ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 63–79

УДК 519.175

ЦЕПНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО РАССТОЯНИЮ И ИЗОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ

О. В. Расин

Пусть d — некоторая натуральная константа. Обозначим через $\mathcal{G}_d$ класс всех связных графов, в которых степени вершин не превосходят d. В этой статье строится полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма для класса графов, которые обладают цепными разложениями по расстоянию с одноэлементным корневым множеством и компонентами из класса $\mathcal{G}_d$.

Введение

Всюду в этой статье под графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Проблема распознавания изоморфизма графов из данного класса состоит в построении полиномиального алгоритма, который для любых двух графов из этого класса определяет, являются ли они изоморфными. В настоящее время неизвестно существование полиномиального алгоритма решения проблемы изоморфизма произвольных графов. Для отдельных же классов графов такие алгоритмы найдены. Например, алгоритм Ахо–Хопкрофта–Ульмана для деревьев [2, гл. 3] и алгоритм Бабаи–Лакса для связных графов с ограниченными степенями вершин. Последнему алгоритму посвящена большая часть монографии [6].

Известно несколько подходов для решения проблемы изоморфизма графов. В этой статье представлены два — комбинаторный и теоретико-групповой. Комбинаторные алгоритмы используют методы дискретной оптимизации и теории графов. В качестве примера комбинаторного алгоритма можно привести уже упоминавшийся алгоритм Ахо–Хопкрофта–Ульмана. Алгоритмы, использующие теоретико-групповой подход, оперируют, как правило, группами автоморфизмов графов. Примером может служить алгоритм Бабаи–Лакса. Он и подобные ему алгоритмы в значительной степени используют некоторые алгоритмы для групп подстановок.

В настоящей статье рассматривается класс графов $\mathcal{PG}_d$, где d — некоторая натуральная константа. Определение этого класса графов дано в пункте 1. Указанный класс графов содержит, в частности, связные графы, в которых степени вершин не превосходят d. Нами построен полиномиальный алгоритм для проверки изоморфизма графов из $\mathcal{PG}_d$. Необходимо отметить, что после некоторой модификации приводимый здесь алгоритм может быть применен к более широкому классу графов (см. замечание после теоремы 2).

Излагаемый алгоритм использует как комбинаторный, так и теоретико-групповой подходы. Заметим также, что при его построении использовались результаты Бабаи и Лакса.

1. Предварительные сведения

Для каждого натурального числа b определим класс групп Γ_b, состоящий из конечных групп, имеющих такой композиционный ряд [3]

$$I = G^{(r)} \triangleleft \cdots \triangleleft G^{(1)} = G,$$

что индекс группы $G^{(i)}$ по подгруппе $G^{(i+1)}$ не превосходит b при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$. Очевидно, что $\Gamma_b \subset \Gamma_{b+1}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, которые можно найти в [6].

Лемма 1. (a) *Если $G \in \Gamma_b$, то любая подгруппа группы G содержится в Γ_b.*

(b) *Если $G \in \Gamma_b$, то любой гомоморфный образ группы G содержится в Γ_b.*

(c) *Если $N \triangleleft G$, причем $N \in \Gamma_b$ и $G/N \in \Gamma_b$, то $G \in \Gamma_b$.*

Определение 1. Пусть G — группа подстановок, определенная на множестве X, и $Y \subseteq X$. Подгруппа $N_G(Y) = \{g \in G \mid g(Y) \subseteq Y\}$ называется *стабилизатором множества Y в группе G*.

В дальнейшем мы будем рассматривать алгоритмы, использующие группы подстановок. Будем говорить, что известна группа подстановок $G \leqslant S_n$, если задано порождающее множество группы G, мощность которого не превосходит $p(n)$, где p — некоторый полином. Такие порождающие множества называются *порождающими множествами полиномиальной мощности*. Будем рассматривать порождающие множества только полиномиальной мощности, что не будем отмечать в явном виде. Более полную информацию о порождающих множествах в группах подстановок можно найти в [6]. Для удобства также будем предполагать, что любое множество, которое является порождающим множеством некоторой группы подстановок G, содержит единичный элемент id_G этой группы.

Лемма 2. *Пусть b — фиксированное натуральное число. Существует полиномиальный алгоритм, который для каждой группы подстановок $G \in \Gamma_b$ на множестве $\{1, \ldots, n\}$, заданной порождающим множеством K, и множества $Y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ за полиномиальное время от n находит порождающее множество группы $N_G(Y)$.*

Алгоритм, о существовании которого говорится в лемме 2, имеется, например, в монографии [6]. Время его работы оценивается довольно сложной функцией. Поэтому эта оценка не приводится. В дальнейших рассмотрениях нам будет достаточно его полиномиальности.

Теперь напомним некоторые необходимые понятия из теории графов. Будем придерживаться системы обозначений из книги [1].

Если U — подмножество множества вершин V графа G, то через $G(U)$ будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством U. В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Пусть G — некоторый граф, а u и v — его вершины. Длина кратчайшего маршрута из вершины u в вершину v называется расстоянием между вершинами u и v и обозначается через $d_G(u, v)$. В работе [5] введено следующее понятие.

Определение 2. *Древесным разложением* связного графа $G = (VG, EG)$ по расстоянию называется такая тройка $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F), r)$, что

1) $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = VG$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых различных i и j из I;

2) T является деревом с корнем в вершине $r \in I$;

3) если $v \in X_i$, то $d_G(X_r, v) = d_T(r, i)$;

4) для каждого ребра $\{v, w\} \in E$ существуют такие $i, j \in I$, что $v \in X_i$, $w \in X_j$ и либо $i = j$, либо $\{i, j\} \in F$. Множества X_i, где $i \in I$, называются *компонентами древесного разложения по расстоянию.* Множество X_r называют *корневым множеством.*

Если дерево $T = (I, F)$ является простой цепью, то такое древесное разложение по расстоянию называется *цепным разложением по расстоянию.*

Если корневое множество X_r является одноэлементным, т. е. $X_r = \{u\}$, где u — некоторая вершина графа G, то такое древесное разложение по расстоянию будем называть *древесным разложением по расстоянию с корнем в вершине u.*

Так как древесное разложение по расстоянию определяется только для связных графов, то говоря, что граф G обладает древесным разложением по расстоянию, мы подразумеваем, что G — связный граф.

