ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2004. Серия 1. Том 11, № 4, 56–67

УДК 519.176

СВОЙСТВО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ ЦЕПЕЙ В ГРАФАХ*)

Т. И. Федоряева

Исследуется свойство метрического продолжения кратчайших цепей (СМПК) для графов, которое усиливает введенное А. А. Евдокимовым свойство продолжения метрики. Показано, что свойством метрического продолжения кратчайших цепей обладают почти все графы. Приведены примеры и способы построения графов с СМПК. Для плоских графов получен ряд свойств графов с СМПК, связанных с метрической структурой их граней. На основе этих свойств, в частности, явно описываются графы, гомеоморфные внешнепланарным и удовлетворяющие СМПК.

Введение

Исследование вложений дискретных метрических пространств привело к изучению таких свойств пространств, которые позволяли бы выделять "метрически правильные" пространства и графы и при этом не слишком сужали рассматриваемые классы. Один из таких подходов рассмотрен в работе [1], в которой определено свойство продолжения метрики для дискретных метрических пространств с целочисленной метрикой, а в [2, 6–8] продолжено изучение этого свойства для графов. Пусть $S_i(x)$ — шар радиуса i с центром в точке x.

Определение 1. Дискретное метрическое пространство $\{X, \rho_x\}$ конечного диаметра $d(X)$ обладает свойством продолжения метрики, если $S_1(x) \nsubseteq S_i(y)$ или $S_1(y) \nsubseteq S_i(x)$ для любых его точек x и y, где $i = \rho_X(x, y)$ и $i < d(X)$.

Свойство продолжения метрики возникло при исследовании общих свойств локально изометрических вложений. Так, в [1–3] изучались отображения дискретных метрических пространств, сохраняющие отношения p-близости и q-отделимости между элементами, а среди них выделено двухпараметрическое семейство локально-изометрических $< p, q >$—

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00-939).

© 2004 **Федоряева Т. И.**

вложений. Отображения указанного типа возникают в различных разделах дискретного анализа и математической кибернетики, главным образом связанных с изучением таких преобразований дискретных систем, которые сохраняют определенную информацию об их метрическом строении, близости элементов, связности, отделимости и т. п. При этом свойства локально изометрических вложений с параметрами p, q оказываются связанными со свойствами самих дискретных метрических пространств. Таким образом, свойство продолжения метрики и задача описания пространств, обладающих этим свойством, возникли при изучении влияний свойств метрик на общие свойства локально изометрических вложений. С другой стороны, свойство продолжения метрики оказалось интересным и для "чистой" теории графов, поскольку, как отмечено в [1], оно приводит к просто формулируемому метрическому свойству для графов: любые две вершины графа должны принадлежать некоторой диаметральной цепи. В этой связи исследование свойств, близких к свойству продолжения метрики, и описание классов графов, обладающих этими свойствами, естественно рассматривать наряду с другими задачами описания известных классов графов, также определяемых в терминах метрических свойств. Отметим, например, классы птолемеевых, хордовых, геодезических, медианных и дистанционно-регулярных графов.

В настоящей статье рассматривается следующее усиление свойства продолжения метрики.

Определение 2. Граф G диаметра d обладает свойством метрического продолжения кратчайших цепей (СМПК), если $S_1(x) \not\subseteq S_i(y)$ и $S_1(y) \not\subseteq S_i(x)$ для любых вершин x, y графа G, где $i = \rho(x, y) < d$ и $S_i(z)$ — шар радиуса i с центром в вершине z с естественной метрикой ρ на G.

СМПК сильнее свойства продолжения метрики, а класс графов, обладающих СМПК, является сужением класса графов со свойством продолжения метрики. Многие естественные графы обладают свойством метрического продолжения кратчайших цепей, например, циклы, платоновы тела, n-мерный булев куб и n-мерный тор. Более того, как будет доказано в § 1, почти все графы обладают свойством метрического продолжения кратчайших цепей (теорема 2). В этом же параграфе показано, что СМПК инвариантно относительно операции декартова произведения (утверждение 1). Тем самым эта операция позволяет получать новые графы с СМПК, причем в большинстве случаев они будут "пространственными". Для плоских графов в § 2 получен ряд необходимых условий для того, чтобы граф обладал свойством метрического продолжения кратчайших цепей. Используя эти условия, в § 3 явно описываются графы, гомеоморфные внешнепланарным, удовлетворяющие СМПК. Заметим, что в [7, 8] получено описание внешнепланарных графов, обладающих свойством продолжения метрики, причем этот класс графов оказался "богатым"и допускающим описание в терминах явного перечисления базисных графов, из которых с помощью специальных операций строились все остальные графы. В случае СМПК в теореме 1 показано, что этот класс оказался "бедным".

