ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2004. Серия 1. Том 11, № 3, 88–110

УДК 519.816

РАСПОЗНАВАНИЕ СВОЙСТВ ПОРЯДКОВЫХ ОТНОШЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*)

Л. А. Шоломов

Изучаются порядковые отношения в пространствах $\mathbb{X} = X_1 \times \dots \times X_n$ с шкалами X_i, принимающими конечное множество значений. Предложен и исследован общий подход, позволяющий сводить задачи анализа таких отношений к аналогичным задачам для отношений в $\mathbb{R}^n$. С его помощью установлено, что многие результаты, доказанные ранее для порядковых отношений в $\mathbb{R}^n$, распространяется на произвольные пространства не менее чем с трехзначными шкалами. В случае двузначных шкал свойства отношений существенно меняются.

Введение

Рассматриваются отношения в пространствах $\mathbb{X} = X_1 \times \dots \times X_n$, где X_i — подмножества множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Частными случаями таких пространств являются $\mathbb{R}^n$ и $E_k^n = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$. Отношения являются порядковыми, т. е. для каждой пары точек из $\mathbb{X}$ однозначно определяются соотношениями (больше, меньше, равно) одноименных компонент. Они допускают задание булевыми функциями от покомпонентных соотношений. Задача распознавания свойств отношений состоит в том, чтобы по представляющим их булевым функциям узнать, обладают ли они заданным свойством. Для порядковых отношений на $\mathbb{R}^n$ в [6] проведено исследование на NP-трудность и полиномиальность задач распознавания наиболее употребительных свойств отношений и в определенном смысле получены окончательные результаты.

Порядковые отношения часто используются в задачах многокритериального выбора вариантов, когда точки пространства $\mathbb{X}$ интерпретируются как наборы оценок вариантов по n заданным критериям. Методы распознавания свойств таких отношений представляют значительный

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ОИТВС РАН по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем» и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–000329).

интерес для анализа моделей выбора и построения моделей с заданными свойствами [1, 3]. В прикладных задачах выбора обычно применяются критерии с ограниченным множеством значений — качественные, балльные, количественные с конечными шкалами. Но в теории изучают порядковые отношения на $\mathbb{R}^n$ и именно для них получены основные результаты [1, 3, 5, 6]. Отношения на $\mathbb{R}^n$ обладают рядом полезных свойств, облегчающих их исследование. Так, например, произведение порядковых отношений в пространстве $\mathbb{R}^n$ является порядковым, а в пространствах с конечными шкалами X_i нет. Доказательства для пространства $\mathbb{R}^n$ используют его плотность и на случай пространств с конечными шкалами не переносятся, некоторые результаты приобретают другой вид.

В данной статье развит подход, сводящий исследование свойств порядковых отношений в пространствах с конечными шкалами к аналогичным задачам для $\mathbb{R}^n$. Он родствен подходам, применяемым в математической логике и теории моделей. Свойства отношений предполагаются универсально аксиоматизируемыми, т. е. задаваемыми системами аксиом, использующих лишь кванторы общности (наиболее употребительные свойства отношений являются такими). Сформулировано условие, при котором модели отношений с заданными свойствами в пространствах с конечными шкалами не отличимы от моделей на $\mathbb{R}^n$. Это дало возможность перенести большинство результатов, методов и алгоритмов, полученных для $\mathbb{R}^n$, на пространства с произвольными шкалами, содержащими не менее 3 элементов. Для пространства E_2^n ситуация оказалась принципиально иной. Несколько особняком стоит свойство ацикличности отношений, описываемое счетным числом аксиом. К нему подход применим в ограниченном виде.

Изложение некоторых результатов данной работы, в большей мере ориентированное на задачи выбора, имеется в [7].

1. Порядковые отношения и их представляющие функции

Будем рассматривать бинарные отношения ρ на $\mathbb{X} = X_1 \times \cdots \times X_n$ – декартовом произведении некоторых подмножеств X_i множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Число n будем называть *размерностью пространства* $\mathbb{X}$, а также *размерностью отношения* ρ на $\mathbb{X}$. Упорядоченное множество X_i назовем *шкалой*. Его мощность $|X_i|$ будем называть *индексом шкалы* i и обозначать через κ_i. Индексы могут быть конечными и бесконечными. Минимальный из индексов κ_i шкал, образующих пространство $\mathbb{X}$, обозначим через $\kappa(\mathbb{X})$ и назовем *индексом пространства* $\mathbb{X}$.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$ положим

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\operatorname{sgn}(x_1 - y_1), \ldots, \operatorname{sgn}(x_n - y_n)),$$

где $\operatorname{sgn} z$ равен -1, 0 и 1 при $z < 0$, $z = 0$ и $z > 0$ соответственно. Отношение ρ на $\mathbb{X}$ называется *порядковым*, если для $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{X}$

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \Longrightarrow \mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}'\rho\mathbf{y}'.$$

Порядковое отношение (ПО) ρ, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$ удовлетворяющее условию

$$\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}\rho\mathbf{y},$$

где $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \Leftrightarrow z_1 \geqslant x_1, \ldots, z_n \geqslant x_n$, называется *правильным*.

Пусть ρ — отношение на $\mathbb{X}$ (не обязательно порядковое). *Порядковым замыканием* отношения ρ называется наименьшее ПО ρ' на $\mathbb{X}$, включающее ρ. Для $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{X}$

$$\mathbf{x}'\rho'\mathbf{y}' \Leftrightarrow \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}\ (\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \mathbf{x}\rho\mathbf{y}).$$

Для порядкового замыкания отношения ρ будем использовать обозначение $[\rho]$.

Дальше будем считать, что $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 2$. Тогда множество всех $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ совпадает с $\{-1, 0, 1\}^n$ и отношение однозначно распространяется на любые $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Иногда удобно разделить само отношение ρ, определяемое 3^n значениями $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, и область его определения $\mathbb{X}$. При этом будем говорить об отношении ρ на множестве $\mathbb{X}$ и использовать обозначение $(\rho, \mathbb{X})$. Отношение ρ на всем $\mathbb{R}^n$ будем называть *пополнением* исходного отношения.

Укажем способ задания порядковых отношений булевыми функциями от $2n$ переменных [5, 6].

Введем бинарные отношения p_i и p_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на $\mathbb{R}^n$, положив $\mathbf{x}p_i\mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i$, $\mathbf{x}p_i'\mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i$. Соотношения $x_i > y_i$, $x_i < y_i$ и $x_i = y_i$ выразимы через эти отношения:

$$x_i > y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}p_i\mathbf{y}, \quad x_i < y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}\bar{p}_i'\mathbf{y}, \quad x_i = y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}(p_i' \wedge \bar{p}_i)\mathbf{y}.$$

Так как ПО ρ однозначно определяется результатами сравнения по величине одноименных компонент x_i и y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то ρ представимо в виде

$$\rho = g_\rho(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n') = g_\rho(P, P'), \tag{1}$$

где g_ρ — булева функция, называемая *представляющей функцией* отношения ρ. Равенство (1) означает, что

$$\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow g_\rho(\mathbf{x}p_1\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p_n\mathbf{y}, \mathbf{x}p_1'\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p_n'\mathbf{y}).$$

Переменные функции g_ρ удовлетворяют неравенству $p_i \leqslant p'_i$, поскольку $\mathbf{x}p_i\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}p'_i\mathbf{y}$.

Укажем некоторые факты, относящиеся к функциям $g(P, P')$ (подробнее в [5, 6]). С учетом эквивалентных соотношений $p_i \wedge p'_i = p_i$ и $\bar{p}'_i \wedge \bar{p}_i = \bar{p}'_i$ любая конъюнкция $K \not\equiv 0$ от переменных (P, P') может быть приведена к виду $K = q_1 q_2 \ldots q_n$ (знаки $\wedge$ конъюнкции опущены), где $q_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$ ($q_i = 1$ означает отсутствие соответствующего сомножителя). Такие конъюнкции будем называть *элементарными конъюнкциями*, а сомножители q_i – *элементарными сомножителями*. Дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Всякая функция $g(P, P') \not\equiv 0$ представима в виде ДНФ, а ДНФ функции $g \equiv 0$ считаем равной 0. Легко видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда функция $g_\rho(P, P')$ монотонна, т. е. $g_\rho(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \geqslant g_\rho(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}')$ для любых $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \geq (\tilde{\tau}, \tilde{\tau}')$. Можно доказать, что она единственным образом реализуется *приведенной* ДНФ, т. е. ДНФ, не содержащей отрицаний переменных и поглощаемых с учетом соотношений $p_i \leqslant p'_i$ конъюнкций (K_1 поглощает K_2, если $K_1 \geqslant K_2$).

