ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 16–31

УДК 519.714

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Р. М. Колпаков

Изучаются классы конечных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей, замкнутые относительно дискретных преобразований (под дискретным преобразованием вероятностных распределений понимается вероятностное распределение случайной величины, значение которой однозначно определяется значениями конечного числа независимых случайных величин с исходными вероятностными распределениями). Даны явное описание всех таких замкнутых классов и явное описание замкнутых классов, получающихся посредством дискретных преобразований из конечных подмножеств таких классов.

Введение

В работе исследуются дискретные преобразования конечных вероятностных распределений с рациональными значениями вероятностей. Такие преобразования играют важную роль в вопросах реализации случайностей, имеющих большое значение для многих областей математической кибернетики (см. [1, 14]). Под преобразованием вероятностных распределений понимается вероятностное распределение некоторой случайной величины ζ_0, значение которой однозначно определяется значениями конечного числа независимых случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ с исходными вероятностными распределениями. Очевидным образом данное преобразование задается функцией $f : \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k \longrightarrow \Omega_0$, где Ω_i — множество значений случайной величины ζ_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. В работе рассматриваются случайные величины, принимающие конечное число значений. Не ограничивая общности, можно считать, что такая случайная величина принимает целые неотрицательные значения, а ее вероятностное распределение задается вектором, j-я компонента которого равна вероятности принятия этой случайной величиной значения $j-1$. Отметим, что этот вектор является *стохастическим*, т. е. все его компоненты неотрицательны и их сумма равна 1. Обозначим j-ю компоненту стохастического вектора $\mathcal{D}$ через $\mathcal{D}[j]$. Пусть $\Omega_i = \{0, 1, \ldots, h_i - 1\}$ и вероятностное распределение случайной величины ζ_i задается стохастическим вектором $\mathcal{D}_i$ размерности h_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Тогда через $\Omega(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)$ будем обозначать множество $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k = \{0, 1, \ldots, h_1 - 1\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, h_k - 1\}$. Для любого подмножества E этого множества обозначим через $\mathbf{P}_E(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)$ вероятность того, что набор $(\sigma_1; \ldots; \sigma_k)$ значений величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ содержится в E. Тогда[*)]

$$\mathbf{P}_E(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k) = \sum_{(\sigma_1; \ldots; \sigma_k) \in E} \mathcal{D}_1[\sigma_1 + 1] \cdot \ldots \cdot \mathcal{D}_k[\sigma_k + 1]. \qquad (1)$$

Через $\mathcal{N}_i(f)$ обозначим множество всех наборов из $\Omega(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)$, на которых функция f принимает значение i. Тогда компоненты вектора $\mathcal{D}_0$ можно определить следующим образом:

$$\mathcal{D}_0[j] = \mathbf{P}_{\mathcal{N}_{j-1}(f)}(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k), \quad 1 \leqslant j \leqslant h_0. \qquad (2)$$

Таким образом, вектор $\mathcal{D}_0$ однозначно определяется функцией f и векторами $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$. Этот вектор будем обозначать через $\mathbf{P}\{f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)\}$.

Пусть H — множество различных стохастических векторов. Стохастический вектор $\mathcal{D}$ *порождается* множеством H, если для некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ и некоторых $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ из H выполняется равенство $\mathcal{D} = \mathbf{P}\{f(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)\}$. Через $\langle H \rangle$ обозначается *замыкание* множества H, т. е. множество всех стохастических векторов, порождаемых множеством H. Очевидно, что $H \subseteq \langle H \rangle$. Множество H называется *замкнутым*, если $\langle H \rangle = H$. Будем говорить, что множество A стохастических векторов *порождается* множеством H, если $A \subseteq \langle H \rangle$. Для произвольного множества натуральных чисел T и натурального k через $T^{>k}$ обозначается множество всех чисел из T, больших k. Для любого натурального числа n обозначим через $\mathcal{I}(n)$ множество всех его простых делителей. Кроме того, в работе используются обозначения $\mathbb{N}$ для множества натуральных чисел, $\mathbb{Z}^+$ для множества целых неотрицательных чисел и $(x_1, \ldots, x_n)$ для наибольшего общего делителя чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Фундаментальное значение для исследований в этой области имеет задача описания замыканий произвольных множеств стохастических векторов. Принципиальная трудность этой задачи заключается в невозможности непосредственного описания таких множеств, поскольку мощность

[*)] В случае $E = \varnothing$ сумма (1) полагается равной 0.

множества всех стохастических векторов равна континууму. Поэтому естественным подходом к ее решению является рассмотрение замыканий подмножеств не более чем счетных закнутых классов стохастических векторов, всюду плотных на множестве всех стохастических векторов. Наиболее подходящим примером такого класса является множество всех стохастических векторов с рациональными компонентами. Это множество обозначаим через $\mathbf{SQ}$. Нетрудно заметить, что любой стохастический вектор, порождаемый векторами из $\mathbf{SQ}$, принадлежит $\mathbf{SQ}$. Следовательно, множество $\mathbf{SQ}$ является замкнутым. Для любого непустого множества Π различных простых чисел мы выделяем в $\mathbf{SQ}$ подмножество $G[\Pi]$ всех стохастических векторов, компоненты которых выражаются дробями со знаменателями, являющимися произведениями степеней чисел из Π:

$$G[\Pi] = \left\{ (d_1; \ldots; d_h) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{h} d_i = 1,\ d_i = \frac{m_i}{n},\ m_i \in \mathbb{Z}^+,\ i = 1, \ldots, h \\ n \in \mathbb{N},\ \mathcal{I}[n] \subseteq \Pi \end{array} \right\}.$$

Пользуясь формулами (2) и (1), легко можно убедиться, что множество $G[\Pi]$ является замкнутым.

