ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 48–58

УДК 519.11

О МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ ДВОИЧНЫХ СЛОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТОЙ ЕДИНИЦ И БЕЗ ОДИНАКОВЫХ ПОДСЛОВ ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ*)

В. Н. Потапов

Построены двоичные слова с частотой единиц не более β ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$) и без одинаковых подслов длины n, длина которых менее чем на n отличается от максимально возможной. Найдена асимптотика длины таких слов при $n \to \infty$. Показано, что подслова таких слов имеют асимптотически максимальную аддитивную сложность среди всех слов той же длины с частотой единиц не более β.

Введение

Пусть $\{0,1\}^*$ — множество слов в алфавите $\{0,1\}$. Обозначим через $|u|$ длину слова $u \in \{0,1\}^*$, а через $wt(u)$ число единиц в слове u. Будем говорить, что частота единиц в слове u не превосходит β ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$), если $wt(u) \leqslant \beta|u|$. В настоящей статье рассматривается задача нахождения двоичных слов максимальной длины с частотой единиц не более β, не содержащих одинаковых подслов длины n.

Слово $w = w_1w_2\dots w_i\dots w_j\dots w_n$ называеся *круговым,* если за последней буквой следует первая, т. е. слова вида $w_j\dots w_nw_1\dots w_i$ являются подсловами кругового слова w. Известно (см., например, [3, § 9.1]), что каждое слово длины n входит в круговое слово де Брейна $\ell(n)$ по одному разу и $|\ell(n)| = 2^n$. Поскольку частота единиц в словах де Брейна равняется $1/2$, при $\beta \geqslant 1/2$ решение рассматриваемой задачи известно.

В § 2 построены слова $\ell(n,\beta)$, подобные словам де Брейна, с частотой единиц β ($0 < \beta < 1/2$), не содержащие одинаковых подслов длины n. Показано, что их длина $|\ell(n,\beta)|$ отличается от максимально возможной менее чем на n. Аналогичное утверждение получено для некруговых

---

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00939), Министерства образования (проект Е 02-6.0-250), Совета по грантам президента РФ и государственной программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-313.2003.1).

слов. При $n \to \infty$ получена асимптотика

$$|\ell(n,\beta)| = \frac{(1-\beta)(n-k_0)(1+o(1))}{(1-2\beta)(n-2k_0)(k_0-n\beta+1)}\binom{n}{k_0},$$

где $k_0 = \lceil \beta n + \beta/(1-2\beta) - 1 \rceil$.

В работе [4] показано, что слова де Брейна $\ell(n)$ имеют асимптотически (при $n \to \infty$) максимальную аддитивную сложность среди всех двоичных слов той же длины. В § 3 показано, что подслова слов $\ell(n,\beta)$ имеют асимптотически максимальную аддитивную сложность среди слов с частотой единиц не более β.

§ 1. Асимптотические комбинаторные равенства

Нам понадобятся следующие асимптотические равенства

Лемма 1. *Пусть* $0 < \varepsilon_1 \leqslant k/n \leqslant \varepsilon_2 < 1/2$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j} = \frac{n-k}{n-2k}\binom{n}{k}(1+o(1)), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{k-i} = \frac{k(n-k)}{(n-2k)^2}\binom{n}{k}(1+o(1)). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $1 \leqslant i \leqslant k$, $k/n \leqslant \varepsilon_2 < 1/2$. Рассмотрим дробь

$$\binom{n}{k-i}\Big/\binom{n}{k} = \frac{k}{n+i-k} \times \frac{k-1}{n-1+i-k} \times \dots \times \frac{k-i+1}{n+1-k}. \tag{3}$$

Тогда из (3) и неравенства $\dfrac{a-c}{b-c} < \dfrac{a}{b}$ при $0 < c < a < b$ имеем

$$\left(\frac{k-i}{n-k}\right)^i \leqslant \binom{n}{k-i}\Big/\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{k}{n+i-k}\right)^i \leqslant \left(\frac{k}{n-k}\right)^i. \tag{4}$$

Пусть i удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i \leqslant \ln^2 n$ и $k/n \geqslant \varepsilon_1 > 0$. Используя неравенство $(1+x)^t > 1+tx$, где $t \geqslant 1$ и $x > -1$, получаем

$$\left(\frac{k-i}{n-k}\right)^i \geqslant \left(\frac{k}{n-k}\right)^i\left(1-\frac{\ln^2 n}{k}\right)^i \geqslant \left(\frac{k}{n-k}\right)^i\left(1-\frac{\ln^4 n}{k}\right). \tag{5}$$

