ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 59–62

УДК 519.172

ОБ (1,1)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ МУЛЬТИГРАФОВ СТЕПЕНИ 4*)

А. В. Пяткин

Показано, что инциденторы любого мультиграфа степени 4 можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы любые два смежных инцидентора были раскрашены различно, а разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги была равна 1.

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Два инцидентора называем *однотипными*, если они оба являются либо начальными, либо конечными. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Раскраска инциденторов называется *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (1,1)-*раскраской*, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги равна 1. Наименьшее число цветов, необходимое для (1,1)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (1,1)-*хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{1,1}(G)$. Очевидно, что $\chi_{1,1}(G) \geq \Delta(G)$. В [2] доказано, что для однородного мультиграфа G равенство $\chi_{1,1}(G) = \Delta(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда Δ четно и ориентация мультиграфа G эйлерова, т. е. для каждой вершины полустепень захода равна полустепени исхода. В [3] построена бесконечная серия мультиграфов нечетной степени

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00039 и 02-01-00977) и молодежного гранта СО РАН.

Δ, (1,1)-хроматическое число которых превышает $\Delta+1$. Доказанная в [1] наилучшая известная верхняя оценка для (1,1)-хроматического числа имеет вид

$$\chi_{1,1}(G) \leqslant \lceil 3\Delta/2 \rceil. \quad (1)$$

В работе [3] было также высказано предположение, которое уместно сформулировать как гипотезу.

Гипотеза 1. *Для любого мультиграфа G четной степени $\Delta = 2t$ справедливо неравенство $\chi_{1,1}(G) \leqslant \Delta + 1$.*

Если эта гипотеза верна, то оценку (1) можно улучшить до $\chi_{1,1}(G) \leqslant \Delta(G)+2$. В настоящей статье эта гипотеза доказывается для $\Delta = 4$ (истинность гипотезы для $\Delta = 2$ установить нетрудно). Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *Для любого мультиграфа $G = (V, E)$ степени 4 справедливо неравенство $\chi_{1,1}(G) \leqslant 5$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма. *Пусть $H = (A, B; E')$ — неориентированный однородный двудольный мультиграф степени 2, где $E' = E_1 \cup E_2$. Тогда существует раскраска $f : E' \longrightarrow \{1, 2\}$, обладающая следующими свойствами:*

(a) если смежные дуги $e, e' \in E_j$, где $j = 1, 2$, то $f(e) \neq f(e')$;

(b) если $e = vx \in E_1$, $e' = vy \in E_2$ и $v \in B$, то $f(e) \neq f(e')$;

(c) если $e = vx \in E_1$, $e' = vy \in E_2$ и $v \in A$, то $f(e) \neq f(e') - 1$.

Доказательство. Ясно, что компоненты связности мультиграфа H являются четными циклами. Назовем вершину $u \in A$ *особой*, если ей инцидентно по одному ребру из E_1 и E_2. Допустим, что число особых вершин в цикле C нечетно. Пусть v_0 — особая вершина, которой инцидентны ребра $e_0 \in E_1$ и $e_1 \in E_2$. Полагаем $f(e_0) = 2$, $f(e_1) = 1$. Далее используем такую процедуру окраски ребер. Пусть $e_i = v_{i-1}v_i$ — последнее окрашенное ребро. Если вершина v_i особая, то дугу e_{i+1} красим тем же цветом, что и дугу e_i; в противном случае, красим ее другим цветом. Поскольку цикл C четный, то в нем содержится нечетное число неособых вершин, и, следовательно, в процессе раскраски цвет ребер сменится четное число раз (с учетом смены цвета при вершине v_0). Таким образом, построенная раскраска будет удовлетворять условиям (a)–(c). Если же C содержит четное число особых вершин, то можно положить $f(e_1) = 1$ для произвольно выбранного ребра e_1, после чего вышеуказанная процедура строит требуемую раскраску. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Можно считать, что мультиграф