Теорема 1. *Произвольный граф G, гомеоморфный внешнепланарному графу, обладает* СМПК *тогда и только тогда, когда G является либо ребром, либо циклом, либо одним из графов A, B (см. рис.* 1).

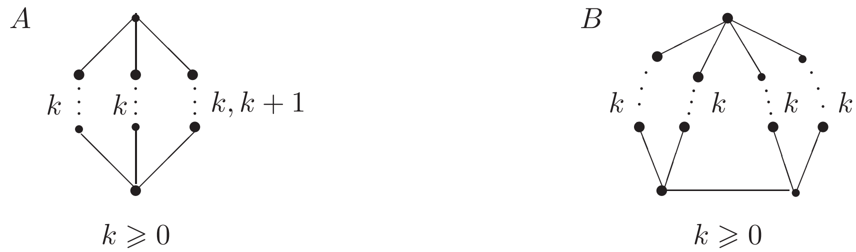


Рис. 1

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [4, 9]. Для графа G через $V(G)$ обозначим множество вершин, через $E(G)$ — множество ребер, через $\rho_G(x, y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y, через $d(G)$ — диаметр. Будем использовать сокращения $\rho(x, y)$ и d, если понятно, о каком графе G идет речь, и для краткости вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$. Как обычно, K_n обозначает полный n-вершинный граф, $G \times H$ — декартово произведение графов G и H. Подграф G графа H называется *изометричным*, если для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ выполняется равенство $\rho_G(x, y) = \rho_H(x, y)$. Кратчайшую цепь P с концами u_1, u_n такую, что

$$u_2, \ldots, u_{n-1} \in V(P), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(u_i, u_{i+1}) = \rho_G(u_1, u_n)$$

(причем не обязательно $u_i \neq u_{i+1}$), обозначим через $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

§ 1. СМПК и почти все графы

Теорема 2. *Почти все графы обладают свойством метрического продолжения кратчайших цепей.*

Доказательство. Известно (см., например, [4, 5]), что почти все графы имеют диаметр, равный двум. Если граф G диаметра 2 не обладает СМПК, то в G найдутся такие различные вершины x и y, что $S_1(y) \subseteq S_1(x)$. Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n}{2^{\binom{n}{2}}} = 0,$$

где θ_n — число n-вершинных графов, в которых имеются вложенные шары радиуса 1 с центрами в различных вершинах. Все такие графы G с n помеченными вершинами можно получить следующим способом.

1. Среди n изолированных вершин выбираются две произвольные вершины x и y. Имеется $\binom{n}{2}$ возможностей.

2. Оставшиеся $n-2$ вершины произвольным образом соединяются ребрами, имеется $2^{\binom{n-2}{2}}$ возможностей.

3. Множество $V(G)\setminus\{x,y\}$ разбивается на три произвольных подмножества:

$$V(G)\setminus\{x,y\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3.$$

Имеется 3^{n-2} возможностей.

4. Соединяются ребрами следующие вершины:

а) x и y,

б) y с каждой вершиной из V_1,

в) x с каждой вершиной из $V_1 \cup V_2$.

Таким образом, получаем

$$\theta_n = \binom{n}{2} 2^{\binom{n-2}{2}} 3^{n-2} \leqslant 2^{\binom{n}{2}} n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим операцию декартова произведения. Декартовым произведением графов G и H называется такой граф $G \times H$, что

$$\begin{aligned} V(G\times H) =& \{<x,y> \mid\ x\in V(G),\ y \in V(H)\};\\ E(G\times H) =& \{<x_1,y_1><x_2,y_2> \mid\ (x_1 = x_2 \text{ и } y_1y_2 \in E(H)) \text{ или}\\ & (y_1 = y_2 \text{ и } x_1x_2 \in E(G))\}, \end{aligned}$$

причем $\rho_{G\times H}(<x_1,y_1>,<x_2,y_2>) = \rho_G(x_1,x_2) + \rho_H(y_1,y_2)$.