Так как $\dfrac{k}{n-k} < 1$, то из формулы для суммы геометрической прогрессии и неравенств (4), (5) следует, что

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i} \leqslant \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{k}{n-k}\right)^{i} \leqslant \frac{n-k}{n-2k}\binom{n}{k}$$

и при $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i} \geqslant \sum_{i=0}^{\ln^2 n}\binom{n}{k-i} \geqslant \binom{n}{k}\left(1-\frac{\ln^4 n}{k}\right)\sum_{i=0}^{\ln^2 n}\left(\frac{k}{n-k}\right)^{i}$$
$$= \frac{n-k}{n-2k}\binom{n}{k}\left(1-\frac{\ln^4 n}{k}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n^{\xi \ln n}}\right)\right),$$

где $\xi = -\ln\dfrac{k}{n-k} > 0$. Из последних двух неравенств получаем формулу (1).

Используя формулы $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} ia^{i} = \frac{a}{(1-a)^2}$ и $\displaystyle\sum_{i=t}^{\infty} ia^{i} = O(ta^{t})$ при $a = \dfrac{k}{n-k} < 1$ и неравенства (4), (5), имеем

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{k-i} \leqslant \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k} i\left(\frac{k}{n-k}\right)^{i} \leqslant \frac{k(n-k)}{(n-2k)^2}\binom{n}{k}$$

и при $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{k-i} \geqslant \sum_{i=0}^{\ln^2 n} i\binom{n}{k-i} \geqslant \binom{n}{k}\left(1-\frac{\ln^4 n}{k}\right)\sum_{i=0}^{\ln^2 n} i\left(\frac{k}{n-k}\right)^{i}$$
$$= \frac{k(n-k)}{(n-2k)^2}\binom{n}{k}\left(1-\frac{\ln^4 n}{k}\right)\left(1+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{\xi \ln n}}\right)\right),$$

где $\xi = -\ln\dfrac{k}{n-k} > 0$. Из последних двух неравенств получаем формулу (2). Лемма 1 доказана.

Рассмотрим все множества слов длины n со средней частотой единиц, не превышающей β. Обозначим через $v(n,\beta)$ мощность наибольшего из таких множеств, т. е. $v(n,\beta) = \max\limits_{M\in\mathcal{M}} |M|$, где

$$\mathcal{M} = \{M \subset \{0,1\}^n \mid \sum_{w\in M} wt(w) \leqslant \beta n|M|\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0 < \beta < 1/2$ *и* $k_0 = \lceil \beta n + \beta/(1-2\beta) - 1 \rceil$. *Тогда при* $n \to \infty$
$$v(n,\beta) = \frac{(1-\beta)(n-k_0)(1+o(1))}{(1-2\beta)(n-2k_0)(k_0-n\beta+1)}\binom{n}{k_0}.$$

Доказательство. Пусть $M_i = \{w \in \{0,1\}^n \mid wt(w) = i\}$. Множество M_i будем называть i-м слоем. Покажем, что существует такое множество $M \in \mathcal{M}$, $|M| = v(n,\beta)$, что
$$M = \left(\bigcup_{i=0}^{k} M_i\right) \cup \bar{M}, \quad \text{где} \quad \bar{M} \subset M_{k+1}. \tag{6}$$
Действительно, пусть $M' \in \mathcal{M}$ и найдутся $w_1 \in M' \cap M_i$ и $w_2 \notin M' \cap M_j$, $i > j$. Тогда множество $(M' \cup \{w_2\}) \backslash \{w_1\}$ содержится в $\mathcal{M}$. Таким образом, можно выбрать множество M той же мощности что и M', включающее все слои M_i при $0 \leqslant i \leqslant k$ для некоторого числа k, которое обозначим через $k(n,\beta)$. Найдем $k(n,\beta)$. Очевидно, что $k(n,\beta)$ есть наибольшее натуральное число k такое, что
$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{w\in M_i} wt(w) \leqslant \beta n \sum_{i=0}^{k} |M_i|.$$
Применяя (1) и (2), преобразуем это неравенство. При $n \to \infty$ имеем
$$\beta n \geqslant \frac{\sum\limits_{i=0}^{k}(k-i)\binom{n}{k-i}}{\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}} = k - \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} i\binom{n}{k-i}}{\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}} = k - \frac{k}{n-2k}(1+o(1)). \tag{7}$$
Покажем, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{k(n,\beta)}{n} = \beta. \tag{8}$$
Пусть $n/2 > k(n,\beta) > n(\beta+1/2)/2$. Тогда
$$k(n,\beta) - \frac{k(n,\beta)}{n-2k(n,\beta)} > \frac{n(\beta+1/2)}{2} - \frac{1}{1-2\beta} > \beta n$$
при достаточно больших n. Последнее неравенство противоречит неравенству (7). Тогда при $n \to \infty$ имеем $k(n,\beta) \leqslant n(\beta+1/2)/2$. Из определения числа $k(n,\beta)$ имеем
$$k(n,\beta) + 1 - \frac{k(n,\beta)+1}{n-2(k(n,\beta)+1)}(1+o(1)) > \beta n$$
$$\geqslant k(n,\beta) - \frac{k(n,\beta)}{n-2k(n,\beta)}(1+o(1)).$$