Двойственным образом вводится понятие *элементарной дизъюнкции* $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$, где $d_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p_i \vee \bar{p}'_i, 0\}$ называется *элементарным слагаемым*. Всякая функция $g(P, P') \not\equiv 1$ представима *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) — конъюнкцией элементарных дизъюнкций, а всякая монотонная функция $g(P, P') \not\equiv 1$ единственным образом представима *приведенной* КНФ, т. е. КНФ, не содержащей отрицаний переменных и поглощаемых дизъюнкций (D_1 поглощает D_2, если $D_1 \leqslant D_2$).

Примером правильного ПО является *лексикография*:

$$\mathbf{x}\lambda\mathbf{y} \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1, x_2 > y_2) \vee \ldots \vee (x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k > y_k).$$

При $k < n$ она называется *неполной*, а при $k = n$ — *полной*. Приведенная ДНФ представляющей функции лексикографии имеет вид

$$g_\lambda = p_1 \vee p'_1 p_2 \vee p'_1 p'_2 p_3 \vee \ldots \vee p'_1 \ldots p'_{k-1} p_k. \tag{2}$$

Задача распознавания свойств порядковых отношений состоит в том, чтобы по представляющей функции g_ρ узнать, обладает ли отношение $(\rho, \mathbb{X})$ рассматриваемым свойством. Представляющие функции будем полагать заданными посредством ДНФ или КНФ. Для ПО общего вида ДНФ и КНФ будем считать произвольными, для правильных отношений — приведенными.

2. Сведение к случаю отношений на $\mathbb{R}^n$

Задача распознавания свойств порядковых отношений ранее исследовалась для отношений на $\mathbb{R}^n$ и получен ряд окончательных результатов [5, 6]. Ниже описывается подход, позволяющий перенести большинство из них на произвольные пространства $\mathbb{X} = X_1 \times \cdots \times X_n$. Он применим и к другим типам отношений, поэтому излагается в более общей форме.

Бинарное отношение r, заданное на некотором множестве X, можно понимать как бинарный предикат $r(x, y) = xry$ на X. Содержательные свойства отношений обычно задаются системами аксиом, имеющих вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_t F(x_1, x_2, \ldots, x_t), \tag{3}$$

где F — бескванторная формула, содержащая в качестве предикатных символов лишь r и, возможно, $=$ (равенство). В соответствии с терминологией из [4] свойства отношений, задаваемые системами аксиом вида (3), будем называть *универсально аксиоматизируемыми.* Кванторы $\forall$ будем опускать и записывать аксиому (3) в виде $F(x_1, x_2, \ldots, x_t)$.

Сформулируем наиболее употребительные свойства бинарных отношений (записи $x \neq y$ и $x\bar{r}y$ используются вместо $\neg(x = y)$ и $\neg(xry)$). Отношение r называется (а) *рефлексивным*, (б) *иррефлексивным*, (в) *асимметричным*, (г) *антисимметричным*, (д) *полным*, (е) *связным*, (ж) *транзитивным*, (и) *негатранзитивным*, (к) *ацикличным*, если (а) xrx, (б) $x\bar{r}x$, (в) $xry \to y\bar{r}x$, (г) $x \neq y \wedge xry \to y\bar{r}x$, (д) $xry \vee yrx$, (е) $x \neq y \to xry \vee yrx$, (ж) $xry \wedge yrz \to xrz$, (и) $x\bar{r}y \wedge y\bar{r}z \to x\bar{r}z$, (к) $x_1rx_2 \wedge x_2rx_3 \wedge \ldots \wedge x_{s-1}rx_s \to x_s\bar{r}x_1$, $s = 1, 2, \ldots$

Здесь все свойства кроме ацикличности задаются одной аксиомой вида (3), а ацикличность — счетным числом аксиом.

Рангом аксиомы (3) называется число t входящих в нее переменных. *Ранг системы аксиом* считается равным максимальному из рангов входящих в нее аксиом, если система конечна, и полагается равным ω в случае бесконечной ситемы. *Рангом универсально аксиоматизируемого свойства* называется минимальный из рангов задающих его систем аксиом (считается, что ω больше любого числа).

Пусть на множестве пар $(x, y) \in X^2$ задано отношение эквивалентности $\sim$. Эквивалентность $\sim$ называется *строгой*, если из $(x, y) \sim (x', y')$ и $x = y$ следует $x' = y'$. Дальше будем рассматривать только строгие эквивалентности. Множество X', $X' \subseteq X$, называется *s-представительным* (для X относительно эквивалентности $\sim$), если для любых $x_1, \ldots, x_s \in X$ найдутся $x'_1, \ldots, x'_s \in X'$ такие, что

$$(x'_i, x'_j) \sim (x_i, x_j), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant s. \tag{4}$$

Множество X', s-представительное при любом $s \geqslant 1$, называется *ω-представительным.* Отметим, что из s-представительности, $s \in N \cup \{\omega\}$, следует s'-представительность для $s' \leqslant s$, а s-представительность множества X' влечет s-представительность X'', $X'' \supseteq X'$.

Эквивалентность $\sim$ задает класс $\mathcal{K}_\sim$ отношений r на X, удовлетворяющих условию

$$(x, y) \sim (x', y') \Longrightarrow xry \Leftrightarrow x'ry'.$$

В этих терминах может быть описан класс порядковых отношений, если положить $X = \mathbb{R}^n$ и

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \Longleftrightarrow \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}'). \tag{5}$$

Подобным образом описываются и другие типы отношений, применяемые в процедурах выбора, — относительные, интервальные [1], квазикоординатные [3].

Для отношения r на множестве X будем использовать обозначение (r, X). Если $X' \subseteq X$, то (r, X') означает отношение $r \cap (X')^2$.

Теорема 1. *Если Φ — универсально аксиоматизируемое свойство ранга не выше s, $s \in N \cup \{\omega\}$, множество X' является s-представительным для X и (r, X) — отношение класса $\mathcal{K}_\sim$, то отношение (r, X') обладает свойством Φ тогда и только тогда, когда им обладает (r, X).*

Доказательство. Если отношение (r, X) удовлетворяет свойству Φ, то, поскольку универсально аксиоматизируемое свойство наследуется меньшими множествами, оно выполнено и для (r, X').

Обратно, пусть (r, X') удовлетворяет свойству Φ. Рассмотрим систему аксиом, в которой достигается ранг этого свойства, и одну из ее аксиом (3). Возьмем произвольные $x_1, \ldots, x_t \in X$. В силу s-представительности X' и $t \leqslant s$ найдутся $x'_1, \ldots, x'_t \in X'$, для которых имеет место (4) (при замене s на t). Из определения класса $\mathcal{K}_\sim$ и строгости эквивалентности $\sim$ следует $x_i r x_j \Leftrightarrow x'_i r x'_j$ и $x_i = x_j \Leftrightarrow x'_i = x'_j$. Поэтому формула F в (3), истинная для $x'_1, \ldots, x'_t$, будет истинной для $x_1, \ldots, x_t$. Следовательно, (r, X) также будет удовлетворять аксиоме (3).
Теорема 1 доказана.

Обозначим через E_k^n декартову степень множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k - 1\}$. Допускается $k = \omega$, где $E_\omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = N$.

Лемма 1. *При любом $s \in N \cup \{\omega\}$ множество E_s^n является s-представительным для $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_u =$

$(x_{u1}, \dots, x_{un})$, $1 \leqslant u \leqslant s$. Найдутся числа $x'_{1i}, \dots, x'_{si} \in E_s$ такие, что $\operatorname{sgn}(x'_{ui} - x'_{vi}) = \operatorname{sgn}(x_{ui} - x_{vi})$, $1 \leqslant u, v \leqslant s$. Наборы $\mathbf{x}'_u = (x'_{u1}, \dots, x'_{un}) \in E^n_s$, $1 \leqslant u \leqslant s$, и удовлетворяют соотношениям (4) для эквивалентности (5). Лемма 1 доказана.

С учетом леммы 1 переформулируем теорему 1 применительно к порядковым отношениям на $\mathbb{X} = X_1 \times \dots \times X_n$.

