершину $u \in V'$ фактора F назовем *плохой,* если $d_F(u) = d_G(u)/2$; каждое ребро фактора F, инцидентное плохой вершине, называется плохим. Обозначим через U множество плохих вершин фактора F, а через Q — подграф мультиграфа F, порожденный вершинами $V \setminus U$. Покажем, что мультиграф Q удовлетворяет требованиям леммы. Множество вершин мультиграфа Q не пусто, так как ему принадлежат все вершины множества V''. Далее, если вершина w мультиграфа Q принадлежит V', то w не была плохой в факторе F, а так как w не смежна ни с одной из плохих вершин (V' — множество попарно несмежных вершин), то $d_Q(w) = d_F(w) > d_G(w)/2$. Теперь покажем, что для

любой вершины $w \in V''$ выполняется неравенство $d_F(w) \geqslant d_G(w)/2$. Так как $d_G(w)/2 > 0$, тем самым будет доказана непустота множества ребер мультиграфа Q и доказательство леммы завершено. Итак, пусть $w \in V''$. Тогда, если вершина w в мультиграфе F инцидентна r плохим ребрам, то $d_F(w) \geqslant d_G(w)/2 + r$ (случай $r = 0$ не исключается). Действительно, пусть вопреки утверждению выполняется неравенство $d_F(w) < d_G(w)/2 + r$. Обозначим через U_w множество плохих вершин мультиграфа F, смежных с вершиной w. Все вершины множества U_w принадлежит одной и той же доле мультиграфа F, скажем, X_1. Рассмотрим разрез F_1 мультиграфа G, определяемый парой $(X_1 \setminus U_w, X_2 \cup U_w)$. Так как $d_F(u) = d_G(u)/2$ для любой вершины $u \in U_w$ и вершины из U_w попарно не смежны, то разрез F_1 имеет столько же ребер, что и разрез F. Поэтому F_1 — максимальный разрез мультиграфа G. Но степень вершины w в мультиграфе F_1 меньше $d_G(w)/2$, что невозможно. Следовательно, $d_F(w) \geqslant d_G(w)/2 + r$, а значит $d_Q(w) \geqslant d_G(w)/2$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $H = (V, E)$ — такой мультиграф, что $0 < \Delta(H) \leqslant 2p+1$, V' — некоторое подмножество попарно несмежных вершин мультиграфа H, степень каждой из которых не больше $2p$. Пусть каждому ребру, инцидентному вершинам из V', предписано не менее $3p$ цветов, а каждому из остальных ребер — не менее $3p+1$ цветов. Тогда существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа H в предписанные цвета.*

Доказательство. При $p = 0$ утверждение леммы очевидно, а при $V' = \varnothing$ она вытекает из утверждения 6. Поэтому будем считать, что $p \geqslant 1$ и $V' \neq \varnothing$. Пусть $V'' = V \setminus V'$ и f — реберное предписание, удовлетворяющее условиям леммы. Предположим, что лемма не верна и H имеет наименьшее число ребер среди всех мультиграфов, удовлетворяющих условиям леммы, для которых утверждение не верно. Можно, очевидно, считать, что H не имеет изолированных вершин. Рассмотрим максимальный разрез F мультиграфа H. По лемме 5 он имеет подграф Q, обладающий указанными в лемме свойствами. Удалим из H ребра подграфа Q; получившийся мультиграф обозначим через R. Если w — вершина мультиграфа Q, то $d_Q(w) \geqslant d_H(w)/2$ при $w \in V''$ и $d_Q(w) > d_H(w)/2$ при $w \in V'$. Так как $d_H(w) \leqslant 2p+1$ при $w \in V''$ и $d_H(w) \leqslant 2p$ при $w \in V'$, то для каждой вершины w мультиграфа Q верны следующие утверждения:

$$d_R(w) \leqslant p, \qquad \text{если } w \in V'', \tag{11}$$

$$d_R(w) \leqslant p-1, \qquad \text{если } w \in V'. \tag{12}$$

Мультиграф R содержит меньше ребер, чем мультиграф H. Поэто-

му все ребра мультиграфа R можно правильно раскрасить в предписанные цвета. После раскраски ребер мультиграфа R из множества цветов, предписанных каждому ребру мультиграфа Q, удалим те цвета, в которые окрашены смежные с ним ребра мультиграфа R. Получившееся новое реберное предписание для мультиграфа Q обозначим через g. Доказательство леммы будет завершено, если мы установим, что предписание g позволяет правильно раскрасить все ребра мультиграфа Q в предписанные цвета. Так как Q — двудольный мультиграф, то в силу утверждения 5 достаточно доказать, что для любого ребра $e = (w', w'')$ мультиграфа Q выполняется неравенство