Отметим, что в [5] был построен полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма связных графов, которые обладают такими древесными разложениями по расстоянию, что число вершин в каждой компоненте разложения не превосходит k, где k — некоторое натуральное число. Временна́я сложность этого алгоритма равна $O((k!)^2 k^2 n^{k+2})$, где n — число вершин в графах.

Определение 3. Пусть G — связной граф. Древесное разложение графа G по расстоянию $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F), r)$ будем называть *древесным $dist$-разложением графа G*, если $|X_r| = 1$ и для каждого $i \in I$ порожденные подграфы $G(X_i)$ графа G являются связными. В случае, когда дерево T является цепью, такое древесное $dist$-разложение будем называть *цепным $dist$-разложением.*

Ниже будем рассматривать только такие древесные разложения.

На рис 1. приведен пример древесного $dist$-разложения некоторого графа.

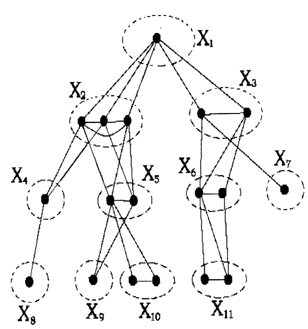

Рис. 1

Если существует древесное $dist$-разложение графа G с корнем в вершине u, то легко видеть, что оно единственно; мы будем обозначать его через D_u^G.

Нетрудно понять, что не для всякой вершины u произвольного связного графа G существует древесное $dist$-разложение с корнем в вершине u. В качестве примера можно использовать цикл C_4.

Если G — произвольный связный граф и u — некоторая его вершина, то за полиномиальное время можно определить существование древесного $dist$-разложения графа G с корнем в вершине u, и если такое разложение существует, то найти его за полиномиальное время.

Определение 4. Пусть u — вершина графа G, а v – вершина графа H. Графы G и H называются $[u, v]$-*изоморфными*, если существует изоморфизм графа G на граф H, отображающий вершину u на v.

Будем говорить, что древесные $dist$-разложения D_u^G и D_v^H графов G и H с корнями в вершинах u и v соответственно *изоморфны*, если $[u, v]$-изоморфны графы G и H.

Пусть d — некоторая натуральная константа. Обозначим через $\mathcal{G}_d$ класс всех связных графов, в которых степени вершин не превосходят d. Справедлив следующий весьма глубокий результат Бабаи–Лакса [6].

Лемма 3. *Пусть d — натуральная константа. Существует полиномиальный алгоритм, решающий проблему изоморфизма графов из $\mathcal{G}_d$.*

Также понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть d — натуральная константа. Если граф G принадлежит классу $\mathcal{G}_d$ и e — ребро в графе G, то группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_e(G)$ графа G, сохраняющая ребро e, принадлежит классу Γ_b, где $b = (d-1)!/2$. Кроме того, группа $\mathrm{Aut}_e(G)$ может быть найдена за полиномиальное время.*

Доказательство этой леммы содержится в [6]; там же приведен полиномиальный алгоритм нахождения группы $\mathrm{Aut}_e(G)$. Точная оценка сложности алгоритма нахождения $\mathrm{Aut}_e(G)$ не приводится по причинам, аналогичным тем, о которых говорилось после леммы 2.

В настоящей статье описывается полиномиальный алгоритм, решающий проблему изоморфизма для графов из следующего класса, обозначаемого через $\mathcal{PG}_d$. Будем говорить, что граф G принадлежит классу $\mathcal{PG}_d$, если он обладает таким цепным $dist$-разложением с компонентами $\{X_i \mid i \in I\}$, что подграф $G(X_i)$ принадлежит классу $\mathcal{G}_d$ при любом $i \in I$. Такие разложения будем называть *$\mathcal{G}_d$-цепными $dist$-разложениями.*

В дальнейшем будем предполагать, что цепь (I, F) является цепью натуральных чисел от 1 до $|I|$ с корнем в 1.

При построении алгоритмов будем также предполагать, что рассматриваемые графы задаются списками смежностей.

2. Алгоритм проверки изоморфизма графов из $\mathcal{PG}_d$

Пусть G и H — графы из класса $\mathcal{PG}_d$. В графе G зафиксируем такую вершину u, что существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_u^G графа G. Ясно, что графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда в графе H найдется такая вершина v, что G и H окажутся $[u, v]$-изоморфными (очевидно, что в этом случае существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_v^H графа H).

Таким образом, для установления изоморфизма графов G и H за полиномиальное время достаточно найти полиномиальный алгоритм, решающий следующую задачу.

Задача 1. *Даны два графа G, H и такая вершина u в графе G, что существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_u^G графа G, а v — такая вершина графа H, что существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_v^H графа H. Требуется выяснить существование $[u, v]$-изоморфизма графа G на граф H.*

Пусть $D^G = D_u^G = (X_1, \ldots, X_t)$ и $D^H = D_v^H = (Y_1, \ldots, Y_{t'})$, причем $X_1 = \{u\}$, $Y_1 = \{v\}$ и при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant t$, в X_i содержатся все вершины из G, находящиеся на расстоянии $i-1$ от корня, а при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant t'$, в Y_j содержатся все вершины из H, находящиеся на расстоянии $j-1$ от корня. Если $t \neq t'$, то, очевидно, что D^G и D^H неизоморфны. Поэтому будем считать, что $t = t'$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, обозначим через G_i подграф $G(X_i \cup X_{i+1})$ графа G. Аналогичное обозначение H_i используется для подграфов $H(X_i \cup X_{i+1})$ графа H.

Очевидно, что если существует отображение $f : VG \to VH$, ограничение которого на $X_i \cup X_{i+1}$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, является таким изоморфизмом графов G_i и H_i, что $f(X_i) = Y_i$ и $f(X_{i+1}) = Y_{i+1}$, то D^G и D^H изоморфны. Из определения изоморфизма цепных $dist$-разложений следует, что справедливо и обратное утверждение.