В посвященной данному вопросу литературе наиболее изучен случай двумерных стохастических векторов (поскольку двумерный стохастический вектор однозначно определяется какой-либо одной из его компонент, в работах, в которых изучается порождение двумерных векторов, как правило, вместо векторов рассматриваются числа, являющиеся вторыми компонентами этих векторов). В [12, 13] установлено, что множества всех двумерных стохастических векторов из $G[\{2\}]$ и $G[\{3\}]$ порождаются векторами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ соответственно, и таким образом показано, что эти множества являются *конечно порожденными*, т. е. порождаются некоторыми своими конечными подмножествами. В [8, 11] эти результаты были обобщены на случай множества всех двумерных стохастических векторов из $G[\Pi]$ для произвольного Π. При этом была полностью изучена структура решетки, образуемой этими множествами. Аналогичные результаты для случая стохастических векторов произвольной размерности получены в [9, 10]. Некоторые аспекты приближенного порождения двумерных стохастических векторов рассматривались в [6, 13]. В [3] дано явное описание замыканий произвольных множеств в классе всех двумерных стохастических векторов из $\mathbf{SQ}$ и на основе этого описания определены все множества, замкнутые в данном классе. В [5] явно описаны замыкания всех конечных множеств векторов произвольной размерности из $\mathbf{SQ}$. В настоящей статье мы обобщаем этот результат на случай замыканий произвольных множеств векторов из **SQ**. Полученное описание этих замыканий позволяет для любого заданного стохастического вектора и любого заданного множества векторов из **SQ** эффективно определить, порождается ли данный вектор данным множеством. Кроме того, исходя из такого описания, мы определяем все замкнутые и все конечно порожденные замкнутые подмножества множества **SQ**. Мы также устанавливаем структуру решетки, образуемой этими подмножествами.

1. Вспомогательные определения и результаты

Стохастический вектор будем называть *вырожденным*, если он содержит компоненту, равную 1. Можно считать, что все вырожденные стохастические векторы порождаются пустым множеством и поэтому содержатся в замыкании любого множества чисел. Для любого невырожденного стохастического вектора $\mathcal{D}$ через $\mathcal{D}^+$ будем обозначать стохастический вектор, получающийся из $\mathcal{D}$ удалением всех нулевых компонент. Через M^+, где M — произвольное множество стохастических векторов, обозначается множество всех векторов $\mathcal{D}^+$ таких, что $\mathcal{D} \in M$. Отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 1. *Для любого множества M стохастических векторов выполняется равенство $\langle M \rangle = \langle M^+ \rangle$.*

Невырожденные стохастические векторы с ненулевыми компонентами будем называть *позитивными* векторами. Множество M стохастических векторов назовем *позитивно замкнутым*, если для любого невырожденного вектора $\mathcal{D}$ из M вектор $\mathcal{D}^+$ также содержится в M. Заметим, что невырожденный вектор $\mathcal{D}$ порождается множеством стохастических векторов тогда и только тогда, когда это множество порождает вектор $\mathcal{D}^+$. Поэтому справедливо

Утверждение 2. *Позитивно замкнутое множество M порождается множеством H стохастических векторов тогда и только тогда, когда H порождает любой позитивный вектор из M.*

Следуя стандартной терминологии, мы называем натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *попарно простыми*, если любые два числа взаимно просты. Множество чисел из $\mathbb{N}^{>1}$ будем называть *разделимым*, если оно содержит меньше двух чисел, либо все его числа попарно просты. Множество натуральных чисел будем называть *взаимно простым* с натуральным числом n, если любое число из этого множества взаимно просто с n. Пустое множество считается взаимно простым с любым натуральным числом.

Пусть A, B — непустые разделимые множества. Множество B называется *делителем* множества A, если для любого числа b из B множество A содержит число, кратное b. Пустое множество считается делителем любого разделимого множества. Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. *Разделимые множества A и B являются делителями друг друга тогда и только тогда, когда $A = B$.*

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — конечные разделимые множества. *Наибольшим общим делителем* $(A_1, \ldots, A_s)$ этих множеств называется множество $\{a \mid a = (a_1, a_2, \ldots, a_s) > 1, a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, s\}$, состоящее из наибольших общих делителей всевозможных выборок из s чисел по одному числу из каждого множества $A_1, \ldots, A_s$. Если хотя бы одно из множеств $A_1, \ldots, A_s$ является пустым, будем полагать $(A_1, \ldots, A_s) = \emptyset$. Отметим следующие очевидные свойства наибольшего общего делителя разделимых множеств.