$$|g(e)| \geqslant \max\{d_Q(w'), d_Q(w'')\}. \tag{13}$$

Но $|g(e)| \geqslant |f(e)| - d_R(w') - d_R(w'')$. Поэтому (13) следует из справедливости двух неравенств: $|f(e)| - d_R(w') - d_R(w'') \geqslant d_Q(w')$ и $|f(e)| - d_R(w') - d_R(w'') \geqslant d_Q(w'')$ или

$$|f(e)| - d_H(w') \geqslant d_R(w''). \tag{14}$$

$$|f(e)| - d_H(w'') \geqslant d_R(w'). \tag{15}$$

Итак, докажем неравенства (14) и (15). Поскольку вершины из множества V' попарно не смежны, то возможны только два случая: либо оба конца ребра e принадлежат V'', либо один конец принадлежит V', а другой — V''. В первом случае по условию $|f(e)| \geqslant 3p + 1$. А так как степень каждой вершины мультиграфа H не больше $2p+1$, то левые части неравенств (14) и (15) не меньше p, и оба неравенства справедливы в силу (11).

Рассмотрим теперь второй случай. Положим для определенности, что $w' \in V'$ и $w'' \in V''$. Тогда $|f(e)| \geqslant 3p$, $d_H(w') \leqslant 2p$, $d_H(w'') \leqslant 2p + 1$, и (14) следует из (11), а (15) из (12). Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф нечетной степени Δ, k — нечетное число, $k \geqslant 3$. Тогда*

$$\chi(k, G) \leqslant \chi_L(k, G) \leqslant \lceil (3\Delta - 1)/(3k - 1) \rceil. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\Delta = (3k - 1)p + q$, где p и q — целые неотрицательные числа, причем q — нечетное число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant q \leqslant 3k - 2$. Пусть

$$t = \lceil (3\Delta - 1)/(3k - 1) \rceil = 3p + \lceil (3q - 1)/(3k - 1) \rceil = 3p + r. \tag{17}$$

Очевидно, что $1 \leqslant r = \lceil (3q-1)/(3k-1) \rceil \leqslant 3$. Пусть f — такое реберное предписание, что $|f(e)| \geqslant t = 3p + r$ для любого ребра $e \in E$. Надо доказать, что существует k-факторная раскраска всех ребер мультиграфа G в предписанные цвета. Сначала покажем, что

$$\lceil (q-1)/(k-1) \rceil \leqslant r. \tag{18}$$

Из равенства $r = \lceil (3q-1)/(3k-1) \rceil$ вытекает, что $3q - 1 \leqslant (3k-1)r$, откуда $q - 1 \leqslant (k-1)r + (2r-2)/3$. Так как $q-1$ и $k-1$ — четные числа, а $(2r-2)/3 < 2$ при $r \leqslant 3$, то $q - 1 \leqslant (k-1)r$, откуда и следует (18).

Представим степень Δ в виде $\Delta = 3p(k-1)+q+2p$. По лемме 4 мультиграф G разбивается на два фактора F и H таких, что $\Delta(F) \leqslant 3p(k-1)+q$, а $\Delta(H) \leqslant 2p+1$. При этом, если V' — подмножество вершин мультиграфа F степени $3p(k-1)+q$, то (в случае $V' \neq \varnothing$) вершины множества V' попарно не смежны в мультиграфе G. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\Delta(F) = 3p(k-1) + q$, т. е. $V' = \varnothing$. В силу утверждения 2, неравенства (18) и равенства (16) имеем

$$\chi_L(k-1, F) = \lceil \Delta(F)/(k-1) \rceil = 3p + \lceil (q-1)/(k-1) \rceil \leqslant 3p + r = t.$$

Следовательно, существует $(k-1)$-факторная раскраска всех ребер мультиграфа F в предписанные цвета. После такой раскраски останутся неокрашенными только ребра мультиграфа H. Так как $\Delta(H) \leqslant 2p+1$ и $t = 2p+r \geqslant 3p+1$, то по утверждению 6 все ребра мультиграфа H можно правильно раскрасить в предписанные цвета. Раскрасив правильно все ребра мультиграфа H в предписанные цвета, мы получим k-факторную раскраску всех ребер мультиграфа G в предписанные цвета, что и доказывает справедливость неравенства (16).