Предлагаемый алгоритм состоит из $t-1$ итераций. Для удобства читателей сначала обсудим работу алгоритма без детализации некоторых его шагов, а затем изложим алгоритм более подробно.

На первом шаге рассматриваются графы G_{t-1} и H_{t-1}. На множестве вершин графа $G_{t-1} \cup H_{t-1}$ строится $|Y_{t-1}| \cdot |Y_t|$ вспомогательных графов. Каждый автоморфизм вспомогательных графов, отображающий множества $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ и $X_t \cup Y_t$ на себя, является таким, что либо он стабилизирует множество вершин графа G_{t-1} и множество вершин графа H_{t-1}, либо переставляет их между собой. Во втором случае автоморфизм фактически индуцирует некоторый изоморфизм графа G_{t-1} на H_{t-1} и некоторый изоморфизм графа H_{t-1} на G_{t-1}. Вообще говоря, при подробном изложении алгоритма будет показано, что любой изоморфизм графа G_{t-1} на H_{t-1}, отображающий X_{t-1} на Y_{t-1} и X_t на Y_t, является ограничением некоторого автоморфизма одного из вспомогательных графов на множество вершин графа G_{t-1}. Таким образом, мы будем иметь информацию обо всех изоморфизмах графов G_{t-1} и H_{t-1}, отображающих X_{t-1} на Y_{t-1} и X_t на Y_t.

На следующем шаге рассматриваются графы G_{t-2} и H_{t-2}. На множестве вершин графа $G_{t-2} \cup H_{t-2}$ строится $|Y_{t-2}| \cdot |Y_{t-1}|$ вспомогательных графов . Каждый автоморфизм вспомогательного графа, отображающий множества $X_{t-2} \cup Y_{t-2}$ и $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ на себя, является таким, что он либо стабилизирует множество вершин графа G_{t-2} и множество вершин графа H_{t-2}, либо переставляет их между собой. Во втором случае автоморфизм фактически индуцирует некоторый изоморфизм графа G_{t-2} на H_{t-2} и некоторый изоморфизм графа H_{t-2} на G_{t-2}. Нам необходимо выделить лишь те изоморфизмы (если они есть), которые могут быть продолжены до изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}. Для этого используется информация, полученная на предыдущем шаге. Мы строим группу автоморфизмов каждого из вспомогательных графов такую, что все ограничения автоморфизмов на множество вершин G_{t-2}, содержащиеся в ней и являющиеся изоморфизмами графов G_{t-2} и H_{t-2}, могут быть доопределены на множестве вершин G_{t-1} до изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}. Вообще говоря, при подробном изложении алгоритма мы покажем, что любой изоморфизм графов G_{t-2} и H_{t-2}, который может быть доопределен на множестве вершин графа G_{t-1} до изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}, является ограничением некоторого автоморфизма одного из вспомогательных графов на множество вершин графа G_{t-1}.

Соответственно на i-й итерации рассматриваются графы G_{t-i} и H_{t-i}. Мы строим $|Y_{t-i}| \cdot |Y_{t-i+1}|$ вспомогательных графов на множестве вершин графов G_{t-i} и H_{t-i}. Каждый автоморфизм этих вспомогательных графов, отображающий множества $X_{t-i} \cup Y_{t-i}$ и $X_t \cup Y_t$ на себя, является таким, что либо он стабилизирует множество вершин графа G_{t-i} и множество вершин графа H_{t-i}, либо переставляет их между собой. Во втором случае автоморфизм фактически индуцирует некоторый изоморфизм графа G_{t-i} на H_{t-i} и некоторый изоморфизм графа H_{t-i} на G_{t-i}. Нам необходимо выделить лишь те изоморфизмы (если они есть), которые могут быть последовательно продолжены до изоморфизмов графов G_j и H_j, где $j = t-i+1, \ldots, t-1$. Для этого используется информация, полученная на предыдущих шагах. Мы строим группу автоморфизмов каждого из вспомогательных графов такую, что все ограничения автоморфизмов на множество вершин графа G_{t-i}, содержащиеся в ней и являющиеся изоморфизмами графов G_{t-i} и H_{t-i}, могут быть доопределены на множествах вершин G_{t-j} до изоморфизмов G_{t-j} и H_{t-j}, где $j = t-i+1, \ldots, t-1$. Причем каждый изоморфизм графов G_{t-i} и H_{t-i}, обладающий этим свойством, является ограничением некоторого автоморфизма одного из вспомогательных графов на множество вершин графа G_{t-i}.

Продолжаем этот процесс пока не дойдем до корней; если группа автоморфизмов одного из вспомогательных графов, построенных на множестве вершин графов G_1 и H_1 будет содержать автоморфизм, переставляющий вершину из X_1 и вершину из Y_1, то графы $[u, v]$-изоморфны, в противном случае они не являются $[u, v]$-изоморфными.

Теперь перейдем к подробному изложению. В каждом из множеств X_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, зафиксируем по одной вершине u_i. Ясно, что u_1 совпадает с u. На первом шаге рассматриваем графы G_{t-1} и H_{t-1}. Конечно, u_{t-1} и u_t являются вершинами графа G_{t-1}. Для каждой пары вершин (v_{t-1}, v_t) графа H_{t-1}, где $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ и $v_t \in Y_t$, рассмотрим граф $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, который получается объединением графов G_{t-1}, H_{t-1} и добавлением ребер $e_{t-1} = \{u_{t-1}, v_{t-1}\}$, $e_t = \{u_t, v_t\}$. На рис. 2 приведен пример построения графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$.