Утверждение 4. *Наибольший общий делитель разделимых множеств является разделимым множеством, взаимно простым с любым из чисел, взаимно простых с хотя бы одним из этих множеств.*

Более того, нетрудно убедиться, что $(A_1, \ldots, A_s)$ является делителем каждого из множеств $A_1, \ldots, A_s$, и любой другой делитель каждого из этих множеств является делителем для $(A_1, \ldots, A_s)$. Таким образом, введенное нами понятие наибольшего общего делителя разделимых множеств является естественным обобщением понятия наибольшего общего делителя натуральных чисел.

Введем понятие наибольшего общего делителя для бесконечного числа конечных разделимых множеств. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — конечные разделимые множества. Тогда *наибольший общий делитель* $(A_1, A_2, \ldots)$ этих множеств определяется как множество

$$\{a \mid a > 1, a = (a_1, a_2, \ldots), a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots\},$$

состоящее из всех тех чисел из $\mathbb{N}^{>1}$, которые являются наибольшими общими делителями бесконечных выборок чисел из множеств $A_1, A_2, \ldots$ по одному числу от каждого из этих множеств. Если хотя бы одно из множеств $A_1, A_2, \ldots$ является пустым, мы полагаем $(A_1, A_2, \ldots) = \emptyset$. Аналогично утверждению 4 справедливо

Утверждение 5. *Наибольший общий делитель бесконечного числа разделимых множеств является конечным разделимым множеством, взаимно простым с любым из чисел, взаимно простых с хотя бы одним из* *этих множеств.*

Кроме того, множество $(A_1, A_2, \ldots)$ является делителем каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots$ и любое разделимое множество, являющееся делителем каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots$, является делителем множества $(A_1, A_2, \ldots)$. Таким образом, множество $(A_1, A_2, \ldots)$ является корректным обобщением понятия наибольшего общего делителя разделимых множеств на случай бесконечного числа множеств. В [3] доказано следующее свойство множества $(A_1, A_2, \ldots)$.

Лемма 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — бесконечная последовательность конечных разделимых множеств. Тогда для некоторого достаточно большого j справедливы равенства*

$$(A_1, A_2, \ldots) = (A_1, \ldots, A_j) = (A_1, \ldots, A_{j+1}) = (A_1, \ldots, A_{j+2}) = \ldots.$$

Если множество натуральных чисел A конечно, мы обозначаем через $\|A\|$ произведение всех чисел множества A. Для пустого множества мы полагаем $\|\varnothing\| = 1$.

В дальнейшем также используется следующий теоретико-числовой факт (см., например, [2]).

Лемма 2. *Система сравнений с одним неизвестным*

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \end{cases}$$

где m_1, m_2 — взаимно простые числа, является разрешимой и все ее решения образуют класс вычетов по модулю $m_1 m_2$.

2. Замкнутые классы в SQ

Пусть Π — произвольное непустое множество различных простых чисел, T — конечное разделимое множество натуральных чисел, взаимно простых с множеством Π. Обозначим через $G[\Pi; T]$ следующее подмножество множества $G[\Pi]$*):

$$\Big\{(d_1; \ldots; d_h) \mid . \ d_i = \frac{m_i}{n}, \ m_i \in \mathbb{Z}^+, \ i = 1, \ldots, h, \ \sum_{i=1}^{h} d_i = 1, \ n \in \mathbb{N},$$
$$\mathcal{I}[n] \subseteq \Pi, \ \exists T_1, \ldots, T_{h-1}, \ T \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_{h-1},$$

*) Рассматриваемые в данном определении подмножества $T_1 \ldots, T_{h-1}$ множества T могут быть несобственными.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{i} m_j \equiv 0 \pmod{\|T_i\|},\ i=1,\ldots,h-1,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} m_j \equiv n \pmod{\|T\setminus T_i\|},\ i=1,\ldots,h-1\end{array}\right\}.$$

В случае $T=\varnothing$ мы полагаем $G[\Pi;\emptyset]=G[\Pi]$. В [4] показано, что принадлежность стохастического вектора $(d_1;\ldots;d_h)$ множеству $G[\Pi;T]$ не зависит от выбора общего знаменателя его компонент, и тем самым обоснована корректность данного нами определения множества $G[\Pi;T]$. Кроме того, нетрудно заметить, что любое множество $G[\Pi;T]$ является бесконечным и позитивно замкнутым.

Лемма 3. *Для любых множеств* Π *и* T *множество* $G[\Pi;T]$ *является замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный стохастический вектор $\mathcal{D}=(d_1;\ldots;d_h)$ из $\langle G[\Pi;T]\rangle$. Пусть $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k$ — стохастические векторы из $G[\Pi;T]$ такие, что $\mathcal{D}=\mathbf{P}\left\{f\left(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k\right)\right\}$ для некоторой функции $f(x_1,\ldots,x_k)$. Обозначим через h_j размерность вектора $\mathcal{D}_j$, $j=1,\ldots,k$. Каждый стохастический вектор $\mathcal{D}_j$ может быть представлен в виде $\left(\frac{m_1^{(j)}}{n_j},\ldots,\frac{m_{h_j}^{(j)}}{n_j}\right)$, где $\mathcal{I}(n_i)\subseteq\Pi$, и существуют подмножества $T_1^{(j)}\supseteq T_2^{(j)}\supseteq\ldots\supseteq T_{h-1}^{(j)}$ множества T такие, что при любом i, $1\leqslant i\leqslant h-1$,

$$\sum_{s=1}^{i} m_s^{(j)} \equiv 0 \pmod{\|T_i^{(j)}\|},\quad \sum_{s=1}^{i} m_s^{(j)} \equiv n_j \pmod{\|T\setminus T_i^{(j)}\|}. \tag{3}$$