Утверждение 1. *Граф $G\times H$ обладает* СМПК *тогда и только тогда, когда графы G и H обладают* СМПК.

Доказательство. Пусть граф $G\times H$ обладает СМПК. Предположим, например, что G не обладает СМПК. Тогда существуют такие вершины $x_1,\ x_2 \in V(G)$, что $\rho_G(x_1, x_2) < d(G)$, и в G нет кратчайшей цепи с концом x_1, которая содержит x_2 и имеет длину больше чем $\rho_G(x_1, x_2)$. Рассмотрим вершины $y_1, y_2 \in V(H)$ такие, что $\rho_H(y_1, y_2) = d(H)$. В силу выбора x_1, x_2 и соотношения

$$\rho_{G\times H}(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >) = \rho_G(x_1, x_2) + d(H) < d(G \times H)$$

СМПК не выполняется для вершин $< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >$ графа $G \times H$. Пришли к противоречию.

Покажем обратное. Пусть G и H обладают СМПК. Рассмотрим произвольные вершины $< x_1, y_1 >$ и $< x_2, y_2 >$ такие, что

$$\rho_{G\times H}(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >) < d(G \times H) = d(G) + d(H).$$

Тогда $\rho_G(x_1, x_2) < d(G)$ или $\rho_H(y_1, y_2) < d(H)$. Предположим, что выполняется первое неравенство (для второго неравенства рассуждения аналогичны). В силу СМПК существуют такие вершины x'_1 и x'_2 графа G, смежные с x_1 и x_2 соответственно, что

$$\rho_G(x'_1, x_2) = \rho_G(x_1, x_2) + 1,\ \rho_G(x'_2, x_1) = \rho_G(x_1, x_2) + 1.$$

Тогда $< x'_1, y_1 > \in S_1(< x_1, y_1 >)$ и

$$\begin{aligned}\rho_{G\times H}(< x'_1, y_1 >, < x_2, y_2 >) &= \rho_G(x_1, x_2) + \rho_H(y_1, y_2) + 1 \\ &= \rho_{G\times H}(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >) + 1.\end{aligned}$$

Таким образом, $S_1(< x_1, y_1 >) \nsubseteq S_k(< x_2, y_2 >)$, где

$$k = \rho_{G\times H}(< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >).$$

Аналогично имеем $< x'_2, y_2 > \in S_1(< x_2, y_2 >) \setminus S_k(< x_1, y_1 >)$. Утверждение 1 доказано.

§ 2. Некоторые свойства графов с СМПК

Сначала получим одно необходимое условие для разделяющих цепей графа с СМПК.

Простую цепь C графа G назовем *разделяющей*, если множество всех вершин графа G можно представить в виде объединения двух подмножеств V_1, V_2 таких, что $V_1 \cap V_2 = C$, $V_1 \neq C$, $V_2 \neq C$, и всякая простая цепь графа G, соединяющая произвольную вершину из V_1 с произвольной вершиной из V_2, содержит некоторую вершину цепи C. В этом случае граф G можно представить в виде объединения графов G^- и G^+, где G^- — порожденный подграф графа G с множеством вершин V_1, а G^+ — порожденный подграф с множеством вершин V_2.

Утверждение 2. *Всякая кратчайшая разделяющая цепь произвольного графа, обладающего* СМПК, *является диаметральной.*

Для доказательства потребуется следующая

Лемма 1. *Граф G связности* 1 *обладает* СМПК *тогда и только тогда, когда G является ребром.*

Доказательство. Пусть G — граф связности 1 обладает СМПК и не является ребром. Тогда G содержит точку сочленения x. Пусть a и b — вершины, смежные с x и принадлежащие различным компонентам связности графа $G \setminus x$. В силу СМПК существуют некоторые диаметральные цепи (x, a, a') и (x, b, b'). Тогда $d \geqslant \rho(a', b') = \rho(a', x) + \rho(x, b') = 2d$, противоречие. Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения 2. Пусть граф G обладает СМПК. Среди всех кратчайших разделяющих цепей графа G выберем цепь C наименьшей длины $n \geqslant 1$. Достаточно показать, что $n = d$.