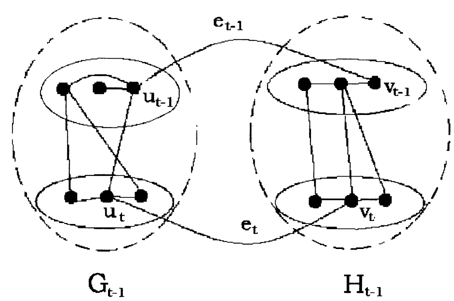

Рис. 2

Нас интересует группа $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$ автоморфизмов графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, стабилизирующая множества $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, $X_t \cup Y_t$ и сохраняющая ребра e_{t-1}, e_t. Понятно, что любой элемент из $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$ либо стабилизирует множества вершин G_{t-1} и H_{t-1}, либо переводит вершины из G_{t-1} в вершины из H_{t-1}, а вершины из H_{t-1} в вершины из G_{t-1}. Очевидно, что если мы сможем найти группу $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$, то, перебирая все возможные пары v_{t-1} и v_t, получаем информацию обо всех изоморфизмах графов G_{t-1} и H_{t-1}. Дело в том, что любой изоморфизм графов G_{t-1} и H_{t-1} совпадает с ограничением некоторого элемента (не обязательно единственного) группы $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$ на множество вершин $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$. Докажем, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$, где $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ и $v_t \in Y_t$, может быть найдена за полиномиальное время. Приводимое доказательство является конструктивным. По существу будет предложен алгоритм поиска группы

$\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$. Конечно, мы будем искать не саму группу, а ее порождающее множество полиномиальной мощности, но, как уже говорилось в разделе 1, при рассмотрении алгоритма мы не будем различать эти понятия.

Положим $Q_{t-1} = GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}(X_{t-1} \cup Y_{t-1})$ и $Q_t = GH_t^{v_{t-1},v_t}(X_t \cup Y_t)$. Очевидно, что степень каждой вершины в графах Q_{t-1} и Q_t не превосходит константы $d+1$. Поэтому можно найти группу автоморфизмов $A_{t-1} = \mathrm{Aut}_{e_{t-1}}(Q_{t-1})$ графа Q_{t-1}, сохраняющих ребро e_{t-1}, и группу автоморфизмов $A_t = \mathrm{Aut}_{e_t}(Q_t)$ графа Q_t, сохраняющих ребро e_{t-1}, за полиномиальное время (лемма 4). Так как группы A_{t-1} и A_t принадлежат классу Γ_b при некоторой константе b (лемма 4), то группа $A = A_{t-1} \times A_t$ также принадлежит классу Γ_b (лемма 1). Порождающее множество полиномиальной мощности группы A можно получить из порождающих множеств полиномиальной мощности групп A_{t-1} и A_t следующим образом: элементами порождающего множества группы A будут пары (g_{t-1}, id_t), где g_{t-1} пробегает все элементы порождающего множества группы A_{t-1}, а id_t является единицей группы A_t (выше мы договорились, что единица всегда является элеметом порождающего множества), и пары (id_{t-1}, g_t), где id_{t-1} является единицей группы A_{t-1}, а g_t пробегает все элементы порождающего множества группы A_t. Группа A действует на парах вершин (w_{t-1}, w_t) графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, где первая компонента пробегает множество вершин Q_{t-1}, а вторая — множество вершин Q_t. Пусть $E'_{t-1} = \{\{w_{t-1}, w_t\} \mid \{w_{t-1}, w_t\} \in EGH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}, w_{t-1} \in X_{t-1} \cup Y_{t-1}, w_t \in X_t \cup Y_t\}$. Поскольку согласно лемме 2 стабилизатор множества в группе класса Γ_b может быть найден за полиномиальное время, можно найти стабилизатор $N_A(E'_{t-1})$ множества E'_{t-1} в группе A за полиномиальное время. Нетрудно заметить, что любой элемент $g \in A$ однозначно представим в виде $g = (g_{t-1}, g_t)$, где g_{t-1} — подстановка на множестве $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, а g_t — подстановка на множестве $X_t \cup Y_t$. Поэтому любой элемент группы A является подстановкой на множестве вершин графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$. Таким образом, группа A, и, следовательно, ее подгруппа $N_A(E'_{t-1})$ действуют как группы подстановок на множестве вершин $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$. Обозначим группу $N_A(E'_{t-1})$ через N_{v_{t-1},v_t}. Предполагаем, что последняя действует на множестве вершин графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$.

Покажем, что группа N_{v_{t-1},v_t} совпадает с группой автоморфизмов графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, которые отображают множества $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ и $X_t \cup Y_t$ на себя и фиксируют ребра e_{t-1}, e_t. Тот факт, что $\mathrm{Aut}_{v_{t-1},v_t}(GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t})$ содержится в N_{v_{t-1},v_t}, вытекает из алгоритма построения группы N_{v_{t-1},v_t}. Докажем обратное включение. Предположим, что вершины w_1 и w_2 смежны в графе $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$. Пусть $\psi \in N_{v_{t-1},v_t}$. Очевидно, что если ребро $e = \{w_1, w_2\}$ совпадает с e_{t-1} или e_t, то вершины $\psi(w_1)$ и $\psi(w_2)$ смежны в графе $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, поскольку N_{v_{t-1},v_t} фиксирует e_{t-1} и e_t. Если $w_1, w_2 \in Q_{t-1}$, то $\psi(w_1)$ и $\psi(w_2)$ смежны, поскольку ограничение группы N_{v_{t-1},v_t} на множество вершин Q_{t-1} является подгруппой группы A_{t-1} . Аналогично рассматривается случай, когда $w_1, w_2 \in Q_t$. Если же $w_1 \in Q_{t-1}$, а $w_2 \in Q_t$, то, поскольку N_{v_{t-1},v_t} стабилизирует множество ребер $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, $\{\psi(w_1), \psi(w_2)\}$ тоже является ребром, а, следовательно, $\psi(w_1)$ и $\psi(w_2)$ смежны. То, что группа N_{v_{t-1},v_t} стабилизирует множества вершин $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ и $X_t \cup Y_t$, следует из алгоритма построения N_{v_{t-1},v_t}. Таким образом, за полиномиальное время можно определить группу автоморфизмов графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, стабилизирующих множества $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, $X_t \cup Y_t$ и фиксирующих ребра e_{t-1}, e_t.