Положим $R=n_1\ldots n_k$ и для любого множества U наборов из $\Omega(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k)$ обозначим через $\mathcal{M}(U)$ число $R\cdot\mathbf{P}_U\left(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k\right)$. Из формулы (1) вытекает, что

$$\mathcal{M}(U)=\sum_{(\sigma_1;\ldots;\sigma_k)\in U} m^{(1)}_{(\sigma_1+1)}\ldots m^{(k)}_{(\sigma_k+1)}. \tag{4}$$

Таким образом, для любого U величина $\mathcal{M}(U)$ является целым числом, и согласно формулам (2) для каждого $i=1,\ldots,h$ имеем

$$d_i=\mathbf{P}_{\mathcal{N}_{i-1}(f)}\left(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_k\right)=\frac{\mathcal{M}(\mathcal{N}_{i-1}(f))}{R}. \tag{5}$$

Пусть t — произвольное число из T. Для каждого $j=1,\ldots,k$ обозначим для удобства через $T_0^{(j)}$ множество T. Среди множеств $T_0^{(j)},T_1^{(j)},\ldots,$

$T_{h-1}^{(j)}$, содержащих число t, выберем множество с максимальным порядковым индексом (поскольку $t \in T_0^{(j)}$, такое множество обязательно существует). Обозначим через $\tau_j(t)$ порядковый индекс этого множества. Из соотношений (3) вытекает, что все числа $m_1^{(j)}, \ldots, m_{h_j}^{(j)}$, кроме числа $m_{\tau_j(t)+1}^{(j)}$, являются кратными числу t. Положим $\tilde{\tau}(t) = (\tau_1(t); \ldots; \tau_k(t))$. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1; \ldots; \sigma_k)$ — произвольный набор из $\Omega(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k)$, отличный от $\tilde{\tau}(t)$. Тогда при некотором j выполняется неравенство $\sigma_j \neq \tau_j(t)$ и, следовательно, $m_{(\sigma_j+1)}^{(j)}$ делится на t. Таким образом, для любого набора $\tilde{\sigma}$, отличного от $\tilde{\tau}(t)$, соответствующее этому набору слагаемое $m_{(\sigma_1+1)}^{(1)} \ldots m_{(\sigma_k+1)}^{(k)}$ в сумме (4) содержит сомножитель, кратный числу t. Поэтому величина $\mathcal{M}(U)$ кратна числу t для любого множества U, не содержащего набора $\tilde{\tau}(t)$.

Для $i = 1 \ldots, h-1$ обозначим через T_i подмножество множества T, содержащее число $t \in T$ в том и только том случае, когда $i \leqslant f\big(\tilde{\tau}(t)\big)$. Пусть $t \in T_i$. Тогда любое множество $\mathcal{N}_j(f)$, где $j < i$, не содержит набора $\tilde{\tau}(t)$. Поэтому любая величина $\mathcal{M}(\mathcal{N}_j(f))$, где $j < i$, является кратной числу t. Следовательно, сумма $\sum\limits_{j=1}^{i} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f))$ также является кратной числу t. Таким образом, эта сумма является кратной любому числу из T_i. Так как T_i состоит из попарно простых чисел, получаем

$$\sum_{j=1}^{i} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f)) \equiv 0 \pmod{\|T_i\|}. \tag{6}$$

Пусть теперь $t \in T \backslash T_i$, т. е. $i > f\big(\tilde{\tau}(t)\big)$. Тогда любое множество $\mathcal{N}_j(f)$, где $j \geqslant i$, не содержит набора $\tilde{\tau}(t)$. Поэтому любая величина $\mathcal{M}(\mathcal{N}_j(f))$, где $j \geqslant i$, является кратной числу t. Тем самым сумма $\sum\limits_{j=i+1}^{h} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f))$ также является кратной числу t. Таким образом, эта сумма является кратной любому числу из $T \setminus T_i$; при этом все числа из $T \setminus T_i$ попарно просты. Следовательно,

$$\sum_{j=i+1}^{h} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f)) \equiv 0 \pmod{\|T \setminus T_i\|}. \tag{7}$$

Из справедливого для стохастического вектора равенства $\sum\limits_{j=1}^{h} d_j = 1$ и равенств (5) вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{h} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f)) = R$. Поэтому из соотношения (7) получаем

$$\sum_{j=1}^{i} \mathcal{M}(\mathcal{N}_{j-1}(f)) \equiv R \pmod{\|T \setminus T_i\|}. \tag{8}$$

Кроме того, из определения множеств $T_1, \ldots, T_{h-1}$ следует, что

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_{h-1}. \tag{9}$$

Таким образом, согласно равенствам (5) вектор $\mathcal{D}$ равен вектору $\left(\frac{\mathcal{M}(\mathcal{N}_0(f))}{R}; \frac{\mathcal{M}(\mathcal{N}_1(f))}{R}; \ldots; \frac{\mathcal{M}(\mathcal{N}_{h-1}(f))}{R}\right)$, который в силу соотношений (6), (8), (9) и вытекающего из соотношений $\mathcal{I}(n_i) \subseteq \Pi$ соотношения $\mathcal{I}(R) \subseteq \Pi$ принадлежит $G[\Pi; T]$. Следовательно, $\mathcal{D} \in G[\Pi; T]$, поэтому $\langle G[\Pi; T] \rangle = G[\Pi; T]$.