Тогда при $n \to \infty$ имеем

$$k(n,\beta)/n + o(1) \geqslant \beta \geqslant k(n,\beta)/n + o(1).$$

Таким образом, предел (8) доказан. Из (7) и (8) получаем, что $k(n,\beta)$ есть максимальное k такое, что выполнено неравенство

$$k \leqslant \beta n + \frac{\beta}{1-2\beta}(1+o(1)).$$

При достаточно больших n возможны два случая:

$$k(n,\beta) = k_0 = \left\lceil \beta n + \frac{\beta}{1-2\beta} \right\rceil - 1 \tag{9}$$

и

$$k(n,\beta) = k_0 + 1, \tag{10}$$

причем второй случай возможен только для таких n, что

$$k(n,\beta) - \beta n - \frac{\beta}{1-2\beta} = o(1). \tag{11}$$

Пусть $|M| = v(n,\beta)$ и множество M удовлетворяет равенству (6). Тогда $|\bar{M}| = \lfloor D \rfloor$, где число D удовлетворяет уравнению

$$\beta n\left(D + \sum_{i=0}^{k(n,\beta)} \binom{n}{i}\right) = D(k(n,\beta)+1) + \sum_{i=0}^{k(n,\beta)} i\binom{n}{i}.$$

Используя (1), (2) и (8), при $n \to \infty$ получаем

$$D = \frac{n\beta - k(n,\beta) + \frac{k(n,\beta)}{n-2k(n,\beta)}(1+o(1))}{k(n,\beta)+1-n\beta} \sum_{i=0}^{k(n,\beta)} \binom{n}{i}$$
$$= \left(\frac{1 + \frac{\beta}{1-2\beta}(1+o(1))}{k(n,\beta)+1-n\beta} - 1\right) \sum_{i=0}^{k(n,\beta)} \binom{n}{i}.$$

Если $k(n,\beta) = k_0$, то при $n \to \infty$

$$v(n,\beta) = |M| = \sum_{i=0}^{k_0} \binom{n}{i} + \lfloor D \rfloor = \left(\frac{1 + \frac{\beta}{1-2\beta}(1+o(1))}{k_0+1-n\beta}\right) \sum_{i=0}^{k_0} \binom{n}{i}. \tag{12}$$

Если $k(n,\beta) = k_0 + 1$, то из (11) при $n \to \infty$ имеем

$$v(n,\beta) = (1 + o(1)) \sum_{i=0}^{k_0+1} \binom{n}{i}. \tag{13}$$

Покажем, что формулы (12) и (13) асимптотически совпадают при условии (11), т. е. если

$$k_0 + 1 - \beta n - \frac{\beta}{1-2\beta} = o(1).$$

В этом случае из (12) следует, что

$$v(n,\beta) = \frac{1-\beta}{\beta}(1 + o(1)) \sum_{i=0}^{k_0} \binom{n}{i}.$$

В то время как из (1) и (9) при $n \to \infty$, получаем

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{k_0} \binom{n}{i}}{\sum\limits_{i=0}^{k_0+1} \binom{n}{i}} = 1 - \frac{\binom{n}{k_0+1}}{\sum\limits_{i=0}^{k_0+1} \binom{n}{i}} = \frac{\beta}{1-\beta}(1 + o(1)).$$

Таким образом, формула (12) в случае (10) совпадает с формулой (13). Это доказывает справедливость (12) независимо от того, какому из равенств $k(n,\beta) = k_0$ или $k(n,\beta) = k_0 + 1$ удовлетворяет число $k(n,\beta)$. Из (1) и (12) получаем утверждение леммы 2.