Проведя описанные выше рассуждения, для каждой пары вершин $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ и $v_t \in Y_t$ за полиномиальное время находится группа N_{v_{t-1},v_t} автоморфизмов графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, стабилизирующих множества $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, $X_t \cup Y_t$ и фиксирующих ребра e_{t-1}, e_t.

Очевидно, что для любого изоморфизма ψ графов G_{t-1} и H_{t-1}, который отображает множество вершин X_{t-1} на Y_{t-1}, а множество вершин X_t на Y_t, найдется такая группа N_{v_{t-1},v_t}, где $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ и $v_t \in Y_t$, что ψ совпадает с ограничением некоторого элемента N_{v_{t-1},v_t} на множество $X_{t-1} \cup X_t$. Если некоторая группа N_{v_{t-1},v_t} не содержит подстановок, переставляющих u_{t-1} с v_{t-1}, то не существует изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}, переводящих u_{t-1}, u_t в v_{t-1}, v_t соответственно и отображающих X_{t-1} на Y_{t-1} и X_t на Y_t. Такие группы мы исключим из рассмотрения, положив $N_{v_{t-1},v_t} = \varnothing$. Заметим, что если $N_{v_{t-1},v_t} = \varnothing$ для каждой пары (v_{t-1}, v_t), то не существует изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}, отображающих X_{t-1} на Y_{t-1} и X_t на Y_t. Последнее означает, что графы G и H не являются $[u, v]$-изоморфными и в этом случае задача 1 решена. Для каждой вершины $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ такой, что $\bigcup\limits_{v_t \in Y_t} N_{v_{t-1},v_t} \neq \varnothing$, обозначим через $N_{v_{t-1}}$ группу, порождаемую множеством $\bigcup\limits_{v_t \in Y_t} N_{v_{t-1},v_t}$. Пусть $\overline{N}_{v_{t-1}}$ — ограничение группы $N_{v_{t-1}}$ на множество вершин $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$. Так как группа $N_{v_{t-1}}$ стабилизирует множество $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, то порождающее множество полиномиальной мощности для группы $\overline{N}_{v_{t-1}}$ получается из порождающего множества полиномиальной мощности группы $N_{v_{t-1}}$. Элементами порождающего множества полиномиальной мощности для группы $\overline{N}_{v_{t-1}}$ будут ограничения элементов из порождающего множества полиномиальной мощности группы $N_{v_{t-1}}$ на множество

$X_{t-1} \cup Y_{t-1}$. Очевидно, что любой элемент из $\overline{N}_{v_{t-1}}$ является $[u_{t-1}, v_{t-1}]$-автоморфизмом графа $G_{t-1}(X_{t-1}) \cup H_{t-1}(Y_{t-1})$, продолжаемым до автоморфизма графа $G_{t-1} \cup H_{t-1}$. Любой $[u_{t-1}, v_{t-1}]$-изморфизм графов $G_{t-1}(X_{t-1})$ и $H_{t-1}(Y_{t-1})$, который может быть продолжен до $[u_{t-1}, v_{t-1}]$-изоморфизма графов G_{t-1} и H_{t-1}, является ограничением некоторого элемента из $\overline{N}_{v_{t-1}}$ на множество X_{t-1}. Для каждой вершины $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ такой, что $\bigcup\limits_{v_t \in Y_t} N_{v_{t-1},v_t} = \varnothing$, положим $\overline{N}_{v_{t-1}} = \varnothing$ так как в этом случае графы $G_{t-1}(X_{t-1})$ и $H_{t-1}(Y_{t-1})$ не имеют $[u_{t-1}, v_{t-1}]$-изоморфизмов.

Рассмотрим графы G_{t-2} и H_{t-2}. Пусть $v_{t-2} \in Y_{t-2}$ и $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ — некоторые вершины графа H_{t-2}. Для пары вершин (v_{t-2}, v_{t-1}) графа H_{t-2} рассмотрим граф $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$, который получается объединением графов G_{t-2} и H_{t-2} и добавлением ребер $e_{t-2} = \{u_{t-2}, v_{t-2}\}$, $e_{t-1} = \{u_{t-1}, v_{t-1}\}$. Понятно, что любой автоморфизм графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$, стабилизирующий множества вершин $X_{t-2} \cup X_{t-1}$, $Y_{t-2} \cup Y_{t-1}$ и фиксирующий ребра e_{t-2}, e_{t-1}, либо стабилизирует множества вершин G_{t-2} и H_{t-2}, либо переводит вершины из G_{t-2} в вершины из H_{t-2}, а вершины из H_{t-2} в вершины из G_{t-2}. Покажем как за полиномиальное время найти группу $\mathrm{Aut}_{v_{t-2},v_{t-1}}(GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}})$ автоморфизмов графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$, стабилизирующих множества вершин $X_{t-2} \cup X_{t-1}$, $Y_{t-2} \cup Y_{t-1}$ и фиксирующих ребра e_{t-2}, e_{t-1}, которая обладает следующим свойством: для каждого элемента $\psi \in \mathrm{Aut}_{v_{t-2},v_{t-1}}(GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}})$, переставляющего концы ребер e_{t-2} и e_{t-1}, его ограничение на множество вершин графа G_{t-2} является изоморфизмом графов G_{t-2} и H_{t-2}, переставляющим вершину u_{t-2} с v_{t-2} (следовательно, u_{t-1} с v_{t-1}) и продолжаемым до изоморфизма графа G_{t-1} на граф H_{t-1}.