Теорема 2. *Если ранг универсально аксиоматизируемого свойства* Φ *не превышает* s, $s \in N \cup \{\omega\}$, *а индекс* $\kappa($
$mathbbX)$ *пространства* $\mathbb{X}$ *не ниже* s, *то порядковое отношение* $(\rho, \mathbb{X})$ *обладает свойством* Φ *тогда и только тогда, когда им обладает его пополнение.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathbb{X} \supseteq E^n_s$. Поскольку свойство s-представительности распространяется на бóльшие множества, к $\mathbb{X}$ применима теорема 1.

Следствие 1. *Порядковое отношение* $(\rho, \mathbb{X})$ *(на произвольном* $\mathbb{X}$*) обладает одним из свойств рефлексивности, иррефлексивности, асимметрии, антисимметрии, полноты и связности тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает его пополнение* ρ. *В случае, когда* $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$, *аналогичное утверждение справедливо также для свойств транзитивности и негатранзитивности.*

Условие $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ для свойств транзитивности и негатранзитивности существенно. Отношение ρ_1 (см. дальше (8)) транзитивно и негатранзитивно в E^3_2 и не обладает ни одним из этих свойств в $\mathbb{R}^3$.

Большинство результатов, методов и алгоритмов, относящихся к указанным свойствам и доказанным в [5, 6] для ПО на $\mathbb{R}^n$, следствие 1 позволяет распространить на произвольные пространства $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ (см. ниже). Отметим, что сами доказательства из [5, 6], использующие плотность пространства $\mathbb{R}^n$, не переносятся на дискретный случай.

Свойство ацикличности, имеющее бесконечный ранг, требует отдельного рассмотрения. К нему применим следующий общий факт, вытекающий из теоремы 2 при $s = \omega$.

Следствие 2. ПО ρ *обладает универсально аксиоматизируемым свойством* Φ *на* N^n *тогда и только тогда, когда* ρ *обладает свойством* Φ *на* $\mathbb{R}^n$.

3. Операции над отношениями и представляющими функциями

Укажем, как преобразуются представляющие функции при выполнении основных операций над ПО [5, 6]. Все отношения предполагаются заданными на одном и том же множестве $\mathbb{X}$.

1°. *Если F — теоретико-множественная операция и $\rho = F(\rho_1, \dots, \rho_k)$, то*

$$g_\rho(P, P') = \varphi_F(g_{\rho_1}(P, P'), \dots, g_{\rho_k}(P, P')),$$

где φ_F — булева функция, соответствующая операции F.

Напомним, что если $M = F(M_1, \dots, M_k)$, то φ_F находится из условия $\chi_M = \varphi_F(\chi_{M_1}, \dots, \chi_{M_k})$, где χ_M — характеристическая функция множества M.

Скажем, что ρ' получено из ρ *инвертированием шкалы* 1, если

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\rho'(y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow (y_1, x_2, \dots, x_n)\rho(x_1, y_2, \dots, y_n).$$

Аналогично определяется результат инвертирования шкалы i. Отношение $\hat{\rho}$, полученное из ρ инвертированием некоторых шкал, называется *однотипным* с ρ.

2°. *Если ρ' образовано из ρ инвертированием шкалы i, то представляющая функция $g_{\rho'}$ может быть получена из g_ρ заменой p_i и p'_i соответственно на $\bar{p}'_i$ и $\bar{p}_i$, т. е. при $i = 1$ имеет вид*

$$g_{\rho'}(p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n) = g_\rho(\bar{p}'_1, p_2, \dots, p_n, \bar{p}_1, p'_2, \dots, p'_n).$$

В случае однотипных отношений указанную замену нужно произвести для всех инвертированных шкал.

3°. *Представляющая функция отношения ρ^{-1}, обратного к* ПО ρ, *может быть записана в виде*

$$g_{\rho^{-1}}(P, P') = g_\rho(\bar{P}', \bar{P}),$$

где $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$, $\bar{P}' = (\bar{p}'_1, \dots, \bar{p}'_n)$.

Двойственным к отношению ρ называется отношение $\rho^* = \mathbb{X}^2 \setminus \rho^{-1}$.

4°. *Представляющая функция отношения ρ^*, двойственного к* ПО ρ, *имеет вид*

$$g_{\rho^*}(P, P') = g^*_\rho(P', P),$$

где g^*_ρ — булева функция, двойственная к g_ρ.

Описанные операции над представляющими функциями не зависят от множества $\mathbb{X}$, на котором заданы отношения. Следующая операция оказывается зависящей от $\mathbb{X}$.

Произведением отношений ρ_1 и ρ_2 на $\mathbb{X}$ называется отношение $\rho_1 \cdot \rho_2$ на $\mathbb{X}$ такое, что для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$

$$\mathbf{x}(\rho_1 \cdot \rho_2)\mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \mathbf{z} \in \mathbb{X}\,(\mathbf{x}\rho_1\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}\rho_2\mathbf{y}).$$

Если $\mathbb{X}$ отлично от $\mathbb{R}^n$, то произведение порядковых отношений не обязательно будет ПО. Для иллюстрации рассмотрим одномерное ПО $>$ ("больше") на N. Его произведение само на себя не является порядковым, так как $(2, 0) \in (> \cdot >)$, а $(1, 0) \notin (> \cdot >)$. В дальнейшем роль произведения будет играть его порядковое замыкание $[\rho_1 \cdot \rho_2]$.

Введем операцию композиции $g \circ \hat{g}$ функций $g(P, P')$ и $\hat{g}(P, P')$, которая позволит найти представляющую функцию порядкового замыкания произведения отношений. Вначале операцию $\circ$ определим для элементарных сомножителей, затем для элементарных конъюнкций и для функций, заданных посредством ДНФ.

Т а б л и ц а 1

	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
p_i	p_i	p_i	1	1	p_i	1
p'_i	p_i	p'_i	1	1	p'_i	1
$\bar{p}_i$	1	1	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$	1
$\bar{p}'_i$	1	1	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}'_i$	1
$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
1	1	1	1	1	1	1

Если индекс κ_i шкалы i не меньше 3 (в частности, для шкал бесконечной мощности), композиция $q_i \circ \hat{q}_i$ элементарных сомножителей находится согласно табл. 1, содержащей значение $q_i \circ \hat{q}_i$ в пересечении строки q_i и столбца $\hat{q}_i$. Если $\kappa_i = 2$, композиция находится в соответствии с табл. 2.

Т а б л и ц а 2

	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
p_i	0	p_i	p'_i	$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i
p'_i	p_i	p'_i	1	$\bar{p}_i$	p'_i	1
$\bar{p}_i$	p'_i	1	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$	1
$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	0	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$
$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
1	p'_i	1	1	$\bar{p}_i$	1	1

Первый вариант операции использовался в [5] и его будем называть *основным*, второй вариант операции будем называть *специальным*. Отметим, что результатом специальной операции может быть также 0.

Композицией элементарных конъюнкций $K = q_1 \dots q_n$ и $\hat{K} = \hat{q}_1 \dots \hat{q}_n$ назовем элементарную конъюнкцию $K \circ \hat{K} = (q_1 \circ \hat{q}_1) \dots (q_n \circ \hat{q}_n)$, где $q_i \circ \hat{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ определены с учетом индекса κ_i. Композицию функций $g, \hat{g} \not\equiv 0$, заданных посредством ДНФ $g = K_1 \vee \dots \vee K_s$ и $\hat{g} = \hat{K}_1 \vee \dots \vee \hat{K}_t$, определим равенством

$$g \circ \hat{g} = \bigvee_{1 \leqslant u \leqslant s,\, 1 \leqslant v \leqslant t} K_u \circ \hat{K}_v.$$

Если функция g или $\hat{g}$ тождественно равна 1, считаем, что ее ДНФ состоит из единственной конъюнкции, равной 1. В случае $g \equiv 0$ или $\hat{g} \equiv 0$ полагаем $g \circ \hat{g} \equiv 0$ по определению.

Теорема 3. *Представляющая функция порядкового замыкания* $[\rho_1 \cdot \rho_2]$ *произведения* ПО *находится как композиция* $g_{\rho_1}(P, P') \circ g_{\rho_2}(P, P')$ *представляющих функций для* ρ_1 *и* ρ_2.

Доказательство. При $g_{\rho_1} \equiv 0$ или $g_{\rho_2} \equiv 0$ сформулированный факт тривиален, поэтому будем считать, что $g_{\rho_1}, g_{\rho_2} \not\equiv 0$.