Занумеруем все вершины цепи C так, что $C = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$. В силу СМПК существует некоторая диаметральная цепь (b_n, b_0, b^-). Можно считать, что $(b_n, b_0, b^-) \subseteq G^-$ (случай $(b_n, b_0, b^-) \subseteq G^+$ симметричен).

Покажем, что существует вершина $x \in G^+ \setminus C$, смежная с b_n. Действительно, предположим, что такой вершины x не существует. Тогда если $n = 1$, то b_0 является точкой сочленения графа G, а в случае $n \geqslant 2$ цепь $C \setminus b_n$ является разделяющей и имеет длину $n - 1$. В силу леммы 1 и выбора цепи C в обоих случаях приходим к противоречию. Значит, вершина x существует.

Покажем, что существует такое k, что

$$k \leqslant n - 1,\ \rho(b_k, x) \geqslant n - k \text{ и } \rho(b_i, x) = n - (i + 1) \text{ при } 0 \leqslant i < k. \qquad (1)$$

Действительно, из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(b_0, x) \geqslant \rho(b_0, b_n) - \rho(b_n, x) = n - 1.$$

Если $\rho(b_0, x) \geqslant n$, то положим $k = 0$. Поэтому считаем, что $\rho(b_0, x) = n - 1$. Предположим, что при любом $i \leqslant j$ выполняется равенство $\rho(b_i, x) = n - (i+1)$. Из неравенства треугольника следует, что $\rho(b_{j+1}, x) \geqslant \rho(b_j, x) - 1 = n - (j + 2)$. Если $\rho(b_{j+1}, x) \geqslant n - (j + 1)$, то положим $k = j + 1$. Поэтому считаем, что $\rho(b_{j+1}, x) = n - (j + 2)$. Поскольку $\rho(b_{n-1}, x) \geqslant 1$, в результате приведенных рассуждений мы найдем такое $k \leqslant n-1$, что справедливо (1).

В силу СМПК существует некоторая диаметральная цепь $P=(b_k, x, y)$. Поэтому при любом $s \leqslant n$ справедливо неравенство

$$\rho(b_s, y) \geqslant d- \mid k-s \mid . \tag{2}$$

Заметим, что $y \in G^+ \setminus C$. Действительно, если это не так, то $P = (b_k, x, b_i, y)$ для некоторого i. Используя (1), при $i > k$ имеем $\rho(b_k, x) + \rho(x, b_i) \geqslant n-k+1 > i-k = \rho(b_k, b_i)$, и при $i < k$ получаем $\rho(b_k, x) + \rho(x, b_i) \geqslant 2n-k-i-1 > k-i = \rho(b_k, b_i)$. Противоречие. Значит, $y \in G^+ \setminus C$.

В силу СМПК существует некоторая диаметральная цепь (b_0, y, b^+). Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть $b^+ \in G^+ \setminus C$. Так как C — разделяющая цепь, то $\rho(b^-, b^+) = \rho(b^-, b_i) + \rho(b_i, b^+)$ при некотором i. Поэтому $d \geqslant \rho(b^-, b^+) \geqslant d-(n-i)+d-i = 2d-n$. Значит, $n=d$.

Случай 2. Пусть $b^+ \in G^-$. Тогда используя (2), для некоторого s получаем $s = \rho(b_0, b_s) = \rho(b_0, y) + \rho(y, b_s) \geqslant 2d-k- \mid k-s \mid$. Следовательно, $2d \leqslant k+s+ \mid k-s \mid = 2\max\{k, s\} \leqslant 2n$. Значит, $n=d$. Утверждение 2 доказано.

Ниже будем рассматривать только плоские графы. Под гранью плоского графа понимается простой цикл, являющийся границей этой грани.