Положим $Q_{t-2} = GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}(X_{t-2} \cup Y_{t-2})$ и $Q_{t-1} = GH_{t-1}^{v_{t-2},v_{t-1}}(X_{t-1} \cup Y_{t-1})$. Очевидно, степень каждой вершины в графах Q_{t-2} и Q_{t-1} не превосходит константы $d+1$. Поэтому за полиномиальное время (лемма 4) можно найти группу автоморфизмов $A_{t-2} = \mathrm{Aut}_{e_{t-2}}(Q_{t-2})$ графа Q_{t-2}, сохраняющих ребро e_{t-2}. Кроме того, очевидно, что группа $\overline{N}_{v_{t-1}}$ является подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{e_{t-1}}(Q_{t-1})$ (предполагается, что $\overline{N}_{v_{t-1}} \neq \varnothing$) графа Q_{t-1}, сохраняющих ребро e_{t-1}. Из лемм 1 и 4 следует, что A_{t-2} и $\overline{N}_{v_{t-1}}$ принадлежат классу Γ_b при некоторой константе b. Согласно лемме 1 группа $A = A_{t-2} \times \overline{N}_{v_{t-1}}$ тоже принадлежат классу Γ_b. Порождающее множество полиномиальной мощности группы A можно получить из порождающих множеств полиномиальной мощности групп A_{t-2} и $\overline{N}_{v_{t-1}}$ следующим образом. В качестве элементов порождающего множества группы A берутся пары (g_{t-2}, id_{t-1}), где g_{t-2} пробегает все элементы порождающего множества группы A_{t-2}, а id_{t-1} является единицей группы $\overline{N}_{v_{t-1}}$, и пары (id_{t-2}, g_{t-1}), где id_{t-2} является единицей группы A_{t-2}, а g_{t-1} пробегает все элементы порождающего множества группы $\overline{N}_{v_{t-1}}$. Группа A действует на парах вершин (w_{t-2}, w_{t-1}) графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$, где первая компонента пробегает множество вершин графа Q_{t-2}, а вторая — множество вершин графа Q_{t-1}. Пусть $E'_{t-2} = \{\{w_{t-2}, w_{t-1}\} \mid \{w_{t-2}, w_{t-1}\} \in EGH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}, w_{t-2} \in X_{t-2} \cup Y_{t-2}, w_{t-1} \in X_{t-1} \cup Y_{t-1}\}$. Как следует из леммы 2, стабилизатор множества в группе класса Γ_b может быть найден за полиномиальное время. Это означает, что можно найти стабилизатор $N_A(E'_{t-2})$ множества E'_{t-2} в группе A за полиномиальное время. Нетрудно заметить, что любой элемент $g \in A$ однозначно представим в виде $g = (g_{t-2}, g_{t-1})$, где g_{t-2} — подстановка на множестве $X_{t-2} \cup Y_{t-2}$, а g_{t-1} — подстановка на множестве $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$. Поэтому любой элемент группы A является подстановкой на множестве вершин графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$. Таким образом, группа A, и, следовательно, ее подгруппа $N_A(E'_{t-2})$, действуют как группы подстановок на множестве вершин графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$. Обозначим группу $N_A(E'_{t-2})$ через $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$. Предполагаем, что последняя действует на множестве вершин графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$.

Покажем, что группа $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_{v_{t-2},v_{t-1}}(GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}})$. Тот факт, что $\mathrm{Aut}_{v_{t-2},v_{t-1}}(GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}})$ содержится в $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$, вытекает из алгоритма построения группы $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$. Докажем обратное включение. Пусть $\psi \in N_{v_{t-2},v_{t-1}}$. То, что ψ стабилизирует множества $X_{t-2} \cup Y_{t-2}$ и $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$, следует из алгоритма построения $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$. Проверка того, что ψ является автоморфизмом графа $GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}}$, который фиксирует ребра e_{t-2}, e_{t-1}, осуществляется также как на предыдущем шаге (при рассмотрении графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$). Теперь покажем, что ограничение ψ на множество $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ можно продолжить до автоморфизма некоторого графа $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$, где $v_t \in Y_t$. Пусть ϕ — ограничение ψ на множество $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$. Очевидно, что ϕ является элементом группы $\overline{N}_{v_{t-1}}$, каждый элемент которой может быть продолжен до автоморфизма $GH_{t-1}^{v_{t-1},v_t}$.

Проведя описанные выше рассуждения, мы для каждой пары вершин $v_{t-2} \in Y_{t-2}$ и $v_{t-1} \in Y_{t-1}$ находим за полиномиальное время группу $\mathrm{Aut}_{v_{t-2},v_{t-1}}(GH_{t-2}^{v_{t-2},v_{t-1}})$.

Если некоторая группа $N_{v_{t-2},v_{t-1}}$ не содержит подстановок, переставляющих u_{t-2} с v_{t-2}, то не существует $[u_{t-2}, v_{t-2}]$-изоморфизмов графов G_{t-2} и H_{t-2}, отображающих множество вершин X_{t-1} на Y_{t-1}, а множество вершин X_t на Y_t и продолжаемых до изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}. Такие группы мы исключим из рассмотрения, положив

$N_{v_{t-2},v_{t-1}} = \varnothing$. Заметим, что если $N_{v_{t-2},v_{t-1}} = \varnothing$ для каждой пары (v_{t-2}, v_{t-1}), то не существует изоморфизмов графов G_{t-2} и H_{t-2}, отображающих X_{t-1} на Y_{t-1} и X_t на Y_t и продолажемых до изоморфизмов графов G_{t-1} и H_{t-1}. Последнее означает, что графы G и H не являются $[u, v]$-изоморфными и в этом случае задача 1 решена. В противном случае для каждой вершины $v_{t-2} \in Y_{t-2}$ такой, что $\bigcup\limits_{v_t \in Y_t} N_{v_{t-2},v_{t-1}} \neq \varnothing$, обозначим через $N_{v_{t-2}}$ группу, порождаемую множеством $\bigcup\limits_{v_{t-1} \in Y_{t-1}} N_{v_{t-2},v_{t-1}}$. Пусть $\overline{N}_{v_{t-2}}$ — ограничение группы $N_{v_{t-2}}$ на множество вершин $X_{t-2} \cup Y_{t-2}$. Очевидно, что любой элемент из $\overline{N}_{v_{t-2}}$ является $[u_{t-2}, v_{t-2}]$-автоморфизмом графа $G_{t-2}(X_{t-2}) \cup H_{t-2}(Y_{t-2})$, стабилизирующим множества вершин $X_{t-2} \cup Y_{t-2}$ и $X_{t-1} \cup Y_{t-1}$ и продолжаемым до автоморфизма графа $G_{t-1} \cup H_{t-1}$. Любой $[u_{t-2}, v_{t-2}]$-изморфизм графов $G_{t-1}(X_{t-1})$ и $H_{t-1}(Y_{t-1})$, который может быть продолжен до $[u_{t-2}, v_{t-2}]$-изоморфизма графов G_{t-1} и H_{t-1}, совпадает с ограничением некоторого элемента из $\overline{N}_{v_{t-2}}$ на множество X_{t-2}. Для каждой вершины $v_{t-2} \in Y_{t-2}$ такой, что $\bigcup\limits_{v_{t-1} \in Y_{t-1}} N_{v_{t-2},v_{t-1}} = \varnothing$, положим $\overline{N}_{v_{t-2}} = \varnothing$.