Введем множество $\Delta = \{>, \geqslant, \leqslant, <, =, \#\}$. Для чисел x, y и элемента $\delta \in \Delta \setminus \{\#\}$ соотношение $x\delta y$ будем понимать обычным образом, а $x\#y$ будет означать, что соотношение между x и y произвольно. Положим $Q_i = \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$ и зададим биекцию $\nu : Q_i \to \Delta$, назначив $\nu(q_i) = \delta$ в соответствии с порядком перечисления элементов q_i и δ в множествах Q_i и Δ (т. е. $\nu(p_i)$ есть $>$, и так далее). Легко проверить, что биекция ν обладает свойством: $\mathbf{x} q_i \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \nu(q_i) y_i$.

Используя определение операции $q_i \circ \hat{q}_i$, можно убедиться для любых $q_i, \hat{q}_i \in Q_i$ можно убедиться в следующем.

(a) Если существуют числа $x, y, z \in X_i$, удовлетворящие соотношениям $x\nu(q_i)z$ и $z\nu(\hat{q}_i)y$, то $x\nu(q_i \circ \hat{q}_i)y$. Проверим этот факт, например, для случая $q_i = p_i$, $\hat{q}_i = \bar{p}'_i$. Соотношения $x\nu(p_i)z$ и $z\nu(\bar{p}'_i)y$ означают, что $x > z$ и $z < y$. Если $|X_i| \geqslant 3$, то взаимоотношение между x и y может быть любым, т. е. справедливо $x\#y$, а поэтому $p_i \circ \bar{p}'_i = 1$ (см. табл. 1). Если же $|X_i| = 2$, то возможно лишь равенство $x = y$, а поэтому $p_i \circ \bar{p}'_i = p'_i\bar{p}_i$ (табл. 2).

(b) Если соотношения $x\nu(q_i)z$ и $z\nu(\hat{q}_i)y$ не могут быть выполнены одновременно ни для каких $x, y, z \in X_i$, то $q_i \circ \hat{q}_i = 0$. Это имеет место, например, для $|X_i| = 2$ и $q_i = \hat{q}_i = p_i$ (табл. 2), поскольку одновременно невозможны неравенства $x > z$ и $z > y$.

(c) Если для $x, y \in X_i$ выполнено $x\nu(q_i \circ \hat{q}_i)y$, то найдутся такие числа $x', y', z' \in X_i$, что $\operatorname{sgn}(x' - y') = \operatorname{sgn}(x - y)$ (а потому $x'\nu(q_i \circ \hat{q}_i)y')$) и $x'\nu(q_i)z'$, $z'\nu(\hat{q}_i)y'$.

Пусть $K = q_1 \dots q_n$, $\hat{K} = \hat{q}_1 \dots \hat{q}_n$ — элементарные конъюнкции и для $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ выполнены отношения $\mathbf{x}K\mathbf{z}$ (т. е. $\mathbf{x}q_i\mathbf{z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$) и $\mathbf{z}\hat{K}\mathbf{y}$. Тогда $x_i\nu(q_i)z_i$ и $z_i\nu(\hat{q}_i)y_i$, что в соответствии с (a) дает $x_i\nu(q_i \circ \hat{q}_i)y_i$ и означает, что $\mathbf{x}(K \circ \hat{K})\mathbf{y}$. Аналогично, используя (c), можно убедиться, что $\mathbf{x}(K \circ \hat{K})\mathbf{y}$ означает существование таких $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \mathbb{X}$, что $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{x}'K\mathbf{z}'$, $\mathbf{z}'\hat{K}\mathbf{y}'$.

Обозначим через ρ отношение на $\mathbb{X}$ с представляющей функцией $g_\rho = g_{\rho_1} \circ q_{\rho_2}$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ таковы, что $\mathbf{x}[\rho_1 \cdot \rho_2]\mathbf{y}$. Это означает, что для некоторых $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \mathbb{X}$ справедливы соотношения $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x}'\rho_1\mathbf{z}'$ и $\mathbf{z}'\rho_2\mathbf{y}'$. Поэтому в ДНФ функций g_{ρ_1} и g_{ρ_2} найдутся конъюнкции K_u и $\hat{K}_v$ такие, что $\mathbf{x}'K_u\mathbf{z}'$ и $\mathbf{z}'\hat{K}_v\mathbf{y}'$. Но тогда $\mathbf{x}'(K_u \circ \hat{K}_v)\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'\rho\mathbf{y}'$, поскольку $K_u \circ \hat{K}_v$ присутствует в ДНФ функции g_ρ. Так как $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$. Следовательно, $[\rho_1 \cdot \rho_2] \subseteq \rho$.

Обратно, из $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$ следует присутствие в ДНФ g_ρ конъюнкции $K_u \circ \hat{K}_v$ такой, что $\mathbf{x}(K_u \circ \hat{K}_v)\mathbf{y}$. Поэтому для некоторых $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \mathbb{X}$ справедливы соотношения $\Delta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{x}'K_u\mathbf{z}'$, $\mathbf{z}'\hat{K}_v\mathbf{y}'$. Следовательно, $\mathbf{x}'\rho_1\mathbf{z}'$, $\mathbf{z}'\rho_2\mathbf{y}'$ и $\mathbf{x}'(\rho_1 \cdot \rho_2)\mathbf{y}'$. Отсюда следует, что $\mathbf{x}[\rho_1 \cdot \rho_2]\mathbf{y}$ и $\rho \subseteq [\rho_1 \cdot \rho_2]$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в случае отношений на $\mathbb{R}^n$ имеет место более сильный факт: $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ является представляющей функцией отношения $\rho_1 \cdot \rho_2$ [5, 6].

Укажем некоторые свойства операции композиции (для основного варианта операции они доказаны в [5, 6].

Операция композиции коммутативна: $g \circ \hat{g} = \hat{g} \circ g$ (ибо каждая из таблиц 1 и 2 симметрична). Это означает коммутативность операции $[\rho_1 \cdot \rho_2]$. Отметим, что сама операция произведения $\rho_1 \cdot \rho_2$ не коммутативна, в чем легко убедиться на примерах.

Операция композиции монотонна: $g \geqslant g' \Rightarrow g \circ \hat{g} \geqslant g' \circ \hat{g}$. Это следует из монотонности операции произведения отношений.

Основная операция композиции (табл. 1) обладает более хорошими свойствами, чем специальная (табл. 2). Основная операция ассоциативна, а специальная нет (ибо $(\bar{p}_i' \circ p_i) \circ p_i = p_i'\bar{p}_i \circ p_i = p_i$, $\bar{p}_i' \circ (p_i \circ p_i) = \bar{p}_i' \circ 0 = 0$). Основная операция идемпотентна $q_i \circ q_i = q_i$, а специальная нет (ибо $p_i \circ p_i = 0$). В связи с этим следующие свойства справедливы лишь для композиции, использующей основной вариант операции (т. е. когда $\kappa_i \geqslant 3$ при всех i).

Если $\kappa_i \geqslant 3$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то операция композиции ассоциативна: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ и, кроме того, удовлетворяет соотношению $g \circ g \geqslant g$.

4. Свойства конечного ранга

Следующая теорема связывает рассматриваемые в работе свойства конечного ранга со свойствами представляющих функций. Пусть $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)$ и $\tilde{1} = (1, \ldots, 1)$ — наборы длины n, $D_0 = p_1 \vee \ldots \vee p_n \vee \bar{p}'_1 \vee \ldots \vee \bar{p}'_n$.

Теорема 4. *Порядковое отношение ρ на $\mathbb{X}$*

а) *рефлексивно тогда и только тогда, когда* $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$;

б) *иррефлексивно тогда и только тогда, когда* $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = 0$;

в) *асимметрично тогда и только тогда, когда* $g_\rho(P, P') \leqslant g^*_\rho(P', P)$;

г) *антисимметрично тогда и только тогда, когда*

$$D_0 g_\rho(P, P') \leqslant D_0 g^*_\rho(P', P);$$

д) *полно тогда и только тогда, когда* $g_\rho(P, P') \geqslant g^*_\rho(P', P)$;

е) *связно тогда и только тогда, когда* $D_0 g_\rho(P, P') \geqslant D_0 g^*_\rho(P', P)$;

ж) *транзитивно тогда и только тогда, когда*

$$g_\rho(P, P') \circ g_\rho(P, P') \leqslant g_\rho(P, P');$$

и) *негатранзитивно тогда и только тогда, когда*

$$g^*_\rho(P', P) \circ g^*_\rho(P', P) \leqslant g^*_\rho(P', P).$$

Доказательство. Утверждения пунктов а)–е) теоремы справедливы в силу следствия 1 и того факта, что указанные условия являются необходимыми и достаточными для выполнимости соответствующих свойств для ПО на $\mathbb{R}^n$ [5, 6]. Пункт ж) следует с учетом теоремы 3 из условия транзитивности ПО ρ на $\mathbb{X}$, записанного в форме $[\rho \cdot \rho] \subseteq \rho$. Пункт и) сводится к ж) применением 4° и того факта, что негатранзитивность отношения равносильна транзитивности двойственного отношения. Теорема 4 доказана.