Следствие 1. *Пусть L — произвольная грань плоского графа G, обладающего* СМПК. *Если C — кратчайшая цепь с концами $a, b \in L$, то либо $C \cap L = \{a, b\}$ и C является диаметральной разделяющей цепью, либо $C \subseteq L$.*

Доказательство. Можно считать, что L — внешняя грань. Предположим, что $C \nsubseteq L$. Тогда существует такая подцепь $C' \subseteq C$ с концами u и v, что $C' \cap L = \{u, v\}$. Следовательно, C' является разделяющей цепью и по утверждению 2 имеем $\rho(u, v) = d$. Значит, $C' = C$. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть G — плоский граф, обладающий* СМПК, *и L — его произвольная грань. Тогда для любых вершин $x, y \in L$*

$$\rho_L(x, y) \leqslant d(G) \Rightarrow \rho_L(x, y) = \rho_G(x, y).$$

Доказательство. Если вершины $x, y \in L$, то $\rho_G(x, y) \leqslant \rho_L(x, y)$. Предположим, что $\rho_G(x, y) < \rho_L(x, y) \leqslant d$. Тогда $\rho_G(x, y) = d$ по следствию 1. Противоречие. Следствие 2 доказано.

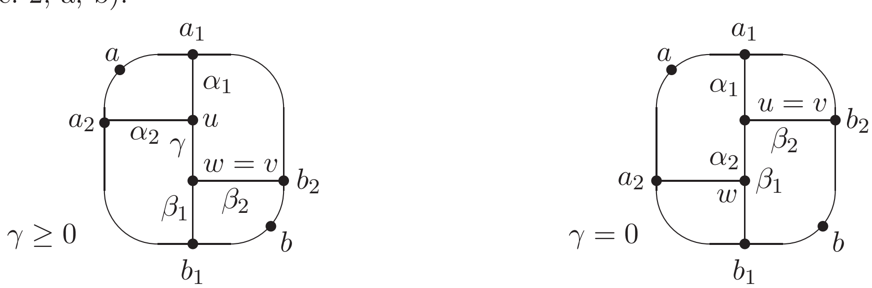
Утверждение 3. *Всякая грань произвольного плоского графа, обладающего* СМПК, *изометрична.*

Доказательство. Пусть L — произвольная грань плоского графа G, обладающего СМПК. Будем считать, что $d(G) \geqslant 2$ (иначе $G = K_n$, $n \leqslant 4$) и L — внешняя грань. Учитывая лемму 1, можно также считать, что G — двусвязный граф. В силу следствия 2 достаточно показать, что $d(L) \leqslant d$. Предположим противное.

На грани L последовательно выберем различные вершины a_1, a, a_2, b_1, b, b_2 такие, что

$$\begin{aligned}
&\rho_L(a_1, a) = \rho_L(a, a_2) = \rho_L(b_1, b) = \rho_L(b, b_2) = 1,\\
&\rho_L(a_1, b_1) = \rho_L(a_1, a_2) + \rho_L(a_2, b_1) = d + 1,\\
&\rho_L(a_2, b_2) = \rho_L(a_2, b_1) + \rho_L(b_1, b_2) = d + 1.
\end{aligned}$$

Пусть C_i — произвольная кратчайшая цепь с концами a_i, b_i. По следствию 1 имеем $C_i \cap L = \{a_i, b_i\}$ и C_i — диаметральная разделяющая цепь. Обозначим через $C[u, v]$ ориентированную простую цепь, идущую из вершины u в вершину v по цепи C. Поскольку $(C_1 \cap C_2) \setminus L \neq \emptyset$, из $C_1[a_1, b_1] \cap C_2$ можно выбрать первую вершину u и последнюю вершину w. Будем считать, что $C_1[u, w] = C_1 \cap C_2$. Тогда $C_1[a_1, u] \cap C_2 = \{u\}$, $C_1[w, b_1] \cap C_2 = \{w\}$. Пусть v — последняя вершина из $C_2[a_2, b_2] \cap C_1$. Тогда $v = u$ или $v = w$ и граф G имеет один из следующих видов (см. рис. 2, a, b).



