ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 32–47

УДК 517.7

ЗАМЕЧАНИЯ О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДАЕМОСТИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Г. Парватов

В терминах инвариантных отношений устанавливаются необходимые и достаточные условия конечной порождаемости клона (замкнутого класса функций k-значной логики, содержащего все селекторные функции). Изучаются некоторые случаи конечно порождаемых клонов. В частности, рассматриваются клоны, содержащие мажоритарную функцию. Показывается, что наличие мажоритарной функции в клоне равносильно возможности записи инвариантных для этого клона отношений формулами некоторого специального вида. В качестве обобщения клонов, содержащих мажоритарную функцию, вводятся в рассмотрение клоны, в которых функции связаны некоторыми тождественными соотношениями.

Введение

Изучение замкнутых классов k-значных функций представляет значительный интерес для кибернетики. Замкнутые классы булевых функций были полностью описаны Э. Постом. Из результатов Поста следует, что существует счетное число замкнутых классов булевых функций и каждый замкнутый класс имеет конечный базис. Известно [7], что уже в случае $k = 3$ ситуация иная: имеется континуум замкнутых классов, не каждый замкнутый класс обладает конечным базисом. В настоящей статье выявляются свойства, которые обеспечивают конечную порождаемость (существование конечных базисов) замкнутых классов. Сходные задачи решались и другими авторами. Например, конечная порождаемость клонов булевых функций, содержащих мажоритарную функцию, следует из результатов К. Бейкера и А. Пиксли [8]. Доказательство этого факта имеется в [4]. В [2] наличие конечного базиса в замнутых классах булевых функций связывается с существованием разложений специального вида для булевых функций.

§ 1. Основные определения и обозначения

В этом параграфе вводятся обозначения и определяются основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения. Будем рассматривать функции, зависящие от конечного числа переменных и принимающие вместе с последними значения в множестве $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$, где k — натуральное число, $k \geqslant 2$. Множество всех таких функций обозначается через P_k. Функция из P_k, тождественно равная одному из своих аргументов, называется *селекторной*. Множество всех селекторных функций из P_k обозначается через S_k. Функции в P_k рассматриваются с точностью до фиктивных переменных. Считаются известными понятия суперпозиции и замкнутого класса [6]. Замкнутый класс функций, содержащий селекторные функции, называется *клоном*. Наименьший клон, содержащий функции из F, обозначается через $[F]$.

Подмножество $A \subseteq E_k^n$ называется (*n-арным*) *отношением* (на E_k); при этом число n называется *арностью* отношения A. Множество всех отношений на E_k будем обозначать через Π_k. В [1] для отношений были определены операции переименования и отождествления переменных, операция проекции и операция конъюнкции. Множества отношений, замкнутые относительно всех перечисленных операций и содержащие все диагонали, т. е. отношения вида $x_i = x_j \wedge x_p = x_q \wedge \ldots \wedge x_r = x_s$, будем называть *замкнутыми*. Множества отношений, содержащие все диагонали и замкнутые относительно операций конъюнкции, переименования и отождествления переменных, будем называть *$\wedge$-замкнутыми*. Наименьшее $\wedge$-замкнутое множество отношений, содержащее данное множество отношений $A \subseteq \Pi_k$, обозначается через $[A]_\wedge$.

Далее, если A — произвольное множество функций (или отношений), то через $A^{(n)}$ обозначается совокупность всех n-арных функций (отношений), содержащихся в A, через $A^{(\leqslant n)}$ — совокупность всех функций (отношений) в A арности не более n, а через $A^{(\geqslant n)}$ — совокупность всех функций (отношений) в A арности не менее n. Клон A называется *конечно порождаемым*, если $A = [A^{(n)}]$ для некоторого n. В этом случае наименьшее n, обладающее указанным свойством, называется *порядком* клона A.

Говорят, что функция f *сохраняет отношение* $A \subseteq E_k^m$, если A — подалгебра m-й декартовой степени алгебры $\langle E_k, f\rangle$. Множество всех функций, сохраняющих отношение A, обозначается через $\mathrm{Pol}(A)$, а множество всех отношений, сохраняемых функцией f, — через $\mathrm{Inv}(f)$. Положим $\mathrm{Pol}(N) = \bigcap\limits_{A\in N} \mathrm{Pol}(A)$, $\mathrm{Inv}(M) = \bigcap\limits_{f\in M} \mathrm{Inv}(f)$ для любых подмножеств $N \subseteq \Pi_k$ и $M \subseteq P_k$. Отношения в $\mathrm{Inv}(M)$ будем называть *ин-*

вариантными для M. Известно, что множество функций $\mathrm{Pol}(M)$ является клоном, а множество отношений $\mathrm{Inv}(N)$ — замкнутым классом отношений. Известно также, что для любого замкнутого класса N отношений и любого клона F имеют место равенства $F = \mathrm{Pol}(\mathrm{Inv}(F))$, $N = \mathrm{Inv}(\mathrm{Pol}(N))$. Доказательство этих утверждений можно найти в [1], другой вариант доказательства содержится в [5]. Мы будем пользоваться перечисленными свойствами без дополнительных оговорок.