В работе [6] проведено исследование на NP-трудность и полиномиальность (эти понятия см., например, в [2]) задач распознавания свойств ПО на $\mathbb{R}^n$ по представляющим функциям, заданным посредством ДНФ и КНФ (для ПО общего вида в качестве ДНФ и КНФ использовались произвольные, для правильных отношений — приведенные). Согласно следствию 1 результаты из [6], относящиеся к свойствам конечного ранга, переносятся на произвольные пространства $\mathbb{X}$ индекса $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ и приобретают следующий вид.

Теорема 5. *Задачи распознавания свойств произвольных и правильных порядковых отношений в пространствах $\mathbb{X}$ индекса $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ по представляющим функциям, заданным посредством* ДНФ *или* КНФ, *являются* NP-*трудными либо полиномиальными согласно таблице*

Свойство	*Тип отношений*			
	произвольные		*правильные*	
	Вид задания		*Вид задания*	
	ДНФ	*КНФ*	*ДНФ*	*КНФ*
рефлексивность *иррефлексивность*	P	P	P	P
асимметрия *антисимметрия*	P	NP	P	NP
полнота *связность*	NP	P	NP	P
транзитивность *негатранзитивность*	NP	NP	P	P

Присутствующие в таблице NP-трудные задачи содержатся в классе NP либо в co-NP.

Теперь рассмотрим некоторые распространенные типы отношений. Транзитивное иррефлексивное отношение называется *частичным порядком* (строгим), связный частичный порядок — *линейным порядком*, а негатранзитивное ацикличное отношение — *слабым порядком*. Частичный порядок r со свойством

$$xry \wedge zrv \to xrv \vee zry \tag{6}$$

называется *интервальным порядком*, а интервальный порядок со свойством $xry \wedge yrz \to xrv \vee vrz$ — *полупорядком*. Обозначим соответственно через $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ классы отношений частичного, линейного, слабого, интервального порядка, полупорядка и транзитивных отношений. Эти типы отношений (наряду с ацикличными, которые будут рассмотрены отдельно) наиболее распространены в задачах выбора. Справедливы включения

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}, \tag{7}$$

в общем случае строгие.

В [5] для пространства $\mathbb{R}^n$ найдено явное описание ПО классов (7), из которого вытекает, что классы $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$ для $\mathbb{R}^n$ совпадают. Следующая теорема показывает, что это описание переносится на произвольные пространства $\mathbb{X}$ индекса $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$. При доказательстве можно ограничиться классами $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$, в определении которых имеются свойства ранга 4. К другим классам цепочки (7) применима теорема 2.

Под *обобщенными лексикографиями* понимаются отношения $\hat{\lambda}$, однотипные с лексикографиями, т. е. образованные из них инвертированием некоторых шкал. Их представляющие функции получаются из (2) с помощью утверждения 2°.

Теорема 6. *Порядковое отношение в пространстве* $\mathbb{X}$ *индекса* $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ *является* а) *линейным порядком*; б) *слабым порядком, полупорядком, интервальным порядком*; в) *частичным порядком*; г) *транзитивным отношением тогда и только тогда, когда оно на* $\mathbb{X}$ *представляет собой* а) *обобщенную полную лексикографию*; б) *обобщенную лексикографию*; в)*пересечение обобщенных лексикографий*; г) *пересечение обобщенных лексикографий или пересечение отношений, двойственных обобщенным лексикографиям.*

Доказательство. Покажем, что всякий интервальный порядок ρ на $\mathbb{X}$ является обобщенной лексикографией (этим будет доказано, что $\mathcal{W} = \mathcal{S} = \mathcal{I}$ на $\mathbb{X}$). Поскольку ρ является также частичным порядком и свойства, описывающие частичный порядок, имеют ранг не выше 3, к ρ применимы методы исследования отношений на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим представление $g_\rho = K_1 \vee \ldots \vee K_t$ в виде ДНФ. Введем конъюнкцию $\hat{K} = K_1 \circ \cdots \circ K_t$. Из $K_i \leqslant g_\rho$, монотонности операции композиции и условия транзитивности ρ в форме $g_\rho \circ g_\rho \leqslant g_\rho$ следует $\hat{K} \leqslant g_\rho$.

Элементарные сомножители p'_i, $\bar{p}_i$, $p'_i\bar{p}_i$ и 1 будем называть сомножителями *типа* 0, а p_i и $\bar{p}'_i$ — сомножителями *типа* 1. Будем говорить, что элементарная конъюнкция имеет тип 0, если она образована сомножителями типа 0, а иначе имеет тип 1. Конъюнкция $\hat{K}$ имеет тип 1, поскольку в противном случае при подстановках $p_i = 0$ и $p'_i = 1$ для всех i она обращается в 1, что дает $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$ и противоречит иррефлексивности ρ. Введем множество $J = \{j \mid \hat{q}_j \neq 1\}$, где $\hat{q}_j$ — сомножитель конъюнкции $\hat{K}$. Из табл. 1 видно, что для $j \in J$ элементарные сомножители q_j всех конъюнкций $K_1, \ldots, K_t$ содержатся либо в множестве $T_j = \{p_j, p'_j, p'_j\bar{p}_j\}$, либо в множестве $\{\bar{p}_j, \bar{p}'_j, p'_j\bar{p}_j\}$. Можно считать, что при всех $j \in J$ имеет место случай 1, ибо случай 2 сводится к нему инвертированием шкал, не нарушающим свойства быть интервальным порядком.

Покажем, что конъюнкция $\hat{K}$ состоит из единственного сомножителя (отличного от 1), т. е. имеет вид p_j. Допустим, что $\hat{K}$ содержит $s \geqslant 2$ сомножителей, и пусть, для определенности, $\hat{K} = \hat{q}_1 \ldots \hat{q}_s$. Для каждого $i = s+1, \ldots, n$ возьмем некоторое $\sigma_i \in X_i$ и рассмотрим отношение ρ' на $\mathbb{X}' = X_1 \times \ldots \times X_s$, полученное из ρ фиксацией последних $n-s$ компонент:

$$\mathbf{x}'\rho'\mathbf{y}' \Leftrightarrow (\mathbf{x}'\sigma_{s+1} \ldots \sigma_n)\rho(\mathbf{y}'\sigma_{s+1} \ldots \sigma_n).$$

Его представляющая функция $g_{\rho'}$ получается из g_ρ подстановками $p_i = 0$,

$p_i' = 1$, $i = s+1, \ldots, n$. Из соотношения $g_{\rho'} \geq \hat{K}$ следует, что ρ' непусто. Легко видеть, что при фиксации компонент сохраняются иррефлексивность, транзитивность и аксиома (6). Поэтому ρ' также представляет собой интервальный порядок. ДНФ функции $g_{\rho'}$ является дизъюнкцией конъюнкций вида $q_1 \ldots q_s$, $q_i \in T_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, имеющих тип 1 (в силу иррефлексивности).

Осуществим дальнейшую фиксацию компонент. Если $s > 2$ и в ДНФ функции $g_{\rho'}$ имеется конъюнкция, содержащая сомножитель q_i типа 0, произвольно фиксируем i-ю компоненту. Представляющая функция полученного отношения — результат подстановки в $g_{\rho'}$ значений $p_i = 0$ и $p_i' = 1$ — образована конъюнкциями типа 1, состоящими из $s-1$ сомножителей $q_j \in T_j$. К ней применим ту же процедуру фиксации и так далее. Процедура остановится, если а) останутся лишь конъюнкции, образованные сомножителями типа 1; б) конъюнкции будут иметь длину 2. При этом полученная функция будет представляющей для некоторого интервального порядка. Очевидно, что в случае а) ДНФ будет состоять из единственной конъюнкции $p_1 p_2 \ldots p_u$ некоторой длины $u \geqslant 2$. Нетрудно проверить, что в случае б) путем переименования переменных и эквивалентных преобразований ДНФ может быть приведена к одному из видов б$_1$) $p_1 p_2$, б$_2$) $p_1 q_2^0$, б$_3$) $p_1 q_2^0 \vee p_2 q_1^0$, где q_1^0 означает p_1' или $p_1' \bar{p}_1$. Если, например, ДНФ включает сомножители $p_1 p_2$ и $p_1 p_2' \bar{p}_2$, то $p_1 p_2 \vee p_1 p_2' \bar{p}_2 = p_1 p_2 \vee p_1 p_2' = p_1 p_2'$.