$G = (V, E)$ однороден. Тогда для него существует эйлеров обход (разумеется, направление дуг мультиграфа может не совпадать с направлением обхода). Сначала разделим инциденторы мультиграфа на *четные* и *нечетные*. Такие названия оправданы тем, что при последующей раскраске инциденторов G в 5 цветов четные инциденторы будут красится четными цветами, а нечетные — нечетными. Допустим, эйлеров обход проходит дугу e от вершины v к вершине u. Тогда инцидентор (v, e) будет четным, а инцидентор (u, e) — нечетным. Нетрудно заметить, что инциденторы каждой дуги имеют разную четность, а к каждой вершине примыкают по два четных и нечетных инцидентора. Мультиграф H строится следующим образом. Каждой вершине $v \in V$ поставим в соответствие вершины $v_{odd} \in A$ и $v_{even} \in B$. Если у дуги $e = uv \in E$ инцидентор (u, e) четный, то ей соответствует ребро $u_{even}v_{odd} \in E_1$. В противном случае, ей соответствует ребро $u_{odd}v_{even} \in E_2$. Заметим, что ребра из E_1 соответствуют дугам, у которых начальный инцидентор четный, а ребра из E_2 — дугам, у которых начальный инцидентор нечетный. Ясно, что $H = (A, B; E_1 \cup E_2)$ является однородным двудольным мультиграфом степени 2. Обозначим через f раскраску его ребер, удовлетворяющую условиям леммы. Перейдем от нее к раскраске инциденторов мультиграфа G следующим образом. Если ребро, соответствующее дуге e, лежит в E_1, то ее начальный инцидентор красим цветом $2f(e)$, а конечный — цветом $2f(e)+1$. В противном случае, начальный инцидентор дуги e красим цветом $2f(e) - 1$, а конечный — цветом $2f(e)$. Получим раскраску инциденторов мультиграфа G в 5 цветов, в которой разность цветов начального и конечного инциденторов каждой дуги равна 1. Осталось показать, что эта раскраска является правильной. Пусть $i = (v, e)$ и $i' = (v, e')$ — два смежных инцидентора. Если ребра e и e' мультиграфа H инцидентны разным вершинам (т. е. вершинам v_{odd} и v_{even}), то цвета инциденторов i и i' имеют разную четность. Если оба эти ребра инцидентны вершине v_{even}, то цвета инциденторов i и i' различаются по условию (b) леммы. Если $e, e' \in E_j,\ j = 1, 2$ и оба ребра инцидентны вершине v_{odd}, то инциденторы i и i' являются однотипными, и по условию (a) леммы их цвета не совпадают. Наконец, пусть $e \in E_1,\ e' \in E_2$ и оба ребра инцидентны вершине v_{odd}. Тогда инцидентор i по построению является конечным, и его цвет равен $2f(e) + 1$, а инцидентор i' — начальным, и он окрашен цветом $2f(e') - 1$. Так как по условию (c) леммы имеем $f(e) \neq f(e') - 1$, то и цвета инциденторов i и i' не совпадают. Таким обазом, построенная раскраска является правильной. Теорема доказана.

Возникает естественный вопрос: верна ли лемма для мультиграфов более высокой степени? Автор предполагает, что да.

Гипотеза 2. Пусть $H = (A, B; E')$ — неориентированный однородный двудольный мультиграф степени t, где $E' = E_1 \cup E_2$. Тогда существует раскраска $f : E' \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\}$, обладающая следующими свойствами:

(a) если смежные дуги $e, e' \in E_j$, где $j = 1, 2$, то $f(e) \neq f(e')$;

(b) если $e = vx \in E_1,\ e' = vy \in E_2$ и $v \in B$, то $f(e) \neq f(e')$;

(c) если $e = vx \in E_1,\ e' = vy \in E_2$ и $v \in A$, то $f(e) \neq f(e') - 1$.

Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы, нетрудно показать, что гипотеза 1 следует из гипотезы 2. Однако ни доказать, ни опровергнуть гипотезу 2 автору пока не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
2. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
3. **Пяткин А. В.** Верхние и нижние оценки для инциденторного (k, l)–хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 93–102.

Адрес автора:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.

Статья поступила
3 июня 2004 г.