Аналогичным образом, на i-й итерации рассматриваются графы G_{t-i} и H_{t-i}. Для каждой пары вершин (v_{t-i}, v_{t-i+1}), где $v_{t-i} \in Y_{t-i}$ и $v_{t-i+1} \in Y_{t-i+1}$ строится вспомагательный граф $GH_{t-i}^{v_{t-i},v_{t-i+1}}$. Затем, используя теоретико-групповые приемы аналогичные тем, что применялись выше, находим группы $\overline{N}_{v_{t-i}}$.

Наконец, на последнем шаге при рассмотрении графов G_1 и H_1 получаем единственную группу $\overline{N}_v$. Если она содержит подстановку переставляющую u с v, то графы G и H будут $[u, v]$-изоморфны, а, следовательно, они будут изоморфны. В противном случае графы G и H не являются $[u, v]$-изоморфными. Приведем описанные выше рассуждения в виде алгоритма.

Алгоритм 1.

Вход. Графы G и H из класса $\mathcal{PG}_d$. Пусть u — вершина графа G, а v — вершина графа H такие, для которых существуют $\mathcal{G}_d$-цепные $dist$–разложения $D_u^G = (X_1, \ldots, X_t)$ и $D_v^H = (Y_1, \ldots, Y_t')$ графов G и H соответственно.

Выход. Если D_u^G и D_v^H изоморфны, то алгоритм выдает $true$, в противном случае — $false$.

1. Если $t \neq t'$, то D_u^G и D_v^H не изоморфны и алгоритм выдает $false$. Иначе перейти к п. 2.

2. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, полагается $G_i := G(X_i \cup X_{i+1})$; $H_i := H(X_i \cup X_{i+1})$. Перейти к п. 3.

3. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, выбирается $u_i \in X_i$ (очевидно, что $u_1 = u$). Перейти к п. 4.

4. Положить $i := t-1$ и перейти к п. 5.

5. Положить $S_1 := Y_i$, $S_2 := Y_{i+1}$. Перейти к п. 6.

6. Если $S_1 = \varnothing$, перейти к п. 16. Иначе положить $S_1 := S_1 \setminus v_i$ и перейти к п. 7.

7. Если $S_2 = \varnothing$, перейти к п. 15. Иначе положить $S_2 := S_2 \setminus v_{i+1}$ и перейти к п. 8.

8. Положить $e_1 := \{u_i, v_i\}$; $e_2 := \{u_{i+1}, v_{i+1}\}$; $GH_i := (G_i \cup H_i) + e_1 + e_2$. Перейти к п. 9.

9. С помощью алгоритма, о котором говорится в лемме 4, находим подгруппу $A_1(v_i)$ группы автоморфизмов графа $GH_i(X_i \cup Y_i)$, фиксирующих ребро e_1. Если в $A_1(v_i)$ нет подстановок, переставляющих u_i и v_i, то положить $A_1(v_i) := \varnothing$ и перейти к п. 6. Иначе перейти к п. 10.

10. Если $i \neq t-1$, то перейти к п. 11. Иначе перейти к п. 12.

11. Если $\overline{N}_{v_{i+1}} = \varnothing$, то перейти к п. 7. Иначе положить $A_2(v_{i+1}) := \overline{N}_{v_{i+1}}$ и перейти к п. 13.

12. С помощью алгортма, о существовании которого говорится в лемме 4, находится подгруппа $A_2(v_{i+1})$ группы автоморфизмов графа $GH_i(X_{i+1} \cup Y_{i+1})$, фиксирующих ребро e_2. Если в $A_2(v_{i+1})$ нет подстановок, переставляющих u_{i+1} и v_{i+1}, то положить $A_2(v_{i+1}) := \varnothing$ и перейти к п. 7. Иначе перейти к п. 13.

13. Положить $A(v_i, v_{i+1}) := A_1(v_i) \times A_2(v_{i+1})$; $E'_i := \{(w_1, w_2) \mid w_1 \in X_i^G \cup X_i^H, w_2 \in X_{i+1}^G \cup X_{i+1}^H\}$. Находится стабилизатор $N_{v_i, v_{i+1}}$ множества E'_i в группе $A(v_i, v_{i+1})$ с помощью алгоритма, о котором говорится в лемме 2. Перейти к п. 14.

14. Если в $N_{v_i, v_{i+1}}$ нет подстановок, переставляющих u_i с v_i, то $N_{v_i, v_{i+1}} := \varnothing$. Перейти к п. 7.

15. Находится ограничение $\overline{N}_{v_i}$ группы, порождаемой множеством $\bigcup\limits_{v_{i+1} \in Y_{i+1}} N_{v_i, v_{i+1}}$, на множество $X_i \cup Y_i$. Перейти к п. 6.

16. Если $\overline{N}_{v_i} = \varnothing$ для каждой вершины $v_i \in Y_i$, то D_u^G, D_v^H не изоморфны и алгоритм выдает $false$. Иначе перейти к п. 17.

17. Положить $i := i-1$ и перейти к п. 18.

18. Если $i \geqslant 1$, перейти к п. 5. Иначе перейти к п. 19.

19. Если найдется $f \in \overline{N}_v$ такое, что $f(u) = v$, то графы G, D $[u, v]$-изоморфны, и алгоритм выдает $true$. В противном случае графы не $[u, v]$-изоморфны и алгоритм выдает $false$.