Для произвольной матрицы Y размера $m \times n$ с элементами из E_k через $Y_{(i)}$ и $Y^{(j)}$ будем обозначать соответственно i-ю строку и j-й столбец, через Y^T будет обозначаться транспонированная матрица. Для произвольных $a_1, \dots, a_r$ из $\{1, \dots, m\}$ через $Y_{(a_1, \dots, a_r)}$ обозначается матрица $({Y_{(a_1)}}^T, \dots, {Y_{(a_r)}}^T)^T$. Аналогично, для произвольных $b_1, \dots, b_q$ из $\{1, \dots, n\}$ через $Y^{(b_1, \dots, b_q)}$ обозначается матрица $(Y^{(b_1)}, \dots, Y^{(b_q)})$. Элементы декартова произведения E_k^n будем воспринимать как строки длины n, т. е. как матрицы размера $1 \times n$. Определим действия функций из P_k на матрицах слева и справа, для функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ и матрицы Y размера $m \times n$, полагая, что $f \circ Y = (f(Y_{(1)}), \dots, f(Y_{(m)}))^T$, $Y \circ g = (g(Y^{(1)T}), \dots, g(Y^{(n)T}))$. Легко видеть, что выполняются соотношения $(f \circ Y)^T = Y^T \circ f$ и $(Y \circ g)^T = g \circ (Y^T)$.

Если A — произвольное n-арное отношение, т. е. некоторое множество строк длины n, то под A^T будем понимать множество столбцов $Y^T, Y \in A$. Сохранение функцией f отношения A означает, что для любой матрицы Y размера $m \times n$ со столбцами из A^T выполняется условие $f \circ Y \in A^T$, т. е. для любой матрицы Z размера $n \times m$ со строками из A выполняется условие $Z \circ f \in A$. Далее для произвольного клона F и произвольной матрицы Y размера $m \times n$ положим $F \circ Y = \{f \circ Y | f \in F^{(n)}\}$, $Y \circ F = \{Y \circ f | f \in F^{(m)}\}$.

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Для любого клона F и любой матрицы Y отношение $Y \circ F$ является инвариантным для F. Если A — непустое инвариантное для F отношение и множество строк матрицы Y совпадает с A, то $A = Y \circ F$.*

Доказательство. Пусть матрица Y имеет размер $m \times n$, $g(x_1, \dots, x_r)$ — произвольная функция из F и $X_1, \dots, X_r$— произвольные наборы из $Y \circ F$. Так как для подходящих функций $f_1, \dots, f_r$ из $F^{(m)}$ можно записать

$$g \circ (X_1^T, \dots, X_r^T) = g \circ (f_1 \circ (Y^T), \dots, f_r \circ (Y^T)) \\ = h \circ (Y^T) \in F \circ (Y^T) = (Y \circ F)^T,$$

где $h(x_1, \ldots, x_m) = g(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_m))$, то функция g сохраняет отношение $Y \circ F$. Поскольку функция g выбрана произвольно в F, отношение $Y \circ F$ инвариантно для F. Далее, включение $A \subseteq Y \circ F$ имеет место, ибо $S_k \subseteq F$. Обратное включение следует из инвариантности для F отношения A. Утверждение 1 доказано.

Для непустого отношения A, клона F и матрицы Y, в которой множество строк совпадает с отношением A, положим по определению $A \circ F = Y \circ F$ и $F \circ (A^T) = F \circ (Y^T)$. Приведенные определения корректны, поскольку $Y \circ F = Z \circ F$ для любых двух матриц Y и Z, у которых множества строк совпадают. Из утверждения 1 непосредственно получаем

Утверждение 2. *Непустое отношение A тогда и только тогда инвариантно для клона F, когда $A = A \circ F$.*

Следуя [3], введем понятие централизатора клона. Функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$ называются *перестановочными*, если для любой матрицы Y размера $m \times n$ выполняется равенство

$$f \circ (Y \circ g) = (f \circ Y) \circ g.$$

Множество всех функций, перестановочных со всеми функциями клона $M \subseteq P_k$, называется *централизатором клона* M и обозначается через $Z(M)$. В [3] показано, что $Z(M)$ — клон. Непосредственно из определения перестановочности функций следует, что функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$ тогда и только тогда перестановочны, когда функция f сохраняет $(m+1)$-арное отношение $x_{m+1} = g(x_1, \ldots, x_m)$. Следовательно, централизатор клона M — это множество таких функций $g(x_1, \ldots, x_m)$, что отношение $x_{m+1} = g(x_1, \ldots, x_m)$ инвариантно для M. Отметим одно важное для дальнейшего изложения свойство, связанное с понятием централизатора.

Утверждение 3. *Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежит централизатору клона M и отношения A, B, C связаны соотношениями*

$$B(x_1, \ldots, x_n) \equiv A(x_1, \ldots, x_n) \wedge (x_i = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})),$$
$$C(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv (\exists x_i) B(x_1, \ldots, x_n),$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.
Тогда

$$M \cap \mathrm{Pol}(A) \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(B) = M \cap \mathrm{Pol}(C).$$

Доказательство. Первое включение следует из инвариантности для M отношения $x_i = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$. Включение $M \cap \mathrm{Pol}(B) \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(C)$

столь же очевидно. Для доказательства обратного включения достаточно убедиться в том, что всякая функция из M, не сохраняющая отношение B, не сохраняет также и отношение C. Это проверяется непосредственно. Утверждение 3 доказано.