§ 2. Построение слов $\ell(n,\beta)$ и оценка их длины

Графом де Брейна порядка $n-1$ в алфавите $\{0,1\}$ называется ориентированный граф G_{n-1}, вершины которого помечены двоичными словами ($V(G_{n-1}) = \{0,1\}^{n-1}$), а дугой соединяются только вершины вида $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ и $x_2 x_3 \dots x_n$, причем дуга помечена словом $x_1 x_2 \dots x_n$. Степень захода и исхода каждой вершины равна двум. Эйлерову контуру в графе G_{n-1} соответствует *круговое слово де Брейна* $\ell(n)$. По построению, все слова длины n входят в качестве подслов в слово $\ell(n)$ по одному разу.

Построим слова $\ell(n,\beta)$ с частотой единиц непревышающей β, как эйлеровы контуры в подграфе графа де Брейна. Пусть $U(n,\beta) \subset \{0,1\}^*$ — множество двоичных слов, в каждом из которых нет одинаковых подслов длины n и доля единиц не превышает β, $0 < \beta < 1/2$. Обозначим через $d(n,\beta)$ длину максимального слова из $U(n,\beta)$, а через $\bar{d}(n,\beta)$ аналогичную величину для круговых слов. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $0<\beta<1/2$. *Тогда*

$$0 \leqslant v(n,\beta)-\bar{d}(n,\beta)<n.$$

Доказательство. Рассмотрим граф де Брейна G_{n-1}. Удалим из него все дуги, соответствующие словам с весом превосходящим $k(n,\beta)$, и все появившиеся изолированные вершины. Покажем, что полученный граф H является эйлеровым. Пусть слово $x\in\{0,1\}^{n-1}$ соответствует вершине графа H. Рассмотрим две пары дуг $1x$, $x1$ и $0x$, $x0$, в каждой из которых одна дуга является входящей, а другая исходящей из вершины x. Поскольку $wt(x1)=wt(1x)=wt(x)+1$ и $wt(x0)=wt(0x)=wt(x)$, то дуги $1x$, $x1$ и $0x$, $x0$ содержатся или не содержатся в графе H одновременно. Поэтому степень захода и степень исхода каждой вершины в графе H равны. Каждая вершина $x=(x_1,\dots,x_{n-1})$ графа H входит в контур

$$(x_1,\dots,x_{n-1}),(x_2,\dots,x_{n-1},0),\dots,(x_{n-1},0,\dots,0),$$
$$(0,\dots,0),(0,\dots,0,x_1),\dots,(0,x_1,\dots,x_{n-2}),$$

содержащий вершину $(0,\dots,0)$. Таким образом, граф H является связным и, следовательно, эйлеровым.

Рассмотрим $(k(n,\beta)+1)$-й слой $M_{k(n,\beta)+1}\subset\{0,1\}^n$. Дуги графа G_{n-1}, соответствующие словам из $M_{k(n,\beta)+1}$, можно разбить на контуры так, что каждый контур будет состоять из циклических сдвигов одного слова. Каждый такой контур проходит через вершину графа H, поскольку содержит дугу вида $(y_1,\dots,y_{n-1},1)$ и $wt(y_1,\dots,y_{n-1})=wt(y_1,\dots,y_{n-1},1)-1=k(n,\beta)$. Очевидно, что при добавлении произвольного числа таких контуров свойство эйлеровости графа сохраняется. Длины таких контуров не превышают числа n.

Добавим к графу H столько таких контуров, чтобы число дуг $|E(H')|$ в полученном графе H' удовлетворяло неравенству

$$v(n,\beta)-n<|E(H')|\leqslant v(n,\beta). \tag{14}$$

По построению средняя частота единиц в множестве $E(H')$ не превышает среднюю частоту единиц в множестве M, $|M|=v(n,\beta)$, которое удовлетворяет условию (6) при $k=k(n,\beta)$. Следовательно,

$$\left(\sum_{x\in E(H')} wt(x)\right)/(n|E(H')|)\leqslant\beta. \tag{15}$$

Эйлерову контуру в графе H' соответствует круговое слово $\ell(n,\beta)$ и из (14) имеем