Теорема 1. *Пусть G и H — графы из класса $\mathcal{PG}_d$, и u, v — вершины* *графов G и H, для которых существуют $\mathcal{G}_d$-цепные $dist$–разложения D_u^G и D_v^H. Алгоритм 1 за полиномиальное время устанавливает являются ли $[u,v]$-изоморфными графы G и H.*

Доказательство. Покажем, что сложность этого алгоритма полиномиальна от числа вершин. Пусть n — число вершин в каждом из графов G и H. Оценим временну́ю сложность i-й итерации. Рассмотрим цикл в пп. 7–14. Этот цикл состоит из $|Y_{i+1}|$ итераций. Ясно, что $|Y_{i+1}| \leqslant n$. Сложность действий в п. 9 не превосходит $F_i(n,d)$, где $F_i(n,d)$ — полином, степень которого является некоторой функцией от d. Если $i = t-1$, то выполняется п. 12, сложность которого не превосходит $F_{i+1}(n,d)$, где $F_{i+1}(n,d)$ — полином, степень которого является некоторой функцией от d. В п. 13 находится стабилизатор множества в группе $A(v_i, v_{i+1})$, которую можно интерпретировать как группу подстановок на n^2-элементном множестве. Сложность п. 13 не превосходит $B_{i+1}(n,d)$, где $B_{i+1}(n,d)$ — полином, степень которого является некоторой функцией от d. Таким образом сложность действий в пп. 7–14 не превосходит $O(|Y_{i+1}| \cdot (F_{i+1}(n,d) + B_{i+1}(n,d)) + F_i(n,d))$, если $i = t-1$, и не превосходит $O(|Y_{i+1}|B_{i+1}(n,d) + F_i(n,d))$, если $i \neq t-1$, т. е. полиномиальна. Цикл в пп. 7–14 выполняется $|Y_i|$ раз. Таким образом, действия в пп. 6–15 имеют полиномиальную сложность. Так как в пп. 4–17 выполняется не более n итераций, то, легко видеть, что алгоритм 1 полиномиальный. Более точная оценка времени работы алгоритма не приводится, так как он использует алгоритмы, о которых говорится в леммах 2 и 4.

Ниже приводится алгоритм проверки изоморфизма графов из класса $\mathcal{PG}_d$.

Алгоритм 2.

Вход. Графы G и H из $\mathcal{PG}_d$.

Выход. $True$, если графы изоморфны; $false$ в противном случае.

1. В графе G находится вершина u, для которой существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_u^G графа G. Перейти к п. 2.

2. Положить $S := VH$ и перейти к п. 3.

3. Если $S = \varnothing$, то графы не изоморфны и алгоритм выдает $false$. В противном случае перейти к п. 4.

4. Выбирается произвольное $v \in S$ и полагается $S := S \setminus v$. Если существует $\mathcal{G}_d$-цепное $dist$-разложение D_v^H графа H, то перейти к п. 5. Иначе перейти к п. 3.

5. С помощью алгоритма 1 проверяется, будут ли $[u,v]$-изоморфны графы G и H; если да, то графы изоморфны и алгоритм выдает $true$. Иначе переход к п. 3.

Теорема 2. *Пусть G и H — графы из класса $\mathcal{PG}_d$. Алгоритм 2 за полиномиальное время проверяет изоморфность графов G и H.*

Полиномиальность алгоритма 2 непосредственно вытекает из теоремы 1.

Замечание. В работе [4] рассматриваются 2-параметрические семейства графов $\Pi(s,t)$ для целых чисел $s \geqslant 0$ и $t \geqslant 1$. Там же описан алгоритм распознавания изоморфизма двух произвольных $\Pi(s,t)$-графов с временно́й сложностью $O(n^{s+c_t})$, где n — число вершин в графах, а c_t — параметр, зависящий только от t. Семейству $\Pi(s,t)$-графов принадлежат многие известные классы графов, для которых известны полиномиальные алгоритмы проверки изоморфизма. В частности, связные графы, в которых степени вершин не превосходят d, относятся к семейству $\Pi(1,d)$-графов.

Если рассматривать графы, обладающие цепными $dist$-разложениями с компонентами из $\Pi(s,t)$, то можно показать, что для класса таких графов можно построить полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма. Для этого достаточно:

1) вместо операции добавления ребер к объединению графов (см., например, п. 8 алгоритма 1) воспользоваться ее аналогом из [4] — процедурой сведе́ния задачи проверки изоморфизма для $\Pi(s,t)$-графов к задаче поиска порождающего множества группы автоморфизмов для $\Pi(0,t)$-графов.

2) вместо приведенной выше леммы 4 воспользоваться леммой 2.3 из [4] и обсуждением после нее.

Пусть k — произвольное натуральное число. Необходимо отметить, что в [5] построен полиномиальный алгоритм с временно́й сложностью $O((k!)^2k^2n^2)$, который для любых двух n-вершинных графов, обладающих такими цепными разложениями по расстоянию, в которых число вершин в каждой компоненте не превосходит k и корневое множество одноэлементно, устанавливает изоморфны они или нет.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю В. А. Баранскому за внимание к работе и замечания, способствовавшие ее улучшению.

Автор также выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, высказанные при ознакомлении с первоначальным вариантом статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. **Ахо Х., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
3. **Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
4. **Пономаренко И. Н.** Проблема изоморфизма для классов графов. 1989. Докл. АН СССР. Т. 304, № 3. С. 552–556.
5. **Bodlaender H. L., de Fluiter B., Thilikos D. M., Yamazaki K.** Isomorphism for graphs of bounded distance width. Algorithmica. 1999. V. 24, N 2. P. 105–127.
6. **Hoffmann C. M.** Group-theoretics algorithms and graph isomorphism. Berlin: Springer-Verlag, 1982. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 136.)

Адрес автора:
Уральский гос. университет,
пр. Ленина, 51,
620083 Екатеринбург,
Россия.
E-mail: ovr@r66.ru

Статья поступила
2 марта 2003 г.

Переработанный вариант —
26 февраля 2004 г.