Совокупность всех множеств $G[\Pi; T]$ мы обозначаем через **SG**. Для того чтобы охарактеризовать структуру решетки, образуемой множествами из **SG**, нам необходимо установить зависимость отношения включения между произвольными двумя множествами $G[\Pi'; T']$, $G[\Pi''; T'']$ из **SG** от множеств Π', Π'' и T', T''. Эта зависимость описывается достаточно простым образом.

Утверждение 6. *Пусть* $G[\Pi'; T']$, $\langle G[\Pi''; T'']$ — *два множества из* **SG**. *Тогда*

1) $G[\Pi'; T'] \subseteq G[\Pi''; T'']$ *тогда и только тогда, когда* $\Pi' \subseteq \Pi''$ *и* T'' *является делителем* T';

2) $G[\Pi'; T'] = G[\Pi''; T'']$ *тогда и только тогда, когда* $\Pi' = \Pi''$ *и* $T' = T''$.

Доказательство. Пусть $\Pi' \subseteq \Pi''$ и T'' является делителем T'. Рассмотрим произвольный вектор $\mathcal{D} = \left(\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_h}{n}\right)$ из $G[\Pi'; T']$, где $\mathcal{I}[n] \subseteq \Pi'$, и, следовательно, $\mathcal{I}[n] \subseteq \Pi''$. Тогда существуют подмножества $T'_1, \ldots, T'_{h-1}$ множества T' такие, что

$$T'_1 \supseteq T'_2 \supseteq \ldots \supseteq T'_{h-1}, \tag{10}$$

и для любого $i = 1, \ldots, h-1$ справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^{i} m_j \equiv 0 \pmod{\|T'_i\|}, \quad \sum_{j=1}^{i} m_j \equiv n \pmod{\|T' \setminus T'_i\|}. \tag{11}$$

Для каждого множества T_i' обозначим через T_i'' подмножество множества T'', состоящее из всех тех чисел, которые являются делителями чисел из T_i'. Таким образом, все числа из T_i'' являются делителями числа $\|T_i'\|$. Так как все числа из разделимого множества T'' являются попарно простыми, то $\|T_i'\|$ делится на $\|T_i''\|$. Поскольку все числа из $T''\setminus T_i''$ являются делителями чисел из $T' \setminus T_i'$, аналогичным образом можно показать, что $\|T' \setminus T_i'\|$ делится на $\|T'' \setminus T_i''\|$. Таким образом, из соотношений (11) вытекают соотношения

$$\sum_{j=1}^{i} m_j \equiv 0 \pmod{\|T_i''\|}, \quad \sum_{j=1}^{i} m_j \equiv n \pmod{\|T'' \setminus T_i''\|},$$

а из (10) следует, что $T_1'' \supseteq T_2'' \supseteq \ldots \supseteq T_{h-1}''$. Поэтому $\mathcal{D} \in G[\Pi''; T'']$, т. е. $G[\Pi'; T'] \subseteq G[\Pi''; T'']$. Предположим, что $\Pi' \not\subseteq \Pi''$, т. е. Π' содержит некоторое простое p, не содержащееся в Π''. Выберем достаточно большое натуральное k такое, что $p^k > \|T'\|$, и рассмотрим стохастический вектор $\mathcal{D} = \left(\frac{\|T'\|}{p^k}; \frac{p^k - \|T'\|}{p^k}\right)$. Заметим, что $\mathcal{D}$ содержится в $G[\Pi'; T']$, но не содержится в $G[\Pi''; T'']$. Поэтому

$$G[\Pi'; T'] \not\subseteq G[\Pi''; T'']. \tag{12}$$

Предположим, наконец, что $\Pi' \subseteq \Pi''$, но T'' не является делителем T'. Это означает, что в T'' найдется число t, не являющееся делителем ни одного из чисел множества T'. Покажем, что в этом случае также справедливо соотношение (12), завершив таким образом доказательство пункта . Выберем натуральное n такое, что $\mathcal{I}(n) \subseteq \Pi'$ и $n > t\|T'\|$. Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\|T'\|$ не делится на t. Рассмотрим стохастический вектор $\mathcal{D}' = \left(\frac{\|T'\|}{n}; \frac{(t-1)\|T'\|}{n}; \frac{n - t\|T'\|}{n}\right)$. Заметим, что $\mathcal{D}' \in G[\Pi'; T']$. Пусть $\mathcal{D}' \in G[\Pi''; T'']$. Тогда существуют подмножества T_1'', T_2'' множества T'' такие, что $T_1'' \supseteq T_2''$ и

$$\|T'\| \equiv 0 \pmod{\|T_1''\|}, \tag{13}$$
$$t\|T'\| \equiv n \pmod{\|T'' \setminus T_2''\|}. \tag{14}$$