§ 2. Условия конечной порождаемости клона

Прежде чем сформулировать необходимые и достаточные условия конечной порождаемости клона, дадим следующее

Определение 1. Пусть M, N — произвольные клоны. Неинвариантное для M отношение $A(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть N-*предельным* для M, если выполнены условия:

1) всякое отношение вида

$$(\exists x_i) A(x_1, \ldots, x_n), 1 \leqslant i \leqslant n,$$

инвариантно для M;

2) для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ из N, любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любых $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ отношение

$$A(x_1, \ldots, x_n) \wedge (x_i = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}))$$

инвариантно для M.

Множество N-предельных для M отношений будем обозначать через $L_N(M)$. Клоны вида $M \cap \mathrm{Pol}(A)$, где $A \in L_N(M)$, будем называть N-*предельными в* M (*для* M). $Z(M)$-предельные для M отношения и клоны будем называть *предельными* для M, опуская префикс "$Z(M)$-".

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия конечной порождаемости клона. Эта теорема является дальнейшим обобщением теоремы А. В. Кузнецова о функциональной полноте [6].

Теорема 1. *Пусть клон N содержится в централизаторе клона M. Клон M является конечно порождаемым тогда и только тогда, когда множество N-предельных для M отношений конечно.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 4. *Пусть клон N содержится в централизаторе клона M. Тогда всякий клон F, строго содержащийся в клоне M, можно расширить до N-предельного в M клона.*

Доказательство. Поскольку клон F строго содержится в M, найдется отношение $A^0 \in \mathrm{Inv}(F) \setminus \mathrm{Inv}(M)$. Если отношение A^0 не является N-предельным для M, то в силу определения N-предельного отношения и утверждения 3 существует неинвариантное для M $(n-1)$-арное отношение A^1 вида $(\exists x_i)A^0(x_1,\ldots,x_n)$ или $(\exists x_i)[A^0(x_1,\ldots,x_n) \wedge (g(x_{i_1},\ldots,x_{i_m}) = x_i)]$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $g(x_1,\ldots,x_m) \in N$ и $i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$. Кроме того, по утверждению 3 для отношения A^1 имеем $M \cap \mathrm{Pol}(A^0) \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(A^1)$. В свою очередь, для отношения A^1 можно повторить рассуждения, проведенные для A^0 и т. д. В результате получается последовательность неинвариантных для M отношений $A^0, A^1, A^2, \ldots$ и цепочка включений

$$F \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(A^0) \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(A^1) \subseteq M \cap \mathrm{Pol}(A^2) \subseteq \ldots$$

Так как на очередном шаге получается отношение меньшей арности, чем на предыдущем, то последовательность отношений обрывается. Последнее отношение, скажем A^i, в этой последовательности — N-предельное для M. Клон F расширяется до N-предельного в M клона $M \cap \mathrm{Pol}(A^i)$. Утверждение 4 доказано.

Следствие 1. *Пусть клон N содержится в централизаторе клона M. Если множество N-предельных для M отношений (клонов) конечно, то клон M конечно порождаемый.*

Напомним, что *предполными клонами* для клона M называются максимальные по включению клоны, строго содержащиеся в M.

Следствие 2. *Всякий предполный в M клон является предельным в M.*

Утверждение 5. *Пусть клон N содержится в централизаторе клона M, клон M конечно порождаем и имеет порядок r. Тогда арность любого N-предельного для M отношения не превосходит k^r. В частности, множество N-предельных для M отношений конечно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное отношение $A \in L_N(M)$. Пусть n — арность этого отношения. Поскольку отношение A неинвариантно для M и порядок M равен r, в M найдется функция $f(x_1,\ldots,x_m)$, $m \leqslant r$, не сохраняющая A. Следовательно, в A^T можно выбрать векторы $Y^1,\ldots, Y^m$ так, что вектор $Y = f \circ (Y^1,\ldots,Y^m)$ не принадлежит A^T. При $n > k^r$ в матрице $Z = (Y^1,\ldots,Y^m)$ имеются одинаковае строки. Если i-я строка матрицы Z совпадает с j-й строкой и $i \neq j$, то, как видно из соотношения $Y = f \circ Z$, функция f не сохраняет отношение $A(x_1,\ldots,x_n) \wedge x_i = x_j$. Но это противоречит предельности отношения A. Следовательно, $n \leqslant k^r$. Утверждение 5 доказано.

Справедливость теоремы 1 вытекает из утверждения 5 и следствия 1.

В силу доказанной теоремы множество предельных отношений для конечно порождаемого клона конечно. Это позволяет ввести следующее

Определение 2. *Степенью* конечно порождаемого клона будем называть наибольшую арность предельного для этого клона отношения.