Покажем, что во всех случаях аксиома (6) будет нарушена. При каждом i множество X_i содержит не менее 3 различных значений: пусть 0, 1 и 2. В случае а) аксиома не выполняется на наборах $\mathbf{x} = (211 \ldots 1)$, $\mathbf{y} = (100 \ldots 0)$, $\mathbf{z} = (121 \ldots 1)$ и $\mathbf{v} = (010 \ldots 0)$. Случай б$_1$) получается из а) при $u = 2$. В случаях б$_2$) и б$_3$) четверками наборов, нарушающих (6), являются соответственно $\mathbf{x} = (12)$, $\mathbf{y} = (02)$, $\mathbf{z} = (21)$, $\mathbf{v} = (11)$ и $\mathbf{x} = (12)$, $\mathbf{y} = (02)$, $\mathbf{z} = (21)$, $\mathbf{v} = (20)$.

Тем самым установлено, что конъюнкция $\hat{K}$ имеет вид p_{i_1}. Поэтому функция g_ρ допускает представление

$$g_\rho = p_{i_1} \vee p_{i_1}' g_1 \vee p_{i_1}' \bar{p}_{i_1} g_2 = p_{i_1} \vee p_{i_1}' (g_1 \vee g_2) = p_{i_1} \vee p_{i_1}' g^1,$$

где g_1, g_2 и $g^1 = g_1 \vee g_2$ не зависят от p_{i_1} и p_{i_1}'. Если $g^1 \not\equiv 0$, произвольно фиксируя в ρ компоненту i_1, получаем такой интервальный порядок ρ_1, что $g_{\rho_1} = g^1$ — результат подстановки в g_ρ значений $p_{i_1} = 0$ и $p_{i_1}' = 1$. Применяя к ρ_1 те же рассуждения, при некотором i_2 (с точностью до инвертирования шкалы) получаем $g^1 = g_{\rho_1} = p_{i_2} \vee p_{i_2}' g^2$, и функция g_ρ может быть переписана в виде $g_\rho = p_{i_1} \vee p_{i_1}' (p_{i_2} \vee p_{i_2}' g^2) = p_{i_1} \vee p_{i_1}' p_{i_2} \vee p_{i_1}' p_{i_2}' g^2$.

Продолжая эту цепочку, пока не окажется, что $g^k \equiv 0$, придем к лексикографии. Поскольку рассмотрения велись с точностью до инвертирования шкал, в общем случае получим обобщенную лексикографию.
Теорема 6 доказана.

Свойство отношений быть полупорядком (либо интервальным порядком) имеет ранг 4, ибо легко указать отношения из $\mathcal{S}$ (из $\mathcal{I}$), не отличимые от слабых порядков на тройках. В то же время согласно теореме 6 для отношений, заданных на $\mathbb{X}$, эти свойства распространяются на все $\mathbb{R}^n$, начиная с $\kappa(\mathbb{X}) = 3$. Приведем примеры, показывающие, что во всех полученных выше результатах о свойствах отношений в пространствах $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ значение $\kappa(\mathbb{X})$ не может быть понижено до 2. Примеры будут относиться к случаю 3-мерных пространств.

Отношение ρ_1 с представляющей функцией

$$g_{\rho_1} = p_1 p_2' \vee p_1' p_2 \vee p_1 p_3' \vee p_2 p_3 \vee p_1' p_2' p_3, \tag{8}$$

рассматриваемое на E_2^3, является линейным порядком, т. е. принадлежит всем классам (7). В этом можно убедиться, проверив с помощью теоремы 4, что оно асимметрично, связно и транзитивно. В то же время оно не содержится ни в одном классе (7) при рассмотрении его на $\mathbb{R}^3$ (и любых пространствах $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$). Это следует из того, что композиция всех конъюнкций представляющей функции пуста (равна 1), а поэтому отношение на $\mathbb{R}^3$ не ациклично [6]. Таким образом, для E_2^3 все классы из (7) шире соответствующих классов для пространств $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$.

Кроме того, в пространствах E_2^3 классы $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$ оказываются различными. Можно убедиться непосредственно, что отношение ρ_2 на E_2^3 с преставляющей функцией $g_{\rho_2} = p_1' p_2 \vee p_1 p_3 \vee p_1 p_2' p_3'$ содержится в $\mathcal{S} \setminus \mathcal{W}$, а отношение ρ_3 на E_2^3 с представляющей функцией $g_{\rho_3} = p_1' p_2 p_3' \vee p_1 p_3' \bar{p}_3 \vee p_1' p_2' p_3 \vee p_2 p_3 \vee p_1 \bar{p}_2' \bar{p}_3$ принадлежит $\mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$.

Теорема 6 позволяет переформулировать результаты из [4] о сложности задач распознавания о принадлежности ПО классам (7), доказанные для $\mathbb{R}^n$, на случай произвольных пространств $\mathbb{X}$ индекса $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$.

Теорема 7. *Для любого порядкового отношения ρ пространства $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ и каждого класса $\mathcal{Q}$ цепочки (7) задача распознавания по представляющей функции g_ρ в виде* ДНФ *или* КНФ *принадлежности ρ классу $\mathcal{Q}$ является* NP-*трудной для* ПО *общего вида и полиномиальной для правильных* ПО.

5. Свойство ацикличности

В данном разделе изучается возможность применения описанного подхода к изучению свойства ацикличности, имеющего бесконечный ранг.

Докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть M — матрица, составленная из элементов 0, 1 и -1. Матрицу M назовем *уравновешенной*, если она не является тождественно нулевой и в каждом ненулевом столбце содержится хотя бы один элемент 1 и хотя бы один элемент -1.

Лемма 2. *В каждой уравновешенной матрице с n столбцами можно выделить не более $n+1$ строк, которые образуют уравновешенную матрицу.*

Доказательство. Будем использовать процедуру, в которой на шаге i, $i = 0, 1, \ldots$, выбирается (помечается) очередная $(i+1)$-я строка и в исходной матрице M вычеркиваются некоторые столбцы. Матрицу, образованную после шага i, обозначим через M_i. На шаге 0 помечаем произвольную строку матрицы M, содержащую какой-либо из элементов 1 и -1, и вычеркиваний не производим.

Если матрица M_i не содержит в помеченных строках элементов 1 и -1 (в частности, является пустой), процедура останавливается. В противном случае берем один из таких элементов и помечаем некоторую строку, содержащую в том же столбце противоположный элемент. Столбцы матрицы M_i, в помеченных строках которых встречаются оба противоположных элемента (1 и -1), вычеркиваем. Очевидно, что процедура завершится не позже шага n и помеченные строки будут образовывать уравновешенную матрицу. Лемма 2 доказана.

Замечание. Оценка леммы достижима. Примером уравновешенной матрицы с $n+1$ строками, из которой нельзя составить уравновешенную матрицу с меньшим числом строк, может служить матрица, образованная строками $(1, 1, \ldots, 1)$, $(-1, 0, \ldots, 0)$, $(0, -1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, -1)$ длины n.

Каждому набору $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ поставим в соответствие такой булев набор $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, что

$$\sigma_i = \lfloor \delta_i + 1/2 \rfloor, \qquad \tau_i = \lceil \delta_i + 1/2 \rceil. \tag{9}$$

Легко проверить, что если $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, то $(\mathbf{x}p_1\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p_n\mathbf{y}) = \tilde{\sigma}$, $(\mathbf{x}p'_1\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p'_n\mathbf{y}) = \tilde{\tau}$. Например, если $\delta_i = -1$, то $x_i < y_i$, а поэтому $\mathbf{x}\bar{p}_i\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}\bar{p}'_i\mathbf{y}$, что соответствует значениям $\sigma_i = 0$ и $\tau_i = 0$, приписанным согласно (9).