$$|\ell(n,\beta)| = |E(H')| > v(n,\beta) - n. \tag{16}$$

Поскольку все подслова $x \in E(H')$ встречаются в слове $\ell(n,\beta)$ по одному разу, а каждая позиция буквы входит в n подслов длины n, то

$$wt(\ell(n,\beta)) = \frac{1}{n} \sum_{x \in E(H')} wt(x).$$

Тогда из (15) имеем неравенство $wt(\ell(n,\beta))/|\ell(n,\beta)| \leqslant \beta$, т. е. частота единиц в слове $\ell(n,\beta)$ не превосходит β. Так как $\bar{d}(n,\beta) \geqslant |\ell(n,\beta)|$ то, из (16) получаем

$$v(n,\beta) - \bar{d}(n,\beta) < n. \tag{17}$$

Непосредственно из определения величин $v(n,\beta)$ и $\bar{d}(n,\beta)$, следует, что

$$v(n,\beta) - \bar{d}(n,\beta) \geqslant 0.$$

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, леммы 2 и (16) имеем

Следствие 1. *Пусть* $0 < \beta < 1/2$ *и* $k_0 = \lceil \beta n + \beta/(1-2\beta) - 1 \rceil$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\ell(n,\beta)| = \frac{(1-\beta)(n-k_0)(1+o(1))}{(1-2\beta)(n-2k_0)(k_0 - n\beta + 1)} \binom{n}{k_0}. \tag{18}$$

Применяя формулу Стирлинга $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1+o(1))$ к равенству (18), нетрудно получить неравенства

$$C_1 \frac{e^{nh(\beta)}}{\sqrt{n}} \leqslant |\ell(n,\beta)| \leqslant C_2 \frac{e^{nh(\beta)}}{\sqrt{n}}, \tag{19}$$

где $h(\beta) = -\beta \ln \beta - (1-\beta)\ln(1-\beta)$ и $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — некоторые константы.

Из кругового слова $\ell(n,\beta)$ нетрудно построить более длинное обычное слово с аналогичными свойствами, а именно справедливо

Следствие 2. *При любом* β, $0 < \beta < 1/2$, *найдется слово* $w \in \{0,1\}^*$ *такое, что* $wt(w)/|w| \leqslant \beta$ *и*

$$|w| = |\ell(n,\beta)| + n + n \left\lfloor \frac{\beta(n-1)}{k_0 + 2 - \beta n} \right\rfloor - 1,$$

где $k_0 = \lceil \beta n + \beta/(1-2\beta) - 1 \rceil$.

Утверждение аналогичное теореме 1 справедливо для некруговых слов.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \beta < 1/2$. *Тогда*

$$v(n,\beta) + n\left\lfloor \frac{\beta(n-1)}{k_0 + 2 - \beta n} \right\rfloor - 1 < d(n,\beta) \leqslant v(n,\beta) + n + \frac{\beta n(n-1)}{k_0 + 1 - \beta n},$$

где $k_0 = \lceil \beta n + \beta/(1-2\beta) - 1 \rceil$.

Доказательство. Оценка снизу получается из следствия 2 и неравенства (16). Предположим найдется такое двоичное слово $w \in U(n,\beta)$, что $a = |w| - n - v(n,\beta) > 0$. В противном случае оценка сверху очевидна. Пусть $\bar{w}$ — круговое слово, полученное зацикливанием слова w. Пусть B — множество подслов длины n слова $\bar{w}$. Упорядочим подслова множества B по возрастанию веса и объединим $v(n,\beta)+1$ первых в множество B_1.

По определению числа $v(n,\beta)$, если $x \in B \backslash B_1$, то

$$wt(x) \geqslant k(n,\beta) + 1 \geqslant k_0 + 1$$

и

$$\left(\sum_{x \in B_1} wt(x) \right) \Big/ (n(v(n,\beta)+1)) \geqslant \beta. \tag{20}$$

Поскольку по крайней мере $|w| - n + 1$ подслов длины n слова $\bar{w}$ различны, то $|B \backslash B_1| \geqslant |w| - n + 1 - v(n,\beta) - 1 = a$. Следовательно, справедливы неравенства

$$\frac{wt(w)}{|w|} \geqslant \frac{\sum\limits_{x \in B} wt(x)}{n|w|} \geqslant \frac{(1+k_0)a + \sum\limits_{x \in B_1} wt(x)}{n|w|}. \tag{21}$$