a *b*

Рис. 2

Обозначим через α_i, β_i длины цепей $C_i[a_i, u], C_i[v, b_i]$ соответственно, $i = 1, 2$. Тогда $\alpha_i + \gamma + \beta_i = d$, $\alpha_i \geqslant 1$, $\beta_i \geqslant 1$, $u, v \notin L$, где $\gamma = \rho(u, v)$. По построению $\rho_L(a, b_1) \geqslant d$ и $\rho_L(a_1, b) \geqslant d$. Из следствий 1 и 2 получаем $\rho(a, b_1) = \rho(a_1, b) = d$. Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(a_2, b_1) \geqslant d - 1,\ \rho(a_1, b_2) \geqslant d - 1. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\rho(u, a) \geqslant \alpha_i,\ i = 1, 2. \tag{4}$$

Действительно, иначе $\rho(u, a) = \alpha_i - 1$ и в G есть кратчайшая цепь (a_i, a, u, b_i), что противоречит следствию 1. Аналогично получаем

$$\rho(v, b) \geqslant \beta_i,\ i = 1, 2. \tag{5}$$

Так как выполняются неравенства $\alpha_j + 1 \geqslant \rho(u, a) \geqslant \alpha_i$, $i \neq j$, то

$$\mid \alpha_2 - \alpha_1 \mid \leqslant 1. \tag{6}$$

В силу СМПК существуют некоторые диаметральные цепи (u, a, a') и (v, b, b'), причем в силу (4), (5) вершина a' (вершина b') лежит в области, ограниченной цепями $C_1[a_1, u]$, $C_2[a_2, u]$, $(C_1[v, b_1], C_2[v, b_2])$ и внешней гранью.

Пусть C — кратчайшая цепь с концами a', b'. Так как C_1, C_2 — разделяюшие цепи, то для некоторых i, j существуют вершины $x \in C \cap C_i[a_i, u]$ и $y \in C \cap C_j[v, b_j]$. Можно считать, что x предшествует y в цепи $C[a', b']$. Тогда

$$\rho(a', b') = \rho(a', x) + \rho(x, y) + \rho(y, b'). \tag{7}$$

Предположим, что $x = y$. Тогда $x \in C_i[a_i, u] \cap C_j[v, b_j]$. Если граф G имеет вид, указанный на рис. 2, a, то $x = u = w = v$, а в случае, когда G имеет вид, указанный на рис. 2, b, имеем $x \in C_1[u, w]$. Поэтому $u = v$ и $\rho(u, x) \leqslant \alpha_2 - 1 \leqslant \alpha_1$, $\rho(u, x) \leqslant \beta_1 - 1$. Следовательно, $\rho(a', b') = \rho(a', x) + \rho(x, b') \geqslant 2(d - \rho(u, x)) \geqslant d - \alpha_1 + d - (\beta_1 - 1) \geqslant d + 1$. Значит, $x \neq y$. Так как справедливо (3) и C_1, C_2 — диаметральные цепи, то $\rho(a_i, b_j) \geqslant d - 1$. В силу (4), (5) имеем $\rho(a', a_i) \geqslant 1$ и $\rho(b', b_j) \geqslant 1$. Поэтому $x \neq a_i$ или $y \neq b_j$ (иначе из (7) получаем $\rho(a', b') \geqslant d + 1$). Тогда $\rho(a', x) + \rho(y, b') \geqslant d - \rho(x, u) + d - \rho(y, v) \geqslant 2d - \alpha_i - \beta_j + 1$. Учитывая (6), (7), получаем $\rho(a', b') \geqslant 2d - \alpha_j - \beta_j + 1 \geqslant d + 1$. Противоречие. Утверждение 3 доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G гомеоморфен внешнепланарному графу H и обладает СМПК. Можно считать, что $d(G) \geqslant 2$ (иначе G — треугольник) и G — двусвязный граф (иначе G — ребро по лемме 1). Тогда H — двусвязный граф. Справедлива следующая очевидная

Лемма 2 [7]. *Граф H является двусвязным внешнепланарным тогда и только тогда, когда либо H — простой цикл, либо H получается из простого цикла последовательным применением следующей операции:*

добавление к плоскому графу произвольной простой цепи, соединяющей концы ребра и лежащей вне области, ограниченной этой гранью.

Зафиксируем плоскую укладку графа G, получающуюся из укладки графа H, приведенной в лемме 2. Считаем, что графы H и G не являются циклами.

Простую цепь графа G, получающуюся из некоторого ребра графа H, не лежащего на внешней грани, в результате применения операций подразбиения ребер графа H, назовем *особой*. Нам потребуются свойства особых цепей графа G, сформулированные в следующей лемме.