Лемма 3. *Порядковое отношение ρ на $\mathbb{R}^n$ обладает циклом длины l тогда и только тогда, когда существует уравновешенная матрица с n столбцами и l строками такая, что на булевых наборах $(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$, сопоставленных ее строкам, функция $g_\rho(P, P')$ равна 1.*

Доказательство. Пусть отношение ρ на $\mathbb{R}^n$ имеет цикл

$$\mathbf{x}_1 \rho \mathbf{x}_2 \rho \ldots \rho \mathbf{x}_l \rho \mathbf{x}_1, \tag{10}$$

где $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}\rho\mathbf{z}$ означает $\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}\rho\mathbf{z}$. Образуем матрицу M, строками которой являются $\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\Delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, …, $\Delta(\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l)$, $\Delta(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_1)$, расположенные в указанном порядке. Так как $\sum\limits_{i=1}^{l}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) = 0$, где $\mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_1$, то каждый столбец матрицы либо является нулевым, либо содержит элементы 1 и -1, т. е. M уравновешенна. Из $\mathbf{x}_i \rho \mathbf{x}_{i+1}$ и связи между $\Delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$ и $(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i)$ следует, что $g_\rho(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i) = 1$.

Обратно, если матрица со строками $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ уравновешенна, то легко подобрать $\mathbf{x}_1 \ldots, \mathbf{x}_l$ такие, что $\Delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \Delta_i$, где $1 \leqslant i \leqslant l$, и $\mathbf{x}_{l+1} = \mathbf{x}_1$. Из условия $g_\rho(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_i) = 1$ вытекает $\mathbf{x}_i \rho \mathbf{x}_{i+1}$, что дает цикл (10). Лемма 3 доказана.

Про уравновешенную матрицу, сопоставленную циклу при доказательстве леммы, будем говорить, что она соответствует этому циклу.

Следствие 3. *Если уравновешенная матрица соответствует некоторому циклу отношения ρ, то матрица, полученная из нее перестановкой строк, таже соответствует циклу отношения ρ (возможно, другому).*

Следствие 4. *Если* ПО *на $\mathbb{R}^n$ не ациклично, то оно содержит цикл длины не больше $n + 1$.*

Эта оценка не понижаема. Пример отношения на $\mathbb{R}^n$, в котором минимальный цикл имеет длину $n+1$, задается представляющей функцией

$$g_\rho = p_1 \ldots p_n \vee \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} p'_1 \bar{p}_1 \ldots p'_{i-1} \bar{p}_{i-1} \bar{p}'_i p'_{i+1} \bar{p}_{i+1} \ldots p'_n \bar{p}_n.$$

Соответствующая циклу уравновешенная матрица с наименьшим числом строк совпадает с указанной в замечании к лемме 2.

Уравновешенную матрицу назовем *тупиковой*, если никакое собственное подмножество ее строк не образует уравновешенную матрицу. Две матрицы над $\{-1, 0, 1\}$ будем называть *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой перестановкой строк, перестановкой столбцов и заменой всех элементов некоторых столбцов на противоположные. Очевидно, что указанные эквивалентные преобразования переводят уравновешенные матрицы в уравновешенные, а тупиковые — в тупиковые. Отметим, что перестановка строк приводит к другому циклу в том же пространстве (следствие 3), перестановке столбцов соответствует переименование переменных, а изменению знаков всех переменных столбца — инвертирование соответствующей шкалы.

Матрицу $\|\delta_{ij}\|$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, с n столбцами и $n+1$ строками, образованную элементами из $\{-1, 0, 1\}$, назовем *треугольной*, если при каждом i выполняются соотношения: $\delta_{i,i+1} = -1$, $\delta_{ij} = 0$ при $j > i+1$ и $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$ при $j \leqslant i$.

Лемма 4. *Любая тупиковая уравновешенная матрица с n столбцами и $n+1$ строками эквивалентна треугольной матрице.*

Доказательство. Пусть M — тупиковая уравновешенная матрица с n столбцами и $n+1$ строками. Элемент 1 или -1 этой матрицы назовем *главным*, если в содержащем его столбце отсутствуют другие элементы того же вида. Каждая строка включает хотя бы один главный элемент, иначе при ее удалении получится уравновешенная матрица с меньшим числом строк. Главные элементы присутствуют и в каждом столбце. Действительно, пусть в некотором столбце j отсутствуют главные элементы. Применив процедуру леммы 2 к матрице M', образованной из M вычеркиванием столбца j, выделим в ней не более n строк, дающих уравновешенную матрицу, и если число строк окажется меньше n — дополним их до n. Соответствующие n строк матрицы M также будут образовывать уравновешенную матрицу, что противоречит тупиковости M. Как следствие получаем, что M не содержит нулевых столбцов.

Индукцией по i, $1 \leqslant i \leqslant n$, докажем, что M может быть эквивалентно преобразована в матрицу M_i, в которой

- подматрица, расположенная в пересечении столбцов $1, \ldots, i$ и строк $1, \ldots, i+1$, является треугольной,
- подматрица, расположенная в пересечении столбцов $i+1, \ldots, n$ и строк $1, \ldots, i+1$, состоит лишь из элементов 0 и 1,
- подматрица, расположенная в пересечении столбцов $1, \ldots, i$ и строк $i+2 \ldots, n$, является нулевой.

Базис индукции ($i = 1$). Число главных элементов матрицы M не меньше числа $n+1$ строк. Поэтому какой-либо из ее n столбцов содержит не менее 2 главных элементов. По определению главных элементов других элементов 1 и -1 в столбце нет, а эти элементы принимают противоположные значения. Поместив рассматриваемый столбец на первое место и переставив некоторые строки, можно получить матрицу с $\delta_{11} = 1$ и $\delta_{12} = -1$. Остальные элементы первого столбца будут нулевыми. В этой матрице соотношение $\delta_{j2} = -\delta_{j1} \neq 0$ невозможно при $j \geqslant 2$. Иначе можно применить процедуру из леммы 2, пометив на первых шагах строки 1 и 2. После этого будут вычеркнуты по крайней мере 2 столбца и процедура завершится нахождением уравновешенной подматрицы с не более n строками, что противоречит условиям. С учетом этого, заменив элементы некоторых столбцов на противоположные, можно добиться, чтобы в первых двух строках столбцов, отличных от первого, располагались неотрицательные элементы. Получаем матрицу M_1 с нужными свойствами.

Индукционный шаг. Допустим, что матрица M_{i-1}, $i \leqslant n$, с требуемыми свойствами найдена. Построим по ней M_i.

Обозначим через M' матрицу, полученную из M_{i-1} отбрасыванием первых i строк. Ее первые $i-1$ столбцов являются нулевыми. Других нулевых столбцов в ней нет, поскольку в исходной матрице нет нулевых столбцов, а в отброшенных первых i позициях столбцов могут присутствовать лишь 0 и 1. В M' найдется столбец j, содержащий ненулевые элементы одного типа, иначе M' будет уравновешенной, что противоречит тупиковости M. Этими элементами могут быть только -1, ибо отброшенные элементы столбца неотрицательны.

Покажем, что элемент -1 в столбце j единствен. Если это не так, рассмотрим матрицу, полученную из M_{i-1} удалением столбца j, и применим к ней процедуру из леммы 2, начав пометку со строк $1, \ldots, i$. Процедура завершится выделением уравновешенной подматрицы, содержащей не более n строк. Дополнив их число до n и взяв соответствующие строки матрицы M_{i-1}, можно получить уравновешенную матрицу с n строками, что противоречит условиям леммы.

Переместив столбец j на место i и переставив некоторые строки, можно получить матрицу с $\delta_{i,i+1} = -1$. Элементами δ_{ij} этого столбца при $j \leqslant i$ могут быть лишь нули и единицы, а при $j > i+1$ — только нули. Как при рассмотрении базы индукции, можно показать, что если в строке $i+1$ имеются другие элементы $\delta_{j,i+1} = -1$, то при $u \leqslant i$ элементы δ_{ju} могут быть только нулевыми. Изменив знаки элементов в соответствующих столбцах j, можно добиться, чтобы эти элементы превратились в 1, что дает матрицу M_i с требуемыми свойствами.

При $i = n$ получаем утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Если порядковое отношение имеет цикл в $\mathbb{R}^s$, то оно имеет цикл в E_s^s.*

Доказательство. По следствию 4 отношение ρ, имеющее цикл в $\mathbb{R}^s$, имеет цикл длины $l \leqslant s+1$. Рассмотрим соответствующую ему уравновешенную матрицу с l строками, которую можно считать тупиковой.