Тогда из (20), (21) и определения слова w имеем

$$\beta \geqslant \frac{wt(w)}{|w|} \geqslant \beta \frac{v(n,\beta)+1}{|w|} + \frac{(k_0+1)a}{n|w|} = \beta \frac{|w| - n - a + 1}{|w|} + \frac{(k_0+1)a}{n|w|}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$a \leqslant \frac{\beta n(n-1)}{k_0 - \beta n + 1}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 3. Аддитивная сложность слов $\ell(n,\beta)$

Схемой конкатенации слова $w \in \{0,1\}^*$ называется последовательность слов $v(-1) = 0, v(0) = 1, v(1), \ldots, v(m) = w$ такая, что каждое слово $v(i)$ является конкатенацией двух предыдущих слов $v(j_1)$ и $v(j_2)$, т. е. $v(i) = v(j_1)v(j_2)$, где $j_1, j_2 < i$. *Аддитивной сложностью* слова w называется величина $l(w) = \min m$, где минимум берется по всем схемам конкатенации слова w.

Слово u называется *максимальным суффиксом* слова w, если w представимо в виде $w = vu$, где u является либо подсловом слова v, либо буквой. Причем слово u имеет максимальную возможную длину. Пусть $w = u(0)u(1)\ldots u(k)$, где $u(i)$ — максимальный суффикс слова $u(0)u(1)\ldots u(i)$. *Суффиксной сложностью* слова w называется величина $l^*(w) = k$. В работе [2] показано, что

$$l^*(w) \leqslant l(w) \tag{22}$$

для произвольного слова $w \in \{0,1\}^*$.

Рассмотрим множество слов

$$B(K,N) = \{w \in \{0,1\}^N \mid wt(w) = K\}.$$

Из работы [1] следует, что

$$\max_{w \in B(K,N)} l(w) = \frac{h(\beta)N}{\ln N}(1 + o(1)) \tag{23}$$

при $N \to \infty$ и $K/N \to \beta$, где $0 < \beta < 1/2$ и $h(\beta) = -\beta \ln \beta - (1-\beta)\ln(1-\beta)$.

Покажем, что среди слов $w \in B(K,N)$ максимум величины $l(w)$ асимптотически достигается на подсловах круговых слов $\ell(n, K/N)$.

Рассмотрим n такое, что

$$|\ell(n-1, K/N)| - n < N \leqslant |\ell(n, K/N)| - n. \tag{24}$$

Из максимальности слова $\ell(n, K/N)$ легко следует, что для достаточно больших N в круговом слове $\ell(n, K/N)$, удовлетворяющем неравенству (24), найдется подслово длины N с весом, большим K. Из определения слова $\ell(n, K/N)$ следует, что в нем найдется подслово длины N с весом, меньшим K. Поскольку в круговом слове имеются подслова одинаковой длины всех промежуточных весов, то в круговом слове $\ell(n, K/N)$ найдется подслово $u(N)$ длины N, содержащее K единиц. По определению слова $\ell(n, K/N)$ все подслова длины n в слове $u(N)$ различные. Тогда

$$l^*(u(N)) \geqslant \lfloor N/(n-1) \rfloor. \tag{25}$$

Из (19) и (24) имеем

$$C_1 \frac{e^{nh(\beta)}}{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant C_2 \frac{e^{nh(\beta)}}{\sqrt{n}},$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — некоторые константы. Тогда $n = \frac{\ln N}{h(\beta)}(1+o(1))$ при $N \to \infty$. Следовательно, из (22) и (25) при $N \to \infty$ и $K/N \to \beta$ получаем

$$l(u(N)) \geqslant \frac{Nh(\beta)}{\ln N}(1 + o(1)). \tag{26}$$

Таким образом из (23) и (26) вытекает, что слова $u(N)$ имеют асимптотически максимальную аддитивную сложность среди слов из $B(K, N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочергин В. В.** О мультипликативной сложности двоичных слов с заданным числом единиц // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. М.: Наука, 1999. С. 63–76.
2. **Мерекин Ю. В.** Нижняя оценка сложности для схем конкатенации слов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, №1. С. 52–56.
3. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
4. **Strassen V.** Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing. 1973. V. 11, N 3. P. 181–196.

Адрес автора:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: vpotapov@math.nsc.ru

Статья поступила
24 мая 2004 г.