Лемма 3 (свойства особых цепей).

1. *Особая цепь является разделяющей.*

2. *Любые две различные особые цепи, принадлежащие одной грани, имеют не более одной общей вершины.*

3. *Если особая цепь с концами a и b, лежащая на грани L, является кратчайшей в L, то $\rho_G(a,b) = \rho_L(a,b) = d(L) = d$.*

4. *Если в n-грани L имеются две особые цепи C_1 и C_2 длины n_1 и n_2 соответственно, то $n = 2d+1$, $n_1 = n_2 = d$ и в L нет других особых цепей.*

5. *Если особая цепь C длины d принадлежит различным граням L_1 и L_2 размерности n_1 и n_2 соответственно, то $n_i \leqslant 2d$ для некоторого i.*

Доказательство. Свойства 1 и 2 следуют из определения особой цепи.

Свойство 3 непосредственно следует из свойства 1 и утверждений 2, 3.

Докажем справедливость свойства 4. В силу свойства 2 при некотором i цепь C_i является кратчайшей в L. По свойству 3 имеем $n_i = d(L) = d$. В силу свойства 2 при $j \neq i$ цепь C_j также является кратчайшей в L и $n \geqslant n_i + n_j + 1$. По свойству 3 имеем $n_j = d(L)$. Тогда $n = 2d+1$. Используя условие $d \geqslant 2$ и свойство 3, получаем, что в L нет других особых цепей.

Докажем справедливость свойства 5. Пусть $x \in L_1$ — вершина, смежная с одним концом цепи C, а вершина $y \in L_2$ — смежная с другим ее концом. По свойству 1 цепь C является разделяющей, причем грани L_1 и L_2 лежат соответственно в различных множествах V_1 и V_2, участвующих в определении разделяющей цепи. Рассмотрим кратчайшую цепь P, соединяющую вершины x и y. Тогда существует вершина $z \in P \cap C$. В силу утверждения 3 грани L_1, L_2 изометричны. Следовательно, $\rho_G(x,y) = \rho_{L_1}(x,z) + \rho_{L_2}(z,y) \geqslant \rho_{L_1 \cup L_2}(x,y)$. Очевидно, что $\rho_{L_1 \cup L_2}(x,y) \geqslant d+1$, если предположить, что $n_i \geqslant 2d+1$ для любого i. Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Рассмотрим два возможных случая для графа G.

Случай 1. В графе G существует n-грань L, в которой имеются две особые цепи C_1 и C_2. По свойству 4 имеем $n = 2d + 1$, $n_1 = n_2 = d$ и в L нет других особых цепей, где n_i — длина цепи C_i. Пусть L_i — грань, отличная от L и содержащая особую цепь C_i. В силу свойств 4 и 5 в L_i имеется единственная особая цепь C_i, $i = 1, 2$. Очевидно, что C_i — кратчайшая цепь в L. По свойству 3 цепь C_i является кратчайшей в G, и, значит, в L_i. Используя свойство 3 для грани L_i, имеем $d(L_i) = d$, а по свойству 5 длина грани L_i равна $2d$. Следовательно, G является графом вида B (см. рис. 1).

Случай 2. Пусть не выполняется случай 1. Тогда $G = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, где C_i — простая цепь с концами a, b и $C_i \cap C_j = \{a, b\}$ при $i \neq j$. Можно считать, что C_2 имеет наименьшую длину. По свойству 3 имеем $d(C_1 \cup C_2) = d(C_2 \cup C_3) = d$ и длина цепи C_2 равна d. По свойству 5 при некотором i грань $C_i \cup C_2$ имеет длину $2d$. Таким образом, G — граф вида A (см. рис. 1).

Поскольку ребро, цикл и графы, изображенные на рис. 1, удовлетворяют СМПК, теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132 (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).

2. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.

3. **Евдокимов А. А.** Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.

4. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

5. **Коршунов А. Д.** Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 107–173.

6. **Федоряева Т. И.** Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.

7. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы со свойством продолжения метрики.I // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 1. С. 83–112.

8. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы со свойством продолжения метрики.II // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 88–112.

9. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.

Адрес автора:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
9 июня 2004 г.