При $l \leqslant s$ каждый ненулевой столбец j этой матрицы имеет не более $s-1$ ненулевых элементов одного типа. Нетрудно видеть, что тогда можно выбрать такие числа $x_{ji} \in E_s$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, что $\operatorname{sgn}(x_{ji} - x_{j,i+1}) = \delta_{ji}$, где δ_{ji} — элемент матрицы и $x_{j,l+1} = x_{j1}$. Для нулевых столбцов j' назначим $x_{j'1} = \ldots = x_{j'l} \in E_s$ произвольно. Полученные наборы $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{li}) \in E_s^s$, $1 \leqslant i \leqslant l$, образуют цикл (10).

В случае $l = s+1$ в соответствии с леммой 4 построим эквивалентную треугольную матрицу; ее строки обозначим через $\Delta_1, \ldots, \Delta_{s+1}$. По определению треугольной матрицы в каждом ее столбце имеется единственный элемент -1, в каждом из столбцов $1, \ldots, i-1$ содержится не более $s-1$ элементов 1, в столбце s число единиц не более s, а строка Δ_{s+1} имеет вид $(0, \ldots, 0, -1)$. Матрица с $s+2$ строками $\Delta_1, \Delta_{s+1}, \Delta_2, \ldots, \Delta_{s+1}$ уравновешенна и по ней аналогично предыдущему можно построить цикл на E_s^s длины $s+1$. Он соответствует отношению, полученному из ρ перенумерацией переменных и инвертированием осей. Поскольку эти операции не оказывают влияния на циклы, соответствующий цикл имеется и в исходном отношении ρ.

Лемма 6. *Для любых s и n, $n \geqslant s \geqslant 2$, существует n-мерное порядковое отношение, ацикличное на $E_{s'}^n$ при любом $s' < s$ и имеющее циклы в $E_{s'}^n$ при любом $s' \geqslant s$.*

Доказательство. Для заданных s и n, $n \geqslant s \geqslant 2$, введем ПО $\rho_{s,n}$ в n-мерном пространстве представляющей функцией

$$g_{\rho_{s,n}} = \left(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant s} p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_s \right) \bigwedge_{s+1 \leqslant j \leqslant n} p_j' \bar{p}_j. \tag{11}$$

Легко видеть, что отношение $\rho = \rho_{s,n}$ имеет в $E_{s'}^n$ при $s' \geqslant s$ цикл длины s:

$$(0,1,2,\ldots,s-1,0,\ldots,0)\rho(s-1,0,1\ldots,s-2,0,\ldots,0)\rho\ldots$$
$$\ldots\rho(1,2,\ldots,s-1,0,0,\ldots,0)\rho(0,1,2,\ldots,s-1,0,\ldots,0),$$

где каждый следующий набор получен из предыдущего циклическим сдвигом в пределах первых s разрядов.

Теперь покажем, что при $s' < s$ отношение ρ ациклично в $E_{s'}^n$. Предположим, что в $E_{s'}^n$ имеется цикл $\mathbf{x}_1 \rho \mathbf{x}_2 \rho \ldots \rho \mathbf{x}_l \rho \mathbf{x}_1$. Образуем матрицу, строками которой являются $\Delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \Delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \dots, \Delta(\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l), \Delta(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_1)$. Поскольку матрица уравновешенна, в любом ее столбце j, $j \leqslant s$, должен присутствовать элемент -1. В первых s столбцах каждой строки матрицы содержится не более одного элемента, отличного от 1, и в i первых строках их имеется не более i штук. Следовательно, найдется столбец j, $j \leqslant s$, в котором такой элемент появится не ранее, чем в строке s. Разряд с номером j в наборах $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ образует убывающую последовательность длины s, что в $E^n_{s'}$ при $s' < s$ невозможно. Лемма 5 доказана.

Следующая теорема указывает, в каких границах описываемый подход применим к свойству ацикличности.

Теорема 8. *Если $\mathbb{X}$ — пространство размерности n и индекса $\kappa(\mathbb{X}) = s$, то при $n \leqslant s$ порядковое отношение на $\mathbb{X}$ ациклично тогда и только тогда, когда оно ациклично на $\mathbb{R}^n$. При $n > s$ существуют порядковые отношения, ацикличные на E^n_s и имеющие циклы в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Если $n \leqslant s$, то по лемме 5 всякое ПО ρ, обладающее циклом в $\mathbb{R}^n$, имеет цикл в E^n_n и, следовательно, — в E^n_s и в $\mathbb{X}$ с $\kappa(\mathbb{X}) = s$. Обратно, всякий цикл из $\mathbb{X}$ присутствует в $\mathbb{R}^n$.

При $n > s$ в силу леммы 6 найдется ПО, ацикличное в E^n_s, но имеющее циклы в E^n_{s+1} и, следовательно, в $\mathbb{R}^n$. Теорема 8 доказана.

В [5] установлено, что всякое ацикличное порядковое отношение на $\mathbb{R}^n$ может быть дополнено до линейного (и, следовательно, частичного) порядка. Здесь и дальше дополнимость ПО ρ на некотором $\mathbb{X}$ до ρ' подразумевает, что ρ' также ПО на $\mathbb{X}$. Следующее утверждение показывает, что свойства ацикличых отношений в дискретных пространствах отличаются от свойств ацикличных отношений на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 9. *При любых s и n, $n > s \geqslant 2$, в E^n_s существует ацикличное отношение, не дополнимое до частичного порядка.*

Доказательство. При $s \geqslant 3$ в качестве такого отношения может быть взято $\rho_{s+1,n}$ (11). Оно ациклично в E^n_s. В то же время $\rho_{s+1,n}$ имеет цикл в E^n_{s+1} и, следовательно, в $\mathbb{R}^n$. Поэтому оно не может быть дополнено до частичного порядка в $\mathbb{R}^n$. Так как при $s \geqslant 3$ множества частичных порядков в $\mathbb{R}^n$ и в E^n_s совпадают, то $\rho_{s+1,n}$ не дополнимо до частичного порядка в E^n_s.

При $s = 2$ сначала рассмотрим случай $n = 3$. Зададим отношение ρ на E^3_2 представляющей функцией

$$g_\rho = p_1 p_2 p_3 \vee \bar{p}'_1 p'_2 \bar{p}_2 \bar{p}'_3 \vee \bar{p}'_1 p'_2 \bar{p}_2 p_3 \vee p_1 \bar{p}'_2 \bar{p}'_3.$$

Легко проверить непосредственно, что оно ациклично в E^3_2. Пусть

$K = ((p_1 p_2 p_3 \circ \bar{p}'_1 p'_2 \bar{p}_2 \bar{p}'_3) \circ \bar{p}'_1 p'_2 \bar{p}_2 p_3) \circ p_1 \bar{p}'_2 \bar{p}'_3$ — последовательная композиция конъюнкций представляющей функции g_ρ. В соответствии с табл. 2 находим, что $K = p'_1 \bar{p}_1 p'_2 \bar{p}_2 p'_3 \bar{p}_3$. Предположим, что ρ может быть дополнено до частичного порядка ρ'. Используя монотонность операции композиции и замкнутость относительно нее функции $g_{\rho'}$, имеем

$$K \leqslant ((g_\rho \circ g_\rho) \circ g_\rho) \circ g_\rho \leqslant ((g_{\rho'} \circ g_{\rho'}) \circ g_{\rho'}) \circ g_{\rho'} \leqslant g_{\rho'}.$$

Поскольку $K(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$, имеем $g_{\rho'}(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$. В силу теоремы 4 это означает рефлексивность отношения ρ' и противоречит определению частичного порядка.

При $n > 3$ следует рассмотреть отношение с представляющей функцией $g_\rho p'_4 \bar{p}_4 \dots p'_n \bar{p}_n$, где ρ — указанное выше отношение на E_2^3. Теорема 9 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Березовский Б. А., Барышников Ю. М., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.** Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука, 1989.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. **Макаров И. М.,Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б.** Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
4. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
5. **Шоломов Л. А.** Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора. // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Физматлит, 1994. С. 109–143.
6. **Шоломов Л. А.** Сложность распознавания свойств порядковых отношений в n-мерных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 1, № 4. С. 82–105.
7. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования отношений в критериальных пространствах с порядковыми шкалами произвольного вида //Автоматика и телемеханика. 2004. № 5. С. 120–130.

Адрес автора:
Институт системного анализа РАН,
пр. 60-летия Октября, 9,
117312 Москва,
Россия.
E-mail: sholomov@isa.ru

Статья поступила
15 апреля 2004 г.