Имеет место следующее

Утверждение 6. *Степень s и порядок r произвольного конечно порождаемого клона связаны соотношениями*:

$$s \leqslant k^r, r \leqslant k^s - 1.$$

Доказательство. Первое неравенство следует из утверждения 5. Для доказательства второго неравенства достаточно рассмотреть какую-нибудь функцию g из произвольного клона M, не сохраняющую n-арное отношение A, и заметить следующее. Так как $\mid A \mid \leqslant k^n - 1$, то отождествлением переменных из функции g можно получить функцию g', зависящую не более чем от $k^n - 1$ переменных и не сохраняющую отношение A. Для конечно порождаемого клона M степени s в силу утверждения 4 это влечет равенство $[M^{(r)}] = M$, где $r = k^s - 1$. Утверждение 6 доказано.

Ниже для клонов некоторого частного вида будут получены менее тривиальные соотношения между степенью и порядком.

§ 3. Редукция проблемы полноты в клоне

Сделаем несколько замечаний, относящихся к проблеме полноты в клоне. Система функций F называется *полной* в клоне M, если $[F] = M$. Проблема полноты для клона M состоит в нахождении необходимых и достаточных условий полноты в M произвольной системы функций $F \subseteq M$. Эта проблема решается обычно указанием *критериальной системы* S таких клонов $M_1, M_2, \ldots$, содержащихся в M, что система функций F из M тогда и только тогда полна в M, когда она целиком не содержится ни в одном клоне $M_1, M_2, \ldots$. При этом желательно, если это возможно, чтобы система S обладала как можно меньшей избыточностью, т. е. содержала как можно меньше таких классов M_i, которые можно без ущерба удалить из S. В настоящее время не известно более или менее регулярных методов нахождения клонов критериальной системы. Как правило, эти клоны просто "угадываются". Используя понятие предельного отношения, задачу нахождения критериальной системы в клоне F можно свести (редуцировать) к аналогичной задаче для "меньшего" клона F' такого, что $F' \subset F$. Такое упрощение задачи достигается ценой увеличения избыточности получающейся в итоге критериальной системы. Метод редукции основан на следующем свойстве предельных отношений.

Утверждение 7. *Пусть F, G, N — клоны, причем $F \subseteq G$. Тогда $L_N(G) \subseteq L_N(F) \cup (L_N(G) \cap \mathrm{Inv}(F))$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что всякое неинвариантное для F отношение, являющееся N-предельным для G, остается N-предельным для F.

Следствие 3. *Пусть $n \geqslant 2$, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n$ — цепочка клонов, клон N содержится в централизаторе клона F_n и множества $R_1, \ldots, R_n$ определены следующим образом*:

$$R_1 = L_N(F_1), R_2 = L_N(F_2) \cap \mathrm{Inv}(F_1), \ldots, R_n = L_N(F_n) \cap \mathrm{Inv}(F_{n-1}).$$

Тогда множество клонов $F_n \cap \mathrm{Pol}(A), A \in R_1 \cup \ldots \cup R_n$, образует критериальную систему в F_n.

Доказательство. Многократное применение утверждения 7 дает $L_N(F_n) \subseteq R_1 \cup \ldots \cup R_n$, после чего остается заметить, что отношения в множествах R_i неинвариантны для клона F_n, и воспользоваться утверждением 4.

Заметим, что получающаяся описанным выше способом критериальная система для клона F_n может оказаться бесконечной, даже если клон F_n конечно порождаемый. Это происходит в случае, когда некоторый клон $F_j, j < n$, не является конечно порождаемым. Однако при построении критериальной системы для конечно порождаемого клона F_n, имеющего степень s, можно ограничиться рассмотрением только таких отношений из $R_1 \cup \ldots \cup R_n$, арность которых не превосходит s. Иначе говоря, клоны $F_n \cap \mathrm{Pol}(A)$ при A, изменяющемся в множестве $(R_1)^{(\leqslant s)} \cup \ldots \cup (R_n)^{(\leqslant s)}$, образуют (конечную) критериальную систему в F_n.

§ 4. Клоны, содержащие мажоритарную функцию

Определение 3. Пусть $d \geqslant 2$. Функцию $m(x_1, \ldots, x_{d+1})$ будем называть $(d+1)$-*местной мажоритарной функцией*, если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, она удовлетворяет тождеству $m(x, \ldots, x, x_i, x, \ldots, x) = x$, где переменная x_i стоит в i-й позиции.

Известно, что *любой клон, содержащий мажоритарную функцию, имеет конечный базис.* Доказательство этого факта при $k = 2$ имеется в [4]. Ниже будет получено независимое доказательство этого факта (при произвольном k) и получена верхняя оценка для степени клона, содержащего $(d+1)$-местную мажоритарную функцию. Следующая теорема характеризует клоны с мажоритарной функцией в терминах инвариантных отношений. В частности, из теоремы видно, что клоны, содержащие мажоритарную функцию, — это в точности клоны, для которых множество инвариантных отношений порождается при помощи операций отождествления и переобозначения переменных и при помощи операции конъюнкции некоторым конечным набором отношений.