Поскольку $\mathcal{I}(n) \subseteq \Pi''$ и t взаимно просто с Π'', число n взаимно просто с t. Поэтому из (14) следует, что $t \notin T'' \setminus T_2''$. Следовательно, $t \in T_2''$. С другой стороны, поскольку $\|T'\|$ не делится на t, из (13) вытекает, что $t \notin T_1''$, что противоречит соотношению $T_2'' \subseteq T_1''$. Таким образом, $\mathcal{D}' \notin G[\Pi''; T'']$, тем самым имеем соотношение (12).

б) Пусть $\|T'\|$ делится на t. Поскольку никакое число из T' не кратно t, в T' найдутся по крайней мере два числа t'_1 и t'_2, не являющиеся взаимно простыми с t. Рассмотрим произвольное подмножество T'_1 множества T', содержащее число t'_1, но не содержащее числа t'_2. Так как все числа из T' попарно просты и, следовательно, $(\|T'_1\|, \|T' \setminus T'_1\|) = 1$, согласно то лемме 2 система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{\|T'_1\|}, \\ x \equiv n \pmod{\|T' \setminus T'_1\|}. \end{cases}$$

имеет решение, являющееся классом вычетов по модулю $\|T'_1\| \cdot \|T' \setminus T'_1\| = \|T'\|$. Пусть m'' — наименьший положительный вычет из данного класса. Поскольку $0 < m'' \leqslant \|T'\| < n$, можно рассмотреть стохастический вектор $\mathcal{D}'' = \left(\frac{m''}{n}; \frac{n-m''}{n}\right)$. Так как $m'' \equiv 0 \pmod{\|T'_1\|}$ и $m'' \equiv n \pmod{\|T' \setminus T'_1\|}$, то вектор $\mathcal{D}''$ содержится в $G[\Pi'; T']$. Если $\mathcal{D}'' \in G[\Pi''; T'']$, то $m'' \equiv 0 \pmod{\|T''_1\|}$ и $m'' \equiv n \pmod{\|T'' \setminus T''_1\|}$ для некоторого подмножества T''_1 множества T''. Так как t содержится в одном из множеств $T''_1, T'' \setminus T''_1$, то либо m'', либо $n - m''$ кратно t. Поскольку $m'' \equiv 0 \pmod{t'_1}$ и $m'' \equiv n \pmod{t'_2}$, число n делится соответственно либо на (t, t'_2), либо на (t, t'_1), что противоречит взаимной простоте чисел n и t. Таким образом, $\mathcal{D}'' \notin G[\Pi''; T'']$. Поэтому снова имеем соотношение (12).

Пункт 2 данного утверждения непосредственно вытекает из пункта 1 и утверждения 3.

Утверждение 6 позволяет установить отношение включения между любыми множествами из **SG** и тем самым описать структуру решетки, образуемой этими множествами.

3. Основной результат

Основным результатом данной статьи является описание замыканий произвольных подмножеств множества **SQ**. Отметим, что в силу утверждения 1 для получения этого описания достаточно рассмотреть замыкания произвольных множеств позитивных векторов из **SQ**.

Сначала рассмотрим случай конечных множеств векторов из **SQ**. Пусть $M = \{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_s\}$ — конечное множество произвольных позитивных векторов из **SQ** размерности $h_1, \ldots, h_s$ соответственно. Без ограничения общности мы предполагаем, что все компоненты каждого вектора $\mathcal{D}_i$ представлены дробями, приведенными к наименьшему общему знаменателю n_i, т. е. $\mathcal{D}_i = \left(\frac{m_1^{(i)}}{n_i}, \ldots, \frac{m_{h_i}^{(i)}}{n_i}\right)$, где $(m_1^{(i)}, \ldots, m_{h_i}^{(i)}) = 1$.

Для $i = 1, \ldots, s$ и $j = 1, \ldots, h_i$ обозначим через $l_j^{(i)}$ наибольший общий делитель всех чисел $m_1^{(i)}, \ldots, m_{h_i}^{(i)}$, кроме числа $m_j^{(i)}$, и положим $T(\mathcal{D}_i) = \{l_1^{(i)}, \ldots, l_{h_i}^{(i)}\}^{>1}$. В [5] доказано следующее

Утверждение 7. *Множество $T(\mathcal{D}_i)$ является разделимым и взаимно простым с числом n_i.*

Положим $T(M) = (T(\mathcal{D}_1), \ldots, T(\mathcal{D}_s))$ в случае $s \geqslant 2$ и $T(M) = T(\mathcal{D}_1)$ в случае $s = 1$. Согласно утверждениям 7 и 4 имеем

Утверждение 8. *Множество $T(M)$ является разделимым и взаимно простым с каждым из чисел $n_1, \ldots, n_s$.*