Случай 2. $\Delta(F) = 3p(k-1) + q$, т. е. $V' \neq \varnothing$. Так как вершины множества V' попарно не смежны в F (так же как и в G), то по утверждению 3 существует паросочетание M в F, касающееся всех вершин множества V'. Обозначим через R мультиграф, в который превратится мультиграф F после удаления ребер паросочетания M. Так как $\Delta(R) = 3p(k-1) + q - 1$, то, как показано в случае 1,

$$\chi_L(k-1, R) \leqslant 3p + r = t.$$

Построим $(k-1)$-факторную раскраску всех ребер мультиграфа R в предписанные цвета. Затем все ребра паросочетания M раскрасим в предписанные цвета следующим образом. Пусть $e' = (v, v')$ — произвольное ребро паросочетания, где $v' \in V'$ и $v \in V \setminus V'$. Так как

$d_F(v) \leqslant 3p(k-1)+q-1$, то $d_R(v) \leqslant 3p(k-1)+q-2$. Но в силу (18) имеем $q-2 < r(k-1)$; поэтому $d_R(v) < 3p(k-1)+r(k-1) = t(k-1)$. Так как $|f(e')| \geqslant t$, существует такой цвет c, предписанный ребру e', который использован для окраски не более $k-2$ ребер мультиграфа F, инцидентных вершине v. Окрасим ребро e' в цвет c и удалим цвет c из предписаний для всех ребер мультиграфа H, инцидентных вершине v'. После раскраски всех ребер паросочетания M рассмотрим мультиграф H. Так как каждое ребро мультиграфа H может быть инцидентно не более одной вершине из V' (ибо вершины V' попарно не смежны в G), то ребрам мультиграфа H, инцидентным вершинам из V', предписано не менее $t-1 = 3p+r-1 \geqslant 3p$ цветов. Остальным ребрам предписано не менее $t = 3p+r \geqslant 3p+1$ цветов. По лемме 6 все ребра мультиграфа H можно правильно раскрасить в предписанные цвета. После правильной раскраски всех ребер мультиграфа H в предписанные цвета получим k-факторную раскраску всех ребер мультиграфа G в предписанные цвета. Теорема 2 доказана.

Оценка (16) также достигается на мультиграфе Шеннона. Действительно, пусть S — мультиграф Шеннона нечетной степени Δ, $k \geqslant 3$ — нечетное число. Мультиграф S имеет $(3\Delta-1)/2$ ребер, а любой его k-фактор — не больше $(3k-1)/2$ ребер. Поэтому

$$\chi(k,S) \geqslant ((3\Delta-1)/2)/((3k-1)/2) = (3\Delta-1)/(3k-1).$$

Следовательно, $\chi(k,S) \geqslant \lceil (3\Delta-1)/(3k-1) \rceil$. А так как справедливо неравенство (16), то $\chi(k,S) = \chi_L(k,S) = \lceil (3\Delta-1)/(3k-1) \rceil$.

3. Обыкновенные графы. Заключительные замечания

Теоремы предыдущего параграфа оценивают сверху списочный факторный хроматический индекс только через максимальную степень вершины мультиграфа. Естественно попытаться использовать другие особенности структуры мультиграфа. Обратимся, например, к обыкновенным графам. Непосредственным следствием неравенств (1) и утверждения 7 является

Теорема 3. *Пусть G — обыкновенный граф степени Δ; k — нечетное число, $k \geqslant 3$. Тогда*

$$\lceil \Delta/k \rceil \leqslant \chi(k,G) \leqslant \lceil (\Delta+1)/k \rceil. \tag{19}$$

Очевидно, что нижняя оценка для $\chi(k,G)$ в (19) достижима при любом Δ. Рассмотрим вопрос о достижимости верхней оценки. При Δ,

не кратном k, выполняются равенства $\lceil \Delta/k \rceil = \lceil (\Delta+1)/k \rceil = \chi(k,G)$, т. е. верхняя оценка достигается. При $\Delta = k$ верхняя оценка не достигается, так как в этом случае $\chi(k,G) = 1 = \lceil \Delta/k \rceil \neq \lceil (\Delta+1)/k \rceil$. Пусть теперь $\Delta = kr$, где r — натуральное число, $r \geqslant 2$. В этом случае верхняя оценка в (19) достигается. Действительно, пусть n — произвольное нечетное число, большее kr. Очевидно, что всегда можно построить n-вершинный граф H, имеющий не менее $(n\Delta-1)/2$ ребер. Покажем, что $\chi(k,H) = \lceil (\Delta+1)/k \rceil = \lceil \Delta/k \rceil + 1 = r+1$. Неравенство $\chi(k,H) \leqslant \lceil (\Delta+1)/k \rceil = r+1$ вытекает из теоремы 3. С другой стороны, так как n и k — нечетные числа, то в любом k-факторе графа H имеется не более $((n-1)k+k-1)/2 = (nk-1)/2$ ребер. Поэтому