Теорема 2. *Пусть F — клон, $N = \mathrm{Inv}\,(F)$, $d \geqslant 2$. Следующие условия равносильны* :

(a) $N = [N^{(\leqslant d)}]_\wedge$;

(b) *при $n > d$ для любого отношения $A \in N^{(n)}$ и любого подмножества $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$ такого, что $d < |U|$, верно тождество*

$$A(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in U} (\exists x_i) A(x_1, \ldots, x_n);$$

(c) *клон F содержит $(d+1)$-местную мажоритарную функцию.*

Доказательство. Предположив, что имеет место утверждение (a), докажем, что имеет место и утверждение (c). Пусть множество столбцов матрицы Y размера $(d+1) \times r$ есть множество всевозможных векторов вида

$$(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x)^T, \tag{1}$$

в которых все или все без одной компоненты равнозначны. Пусть Z — такая строка из E_k^r, что $Z^{(i)} = x$, если i-й столбец матрицы Y имеет вид (1). Нужно показать, что $Z \in Y \circ F$. Это будет означать, что $Z = Y \circ f$ для $(d+1)$-местной мажоритарной функции $f \in F$. Так как по утверждению 2 отношение $(Y \circ F)(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантно для клона F, то по предположению его можно записать в виде конъюнкции инвариантных для F отношений вида $B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, где $l \leqslant d$ и $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим произвольное отношение $B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, участвующее в такой записи. Так как строки матрицы Y удовлетворяют отношению $Y \circ F$, то при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant d+1$, набор $Y_{(i)}^{(i_1, \ldots, i_l)}$ удовлетворяет отношению B. Так как $l \leqslant d$, то набор $Z^{(i_1, \ldots, i_l)}$ совпадает с некоторым из наборов $Y_{(i)}^{(i_1, \ldots, i_l)}, 1 \leqslant i \leqslant d+1$, и, следовательно, удовлетворяет отношению B. В силу произвольности выбора отношения B получаем, что набор Z удовлетворяет отношению $Y \circ F$.

Теперь докажем, что из свойства (c) следует свойство (b). Предположим, что в клоне F содержится мажоритарная функция $m(x_1, \ldots, x_{d+1})$.

В множестве N выберем отношение $A(x_1, \dots, x_n)$ арности $n > d$ и в множестве $\{1, \dots, n\}$ — подмножество U мощности $|U| > d$. Определим отношение A' выражением

$$A'(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in U} (\exists x_i) A(x_1, \dots, x_n).$$

Покажем, что $A = A'$. Включение $A \subseteq A'$ очевидно. Для доказательства обратного включения выберем произвольный набор $Y \in A'$. Так как при каждом $i \in U$ в A содержится набор Z_i, либо совпадающий с Y, либо отличающийся от Y лишь по i-й компоненте, то для любых попарно различных $i_1, \dots, i_{d+1}$ из U имеем

$$Y^T = m \circ (Z_{i_1}^T, \dots, Z_{i_{d+1}}^T) \in F \circ (A^T) = A^T,$$

где последнее равенство справедливо в силу утверждения 2. Отсюда следует, что $Y \in A$ и, следовательно, $A' = A$. Поскольку из свойства (b) свойство (a) следует автоматически, теорема 2 доказана.

Непосредственно из теоремы 2 получаем

Следствие 4. *Клон тогда и только тогда содержит $(d+1)-$местную мажоритарную функцию, когда всякое инвариантное для этого клона отношение A арности $n > d$ можно записать в виде*

$$A(x_1, \dots, x_n) \equiv (\exists x_1) A(x_1, \dots, x_n) \wedge \ldots \wedge (\exists x_n) A(x_1, \dots, x_n).$$

§ 5. d-Клоны

Ввиду условия (b) теоремы 2 естественно ввести следующее

Определение 4. Пусть $d \geqslant 1$. Клон M_1 будем называть *d-клоном в клоне* M_2 или *d-подклоном* клона M_2, если

$$N_1 = [N_2 \cup N_1^{(\leqslant d)}]_\wedge,$$

где $N_1 = \mathrm{Inv}(M_1)$, $N_2 = \mathrm{Inv}(M_2)$.

Заметим, что в этом случае $M_1 \subseteq M_2$.

Ясно, что при $d \geqslant 2$ клоны, содержащие $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, — это в точности d-клоны в P_k. Сформулированная выше теорема 2 обобщается теперь так.

Теорема 3. *Пусть M_1, M_2 — клоны,* $N_1 = \mathrm{Inv}(M_1)$, $N_2 = \mathrm{Inv}(M_2)$, $M_1 \subseteq M_2$ *и* $d \geqslant 1$. *Следующие условия равносильны*:

(a) M_1 — d-клон в M_2;

(b) для любого отношения $A \in N_1^{(n)}$ арности $n > d$ и любого подмножества $U \subseteq \{1, \dots, n\}$ мощности $|U| > d$ существует отношение $B \in N_2^{(n)}$ такое, что

$$A(x_1, \dots, x_n) \equiv B(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i \in U} (\exists x_i) A(x_1, \dots, x_n);$$