Обозначим через $\Pi(M)$ множество простых чисел $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathcal{I}(n_i)$. В силу утверждения 8 можно рассмотреть множество $G\,[\Pi(M); T(M)]$. В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого конечного множества M позитивных векторов из* **SQ** *выполняется равенство $\langle M \rangle = G\,[\Pi(M); T(M)]$.*

Теперь рассмотрим произвольное бесконечное множество M позитивных векторов из **SQ**. Поскольку множество **SQ** является счетным, M также является счетным множеством, т. е. представимо в виде бесконечной последовательности $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots\}$ векторов из **SQ**. Аналогично случаю конечного множества M для каждого вектора $\mathcal{D}_i$ мы предполагаем, что все компоненты этого вектора представлены дробями, приведенными к наименьшему общему знаменателю n_i, и определяем множество $T(\mathcal{D}_i)$. Положим $T(M) = (T(\mathcal{D}_1), T(\mathcal{D}_2), \ldots)$. Из утверждений 7 и 5 следует

Утверждение 9. *$T(M)$ является конечным разделимым множеством, взаимно простым с каждым из чисел $n_1, n_2, \ldots$.*

Обозначим через $\Pi(M)$ множество простых чисел $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(n_i)$. Тогда в силу утверждения 9 снова можно рассмотреть множество $G\,[\Pi(M); T(M)]$. Следующая теорема является обобщением теоремы 1 на случай замыканий бесконечных подмножеств множества **SQ**.

Теорема 2. *Для каждого бесконечного множества M позитивных векторов из* **SQ** *выполняется равенство $\langle M \rangle = G\,[\Pi(M); T(M)]$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_i = \left(\frac{m_1^{(i)}}{n_i}, \ldots, \frac{m_{h_i}^{(i)}}{n_i}\right)$ — произвольный вектор из M. Заметим, что для любого $j = 1, \ldots, h_i - 1$ выполняются соотношения

$$\sum_{t=1}^{j} m_t^{(i)} \equiv 0 \pmod{\|T_j(\mathcal{D}_i)\|}, \quad \sum_{t=1}^{j} m_t \equiv n_i \pmod{\|T(\mathcal{D}_i) \setminus T_j(\mathcal{D}_i)\|},$$

где $T_j(\mathcal{D}_i) = \{l_{j+1}^{(i)}, \ldots, l_{h_i}^{(i)}\}^{>1}$. Поэтому $\mathcal{D}_i \in G\left[\mathcal{I}(n_i); T(\mathcal{D}_i)\right]$. Поскольку согласно утверждению 6 имеем $G\left[\mathcal{I}(n_i); T(\mathcal{D}_i)\right] \subseteq G\left[\Pi(M); T(M)\right]$, вектор $\mathcal{D}_i$ содержится в $G\left[\Pi(M); T(M)\right]$. Таким образом, $M \subseteq G\left[\Pi(M); T(M)\right]$. Поэтому $\langle M \rangle \subseteq G\left[\Pi(M); T(M)\right]$ в силу леммы 3.

Теперь рассмотрим произвольный вектор $\mathcal{D} = \left(\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_h}{n}\right)$ из $G\left[\Pi(M); T(M)\right]$. Обозначим через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, подмножество $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i\}$ множества M. Согласно лемме 1 существует такое j, что $T(M) = T(M_j) = T(M_{j+1}) = T(M_{j+2}) = \ldots$. Поскольку $\mathcal{I}(n) \subseteq \Pi(M)$, для любого p из $\mathcal{I}(n)$ найдется j_p такое, что $p \in \mathcal{I}\left(n_{j_p}\right)$. Положим $j^* = \max\left(j, \max_{p \in \mathcal{I}(n)} j_p\right)$ и $\Pi^* = \bigcup_{i=1}^{j^*} \mathcal{I}(n_i)$. Согласно теореме 1 имеем $\langle M_{j^*} \rangle = G[\Pi^*; T(M_{j^*})] = G[\Pi^*; T(M)]$. Так как $\mathcal{I}(n) \subseteq \Pi^*$, то $\mathcal{D} \in G[\Pi^*; T(M)]$. Поэтому $\mathcal{D} \in \langle M_{j^*} \rangle \subseteq \langle M \rangle$, т. е. $G\left[\Pi(M); T(M)\right] \subseteq \langle M \rangle$. Таким образом, $G\left[\Pi(M); T(M)\right] = \langle M \rangle$.

Интересным следствием полученного нами результата является описание всех замкнутых классов векторов из множества **SQ**. Поскольку любой из этих классов является замыканием некоторого своего подмножества (например, самого этого класса), из теорем 1 и 2 и утверждения 1 вытекает, что любой такой класс является элементом множества **SG**. Поэтому, учитывая лемму 3, мы получаем

Следствие 1. *Множество* **SG** *является множеством всех замкнутых подмножеств множества* **SQ**.