$$\begin{aligned}\chi(k,H) \geqslant ((n\Delta-1)/2)/((nk-1)/2) &= (nkr-1)/(nk-1)\\ &= (nkr-r+r-1)/(nk-1) = r+(r-1)/(nk-1) > r.\end{aligned}$$

Следовательно, $\chi(k,H) = r+1 = \lceil (\Delta+1)/k \rceil$.

Таким образом, вопрос о достижимости нижней и верхней оценок в (19) ясен. Однако в случае обыкновенных графов автор не может привести не улучшаемой верхней оценки для $\chi_L(k,G)$.

Есть еще ряд невыясненных вопросов, касающихся k-факторной раскраски ребер при нечетных k. Мы не располагаем эффективным алгоритмом для отыскания (списочного) k-факторного хроматического индекса при $k \geqslant 3$. Такая же проблема, касающаяся правильной раскраски ребер, является NP-трудной [16].

Легко видеть, что верхние оценки (4) и (16) справедливы при $k=1$ и в этом случае совпадают с оценками (2) и (3). Более того, эти оценки достигаются на мультиграфах Шеннона. В статье [2] доказано, что если для мультиграфа G степени $\Delta \geqslant 4$ выполняется равенство $\chi(1,G) = \lfloor (3/2)\Delta \rfloor$, то в G в качестве подграфа обязательно содержится мультиграф Шеннона степени Δ. Однако для $\chi_L(k,G)$ аналогичное утверждение не доказано ни при одном нечетном k, включая $k=1$. Вместе с тем многие авторы [7, 17] предполагают, что $\chi_L(1,G) = \chi(1,G)$ для любого мультиграфа G. Это смелое предположение до сих пор не подтверждено и не опровергнуто. Аналогичное предположение можно высказать и по поводу факторной раскраски ребер. Пока неизвестны ответы на самые, казалось бы, простые вопросы. Например, пусть $k \geqslant 3$ — нечетное число, G — такой мультиграф, что $\chi(k,G) = 2$; верно ли, что $\chi_L(k,G) = 2$?

Автор благодарен рецензенту за информацию о работах [12–14].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. С. 25–30.
2. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфа // Кибернетика. 1965. № 3. С. 29–39.
3. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. Вып. 29. Новосибирск : Ин-т математики СО АН СССР, 1976. С. 3–10.
4. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, 1999.
5. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
6. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
7. **Alon N.** Restricted colorings of graphs // Surveys in combinatorics, 1973. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. P. 1–33. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 187.)
8. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colorings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. V. 71, N 2. P. 184–204.
9. **Erdos P., Rubin A. L., Taylor H.** Choosability in graphs // Congr. Num. 1980. V. XXVI. P. 125–157.
10. **Fiorini S., Wilson R. J.** Edge-colorings of graphs. London: Pitman, 1977.
11. **Galvin F.** The list chromatic index of a bipartite multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1995. V. 63, N 1. P. 153–158.
12. **Hilton A. I. W.** Coloring the edges of a multigraph so that each vertex has at most j, or at least j, edges of each color on it // J. London Math. Soc. 1975. V. 12, N 2. P. 123–128.
13. **Hilton A. I. W.** Some improper list coloring theorems // Congr. Num. 1996. V. 113. P. 171–178.
14. **Hilton A. I. W., Stirling D. C.,Slivnik T.** A vertex-splitting lemma, de Werra's theorem and improper list coloring // J. Combin. Theory. Ser. B. 1998. V. 72, N 1. P. 91–103.
15. **Hilton A. I. W., Wilson R. J.** Edge-colorings of graphs: a progress report // Graph theory and its applications: East and West. New York : New York Acad. Sci., 1989. P. 241–249. (Ann. New York Acad. Sci., V. 576).
16. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 718–720.
17. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Willey & Sons, 1995.

18. **Konig D.** Uber Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 453–465.

19. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen // Actas Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

20. **Shannon C.** A theorem on coloring the lines of a network // J. of Math. And Physics. 1949. V. 28. P. 148–151.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
1 декабря 2003 г.