(c) для всякой функции $g(x_1, \dots, x_m)$ из M_2 существует такая функция $m_g(x_1, \dots, x_{m+d+1})$ в M_1, что для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant d+1$, имеет место тождество

$$m_g(x, g(x), \dots, g(x), x_{m+i}, g(x), \dots, g(x)) = g(x),$$

где $(x) = (x_1, \dots, x_m)$ и переменная x_{m+i} находится в $(m+i)$-й позиции.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Покажем, что из свойства (a) следует свойство (c). Пусть имеет место свойство (a) теоремы, $g(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная функция из клона M_2 и множество столбцов матрицы Y размера $(m + d + 1) \times r$ есть множество всевозможных векторов вида

$$(x, g(x), \dots, g(x), x_{m+i}, g(x) \dots, g(x))^T, \tag{2}$$

где $(x) = (x_1, \dots, x_m)$, x_{m+i} находится в $(m+i)$-й позиции и $i = 1, \dots, d+1$. Пусть $Z = Y_{(1,\dots,m)} \circ g$, иначе говоря, вектор $Z \in E_k^r$ определяется из условия $Z^{(i)} = g(x)$, если вектор $Y^{(i)}$ имеет вид (2). Нужно показать, что $Z \in Y \circ M_1$. Так как по утверждению 2 отношение $Y \circ M_1$ инвариантно для клона M_1, то по предположению его можно записать в виде конъюнкции отношений из множества $N_2 \cup N_1^{(\leqslant d)}$. Рассмотрим произвольное отношение $B(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$, участвующее в записи отношения $(Y \circ M_1)(x_1, \dots, x_n)$. Так как строки матрицы Y удовлетворяют отношению $Y \circ M_1$, то для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant m + d + 1$, набор $Y_{(i)}^{(i_1,\dots,i_l)}$ удовлетворяет отношению B. Если отношение B содержится в N_2, то

$$Z^{(i_1,\dots,i_l)} = Y_{(1,\dots,m)}^{(i_1,\dots,i_l)} \circ g \in B,$$

где равенство имеет место в силу построения вектора Z, а включение — в силу того, что отношение B инвариантно для функции g и строки матрицы $Y_{(1,\dots,m)}^{(i_1,\dots,i_l)}$ содержатся в B. То же самое включение $Z^{(i_1,\dots,i_l)} \in B$ выполняется и в случае, когда $B \in N_1^{(\leqslant d)}$, так как теперь $l \leqslant d$, и в силу определения матрицы Y набор $Z^{(i_1,\dots,i_l)}$ совпадает с некоторым набором $Y_{(i)}^{(i_1,\ldots,i_l)}$, $m+1 \leqslant i \leqslant d+m+1$, и, следовательно, удовлетворяет отношению B. В силу произвольности выбора отношения B получаем $Z \in Y \circ M_1$. Поэтому имеет место свойство (c).

Докажем, что из свойства (c) следует свойство (a). Предположим, что выполняется условие (c) теоремы. В множестве N_1 выберем отношение $A(x_1 \ldots, x_n)$ арности $n > d$ и в множестве $\{1,\ldots,n\}$ подмножество U мощности $|U| > d$. Определим отношение A' выражением

$$A'(x_1,\ldots,x_n) \equiv (A \circ M_2)(x_1,\ldots,x_n) \wedge \bigwedge_{i\in U} (\exists x_i) A(x_1,\ldots,x_n).$$

Покажем, что отношения A и A' совпадают. Включение $A \subseteq A'$ очевидно. Для доказательства обратного включения выберем произвольный набор $Y \in A'$. Так как $Y^T \in (A \circ M_2)^T = M_2 \circ (A^T)$, то $Y^T = g \circ (Y_1^T,\ldots,Y_m^T)$ для некоторых наборов $Y_1,\ldots,Y_m \in A$ и для некоторой функции $g \in M_2$. Далее, при каждом $i \in U$ в отношении A содержится набор Z_i, либо совпадающий с Y, либо отличающийся от Y лишь в i-й компоненте. Это выполняется в силу того, что Y удовлетворяет отношению $\bigwedge_{i\in U}(\exists x_i)A(x_1,\ldots,x_n)$. Но тогда для любых попарно различных $i_1,\ldots,i_{d+1}$ из U имеем

$$Y^T = m_g \circ (Y_1^T,\ldots,Y_m^T, Z_{i_1}^T,\ldots,Z_{i_{d+1}}^T) \in M_1 \circ (A^T) = A^T,$$

где последнее равенство справедливо в силу утверждения 2 и ивариантности отношения A для клона M_1. Отсюда следует, что $Y \in A$ и, следовательно, $A' = A$. Поскольку из свойства (b) свойство (a) следует автоматически, теорема 3 доказана.