4. Конечно порожденные замкнутые классы в SQ

Среди замкнутых классов стохастических веторов наибольший интерес с практической точки зрения представляют конечно порожденные классы. Чтобы получить описание всех конечно порожденных замкнутых подмножеств множества **SQ**, обозначим через $\mathbf{SG_{fin}}$ подмножество множества **SG**, состоящее из всех множеств $G[\Pi; T]$ таких, что Π конечно. Из теоремы 1 и утверждения 1 вытекает, что все конечно порожденные замкнутые подмножества множества **SQ** являются элементами множества $\mathbf{SG_{fin}}$. Можно показать, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 3. *Любое множество из* $\mathbf{SG_{fin}}$ *является конечно порожденным.*

Доказательство. Пусть $G[\Pi;T]$ — произвольное множество из $\mathbf{SG_{fin}}$. Обозначим через M множество $G[\Pi;T]^+$. Поскольку M содержит счетное число элементов, представим M в виде бесконечной последовательности $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots\}$ позитивных векторов из $\mathbf{SQ}$. Для каждого вектора $\mathcal{D}_i$ приведем все его компоненты к наименьшему общему знаменателю n_i. Согласно теореме 2 получаем

$$\langle M\rangle = G[\Pi(M);T(M)]. \tag{15}$$

В силу утверждения 2 множество $G[\Pi;T]$ порождается подмножеством M. С другой стороны, поскольку согласно лемме 3 множество $G[\Pi;T]$ замкнуто, имеем $\langle M\rangle \subseteq \langle G[\Pi;T]\rangle = G[\Pi;T]$. Таким образом, $\langle M\rangle = G[\Pi;T]$. Поэтому из (15) следует, что $G[\Pi;T] = G[\Pi(M);T(M)]$. Из этого равенства в силу пункта 2 утверждения 6 вытекает, что $\Pi = \Pi(M)$ и $T = T(M)$. Обозначим через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, множество $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i\}$. Согласно лемме 1 существует такое j, что $T(M) = T(M_j) = T(M_{j+1}) = T(M_{j+2}) = \ldots$. Поскольку $\Pi = \Pi(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}(n_i)$ и Π конечно, для некоторого достаточно большого s имеем $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathcal{I}(n_i)$. Положим $k = \max(j, s)$. Так как $T = T(M) = T(M_k)$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{I}(n_i) = \Pi$, то согласно теореме 1 получаем $\langle M_k\rangle = G[\Pi;T]$.

Следствие 2. *Множество* $\mathbf{SG_{fin}}$ *является множеством всех конечно порожденных замкнутых подмножеств множества* $\mathbf{SQ}$.

5. Заключение

Отметим, что для любого заданного стохастического вектора $\mathcal{D}$ и любого заданного множества M векторов из $\mathbf{SQ}$ полученные результаты позволяют эффективно определить, порождается ли вектор $\mathcal{D}$ множеством M. Однако вопрос о сложности порождения вектора $\mathcal{D}$ множеством M в случае $\mathcal{D} \in \langle M\rangle$ (где под сложностью порождения может пониматься как минимальное число исходных векторов из M, необходимое для порождения вектора $\mathcal{D}$, так и минимальная сложность реализации функции для порождения вектора $\mathcal{D}$ векторами из M) остается открытым. Поэтому возможным направлением для дальнейших исследований является изучение сложностных аспектов порождения векторов из $\mathbf{SQ}$. Другим интересным направлением исследований является рассмотрение стохастических векторов с компонентами из числовых множеств, более широких, чем множество рациональных чисел (например, векторов с компонентами, являющимися алгебраическими числами (см. [7])).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бухараев Р. Г.** Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985.
2. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
3. **Колпаков Р. М.** Замкнутые классы булевых случайных величин с рациональнозначными распределениями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. М.: Наука, 2001. С. 215–224.
4. **Колпаков Р. М.** Замыкания одноэлементных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями для многозначных преобразований // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 63–76.
5. **Колпаков Р. М.** О дискретных преобразованиях конечных распределений с рациональными вероятностями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Наука, 2003. С. 109–146.
6. **Нурмеев Н. Н.** О булевых функциях с аргументами, принимающими случайные значения // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. VIII Всесоюзной конференции. Горький, 1988. Часть 2. С. 59–60.
7. **Нурмеев Н. Н.** О сложности реализации преобразователей вероятностей схемами из функциональных элементов // Методы и системы технической диагностики: Межвуз. сборник научных трудов. Вып. 18. Саратов: Саратовский гос. ун-т, 1993. С. 131–132.
8. **Салимов Ф. И.** К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 15. Казань: Казанский гос. университет, 1979. С. 68–89.
9. **Салимов Ф. И.** Конечная порожденность некоторых алгебр над случайными величинами // Вопросы кибернетики. Вып. 86. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1982. С. 122–130.
10. **Салимов Ф. И.** О максимальных подалгебрах алгебр распределений // Известия вузов. Сер. Математика. 1985. № 7. С. 14–20.
11. **Салимов Ф. И.** Об одном семействе алгебр распределений // Известия вузов. Сер. Математика. 1988. № 7. С. 64–72.
12. **Схиртладзе Р. Л.** О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрССР. 1961. Т. 26. № 2. С. 181–186.

13. **Схиртладзе Р. Л.** О методе построения булевой случайной величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Сб. науч. трудов. Вып. 7. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. С. 71–80.

14. **Srinivasan A., Zuckerman D.** Computing with very weak random sources // SIAM J. on Computing. 1999. V. 28, N 4. P. 1433–1459.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119992, Москва,
Россия.

Статья поступила
26 марта 2004 г.