В связи с пунктом (c) теоремы следует сделать одно замечание. Фигурирующая в нем функция m_g может зависеть существенно от всех своих $m+d+1$ переменных. Однако композиция, стоящая слева в тождестве пункта (c), не зависит от переменной x_{m+i}. Из теоремы 3 получаем

Следствие 5. *Пусть M_1, M_2 — клоны, причем $M_1 \subseteq M_2$. Клон M_1 тогда и только тогда является d-клоном в клоне M_2, когда для каждого инвариантного для клона M_1 отношения A арности $n > d$ найдется такое инвариантное для клона M_2 отношение B арности n, что*

$$A(x_1,\ldots,x_n) \equiv B(x_1,\ldots,x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\exists x_i) A(x_1,\ldots,x_n).$$

Клон, содержащий конечно порождаемый d-подклон, сам оказывается конечно порождаемым. Точнее имеет место

Теорема 4. *Пусть F_1 — d-клон в клоне F_2. Если клон F_1 конечно порождаем, имеет порядок r_1 и степень s_1, то клон F_2 также конечно порождаем, его порядок не превосходит $\max\{r_1, k^d - 1\}$, а степень не превосходит $\max\{s_1, d\}$.*

Доказательству теоремы 4 предпошлем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 8. *Если отношение $A \subseteq E_k^n$ является предельным для клона F, то $(F \circ (A^T)) \setminus A^T \neq \varnothing$ и, кроме того, для любого вектора $Y \in (F \circ (A^T)) \setminus A^T$ и любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ найдется вектор $Z^j \in A^T$, отличающийся от вектора Y лишь j-й компонентой.*

Доказательство. Множество векторов $(F \circ (A^T)) \setminus A^T$ непусто, так как отношение A неинвариантно для клона F. Пусть $Y \in (F \circ (A^T)) \setminus A^T$. Тогда $Y = g \circ (Y^1, \ldots, Y^m)$ для некоторой функции $g \in F$ и некоторых векторов $Y^1, \ldots, Y^m$ из A^T. Заметим, что всякий вектор $Y^i_{(1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n)}$, полученный из вектора Y^i удалением j-й компоненты, принадлежит множеству B^T, где

$$B(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv (\exists x_j) A(x_1, \ldots, x_n).$$

Если для какого-то номера j не существует вектора Z^j с требуемыми свойствами, то вектор $Y_{(1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n)}$ не принадлежит множеству B^T и, следовательно, функция g не сохраняет отношение B. Но тогда отношение A не предельное. Утверждение 8 доказано.

Утверждение 9. *Пусть F_1 — d-клон в клоне F_2 и клон N содержится в централизаторе клона F_2. Тогда $L_N(F_2)^{(\geqslant d+1)} \subseteq L_N(F_1)$.*

Доказательство. По утверждению 7 имеет место включение $L_N(F_2)^{(\geqslant d+1)} \subseteq L_N(F_1) \cup (L_N(F_2)^{(\geqslant d+1)} \cap \mathrm{Inv}(F_1))$, так что достаточно показать неинвариантность для F_1 всякого N-предельного для F_2 отношения $A(x_1, \ldots, x_n)$ арности $n > d$. Рассмотрим произвольную функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ из F_2, не сохраняющую отношение A. Для нее найдутся такие наборы $X^1, \ldots, X^m \in A^T$, что набор $Y = g \circ (X^1, \ldots, X^m)$ не удовлетворяет A^T. Далее, по утверждению 8 в A^T можно выбрать такие наборы $Z^1, \ldots, Z^n$, что набор Z^j отличается от набора Y лишь j-й компонентой. При условии $n > d$ по теореме 3 в F_1 имеется функция $m_g(x_1, \ldots, x_{m+d+1})$, удовлетворяющая соотношению $m_g \circ (X^1, \ldots, X^m, Z^1, \ldots, Z^{d+1}) = Y$ и, следовательно, не сохраняющая отношение A. Утверждение 9 доказано.

Доказательство теоремы 4. Ввиду утверждения 9 справедливо включение $L_N(F_2) \subseteq L_N(F_1) \cup L_N(F_2^{(\leqslant d)})$. Отсюда и из утверждения 4 следует, что всякий базис клона F_1 можно дополнить до порождающего множества клона F_2, добавив функции, не сохраняющие отношения из $L_N(F_2)^{(\leqslant d)}$. Поскольку неполному отношению арности не более d может удовлетворять не более $k^d - 1$ наборов, то добавляемые функции можно выбрать такими, что они зависят не более чем от $k^d - 1$ переменных. Отсюда следует соотношение для порядков клонов. Соотношения для степеней получаются из того же включения, поскольку по условию теоремы в множестве $L_N(F_1)$ содержатся отношения арности не более s_1. Теорема 4 доказана.

§ 6. (c, d)-Клоны

Рассмотрим следующий пример d-клонов.

Пример 1. В клоне I^∞ всех булевых функций, удовлетворяющих условию 1^∞, клон MI^∞, состоящий из всех монотонных булевых функций, удовлетворяющих тому же условию, является 2-клоном. Действительно, пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из I^∞. Тогда $g(x_1, \ldots, x_m) \leqslant x_i$ для некоторого $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, (такую переменную x_i называют *специальной компонентой* функции g). Непосредственно проверяется, что функция

$$m_g(x_1, \ldots, x_{m+3}) = x_i(x_{m+1} \vee x_{m+2})(x_{m+1} \vee x_{m+3})(x_{m+2} \vee x_{m+3})$$

принадлежит MI^∞ и удовлетворяет тождествам пункта 3 теоремы 3.

В рассмотренном примере функцию m_g удается выбрать такой, что она существенно зависит не более чем от одной переменной набора $(x_1, \ldots, x_m)$, являющейся специальной компонентой функции g. Рассмотрим более общую ситуацию.

Определение 5. Пусть c — неотрицательное целое число, d — положительное целое число. Клон M_1 будем называть *(c, d)-клоном в клоне M_2*, если $M_1 \subseteq M_2$ и для любой функции $g(x_1, \ldots, x_m) \in M_2$ найдется функция $m_g(x_1, \ldots, x_{c+d+1})$ в M_1 и числа $i_1, \ldots, i_c$ в $\{1, \ldots, m\}$ такие, что при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant d + 1$, справедливо тождество

$$m_g(x', g(x), \ldots, g(x), y_{c+i}, g(x), \ldots, g(x)) = g(x),$$

где $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x') = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_c})$ и переменная y_{c+i} находится в $(c + i)$-й позиции. При этом всякий клон M, $M_1 \subseteq M \subseteq M_2$, будем называть *$(c, d)$-клоном.*

В силу этого определения клон, содержащий $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, является $(0,d)$ клоном в P_k; каждый из клонов MI^∞ и I^∞ в примере 1 является $(1,2)$-клоном в I^∞. Наконец, клоны MI^∞ и I^∞ являются $(1,2)$-клонами. Далее будет показано, что (c,d)-клон всегда конечно порождаем.

Теорема 5. *Всякий (c,d)-клон M конечно порождаем, его порядок не превосходит* $\max\{k^d-1, c+d+1\}$, *а степень не превосходит* $\max\{k^{c+1}, d+2\}$.

Доказательство. Пусть $A(x_1,\ldots,x_n)$ — предельное для M отношение. Так как оно неинвариантно для M, то существуют такие наборы $Y^1,\ldots,Y^m \in A^T$ и функция $g(x_1,\ldots,x_m)$ в M, что вектор $Y = g\circ(Y^1,\ldots,Y^m)$ не принадлежит A^T. Так как в A^T содержится не более k^n-1 векторов, то можно считать, что $m \leqslant k^n-1$. Далее по утверждению 8 в A^T найдутся векторы $Z^1,\ldots,Z^n$ такие, что для любого $i, 1\leqslant i\leqslant n$, векторы Z^i и Y отличаются лишь i-й компонентой. По определению (c,d)-клона существует такая функция $m'_g \in M$ и такие числа $i_1,\ldots,i_c \in \{1,\ldots,n\}$, что для любых попарно различных чисел $j_1,\ldots,j_{d+1} \in \{1,\ldots,n\}$ справедливо равенство

$$Y = m'_g \circ (Y^{i_1},\ldots,Y^{i_c}, Z^{j_1},\ldots,Z^{j_{d+1}}).$$

Предположив, что $n > k^{c+1}$ и $n > d+2$, в силу неравенства $n > k^{c+1}$ убеждаемся в существовании таких чисел $i<j$ в $\{1,\ldots,n\}$, что в каждом векторе $Y^{i_1},\ldots,Y^{i_c}, Y$ i-я и j-я компоненты совпадают. Вследствие неравенства $n > d+2$ попарно различные числа $j_1,\ldots,j_{d+1}$ можно выбрать в множестве $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,j\}$. Но у векторов $Z^{j_1},\ldots,Z^{j_{d+1}}$ также совпадают i-я и j-я компоненты. Отсюда следует, что функция m'_g не сохраняет отношение $A(x_1,\ldots,x_n)\wedge(x_i=x_j)$, что противоречит предельности отношения A. Полученное противоречие означает, что $n\leqslant \max\{k^{c+1}, d+2\}$. Итак доказано, что клон M конечно порождаем и его стенень не превосходит $\max\{k^{c+1}, d+2\}$. Остается заметить, что при $n \geqslant d+1$ в множестве $M^{(c+d+1)}$ содержится функция m'_g, не сохраняющая A. Если же $n\leqslant d$, то в множестве $M^{(\leqslant r)}$, где $r = k^d-1$, содержится функция g, не сохраняющая A. Следовательно, порядок клона M не превосходит $\max\{k^d-1, c+d+1\}$. Теорема 5 доказана.

Положив в теореме $c=0$ и заметив, что $k^d-1\geqslant d+1$ при $k,d\geqslant 2$, получаем

Следствие 6. *Всякий клон M, содержащий $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, конечно порождаем, его порядок не превосходит k^d-1,* *а степень не превосходит* $\max\{k, d+2\}$.

В статье [4] содержится другое доказательство утверждения о конечной порождаемости клона, содержащего мажоритарную функцию.

В заключение автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
2. **Гаврилов Г. П.** Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 3–26.
3. **Кон П.** Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
4. **Марченков С. С.** К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 88–99.
5. **Парватов Н. Г.** О конечной порождаемости замкнутых классов функций многозначной логики // Вестник Томского государственного университета. 2002. Приложение. № 1(II). С. 34–37.
6. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
7. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
8. **Baker K. A., Pixley A. F.** Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeitschr. 1975. Bd. 143, N 2. S. 165–174.

Адрес автора:
Томский гос. ун-т,
Факультет прикл. матем. и киб.,
пр. Ленина, 36,
634050, Томск,
Россия.
E-mail: parvatov@isc.tsu.ru

Статья поступила
1 марта 2004 г.

Переработанный вариант —
26 апреля 2004 г.