ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2004. Серия 2. Том 11, № 1, 11–25

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ДВУХ РЕБЕРНО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА*)

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади, Н. М. Коркишко

Рассматривается задача нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном неориентированном взвешенном графе, в котором для весов выполняется неравенство треугольника. Показано, что задача NP-трудна в сильном смысле. Предложены два приближенных алгоритма с временно́й сложностью $O(n^3)$ в случае, когда на ребрах графа задана одна весовая функция и когда заданы две весовые функции. Показано, что соответствующие оценки точности асимптотически (с ростом n) равны 9/4 и 12/5.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ — полный n-вершинный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E с такой весовой функцией $w : E \to R^+$, что справедливо *неравенство треугольника*: $w(i, j) \leqslant w(i, k) + w(j, k)$ для любых трех вершин $i, j, k \in V$. Пусть $W(E') = \sum\limits_{e \in E'} w(e)$, где $E' \subset E$. Требуется найти в графе G такие реберно непересекающиеся гамильтоновы циклы H_1 и H_2, что их суммарный вес $W(H_1)+W(H_2)$ минимален. Будем также рассматривать задачу с двумя весовыми функциями на ребрах графа $G : w_1 : E \to R^+$ и $w_2 : E \to R^+$. В этом случае в задаче требуется найти в графе G такие два реберно непересекающихся гамильтонова цикла H_1 и H_2, что минимизируется величина $W_1(H_1) + W_2(H_2)$, где $W_i(H) = \sum\limits_{e \in H} w_i(e),\ i = 1, 2.$

Рассматриваемая задача возникает, например, при планировании одновременной работы двух роботов, обрабатывающих n деталей на плате. Каждый из роботов совершает замкнутый обход всех деталей. В интересах технологической безопасности прохождение роботов по одному и

*) Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01153), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-313.2003.1) и INTAS (грант 00-217).

тому же ребру запрещается. При этом требуется минимизировать суммарное время, затрачиваемое роботами на обработку деталей.

В статье показывается, что задача NP-трудна в сильном смысле. Для решения задачи построены приближенные алгоритмы с временнóй сложностью $O(n^3)$. Показано, что гарантированные оценки точности асимптотически (с ростом n) равны $9/4$ (в случае одной весовой функции) и $12/5$ (в случае двух весовых функций). Получение оценок существенно опирается на классический результат Кристофидеса (см., например, в [2]) и Сердюкова [3], предложивших (независимо друг от друга) приближенный алгоритм построения гамильтонова цикла в полном графе с расстояниями, удовлетворяющими неравенству треугольника. Этот алгоритм (далее называемый алгоритмом КС) находит решение с гарантированной оценкой точности $3/2$ за время $O(n^3)$, определяемое сложностью нахождения совершенного паросочетания минимального веса (см., например, [4]). При построении первого алгоритма (в случае одной весовой функции) авторы использовали технику склеивания циклов 2-фактора в гамильтонов цикл, примененную А. В. Косточкой и А. И. Сердюковым [1].

1. Сложность задачи

Легко показать, что в случае задания двух весовых функций на ребрах графа задача построения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов является NP-трудной. Действительно, для произвольной задачи коммивояжера на минимум с весовой функцией ребер w положим $w_1 \equiv w$, $w_2 \equiv 0$. Для таких весовых функций w_1 и w_2 оптимальность решения задачи отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса H_1 и H_2 влечет оптимальность решения H_1 для заданной задачи коммивояжера на минимум.

Сложностной статус задачи в случае задания одной весовой функкции на ребрах графа не столь очевиден. Поэтому более подробно остановимся на обосновании NP-трудности задачи именно в этом случае.

Достаточно показать, что NP-трудной является задача отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в простом графе. Опишем полиномиальное сведéние задачи отыскания гамильтонова цикла в простом графе к этой задаче.

Пусть задан простой граф $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Требуется найти в G гамильтонов цикл H или опровергнуть его существование.

Достаточно показать, что задача NP-трудна в случае четного n. Построим граф $\widetilde{G}(V_1 \cup V_2 \cup V_3, E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$ такой, что выполнены следующие требования:

1) $|V_1| = |V_2| = n;\ V_1 = \{v_{11}; \ldots, v_{1n}\};\ V_2 = \{v_{21}, \ldots, v_{2n}\}$.

2) $|E_1| = |E_2| = |E|;\ E_1 \subseteq V1 \times V1;\ E_2 \subseteq V2 \times V2$.

3) Подграф $\widetilde{G}_1$ графа $\widetilde{G}$, порожденный множеством вершин V_1, изоморфен графу G. При этом множество ребер этого подграфа есть E_1. Для удобства изложения полагаем, что для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, вершина v_i графа G соответствует вершине v_{1i} подграфа $\widetilde{G}_1$.

4) Подграф $\widetilde{G}_2$ графа $\widetilde{G}$, порожденный множеством вершин V_2, изоморфен графу G. При этом множество ребер этого подграфа есть E_1. Полагаем, что для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, вершина v_i графа G соответствует вершине v_{12} подграфа $\widetilde{G}_2$.

5) Подграф графа $\widetilde{G}$, порожденный множеством вершин V_3, представляет собой набор из n клик размера 4. Обозначим их через $K_1, \ldots, K_n$. При этом множество ребер этого подграфа есть E_3.

6) Ребра из E_4 соединяют две вершины каждой такой клики K_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, с вершиной v_{1i} и две другие с вершиной v_{2i}.

Пример такой конструкции приведен на рис. 1.

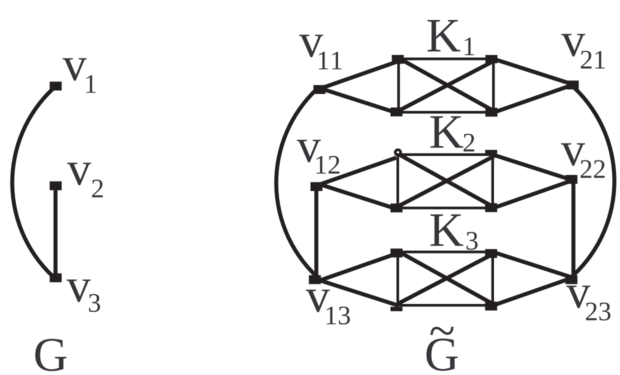

Рис. 1. Конструкция графа $\widetilde{G}$

На построенном графе $\widetilde{G}$ решим задачу нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов.

Для удобства обоснования корректности предлагаемого сведéния введем следующее определение.

Для произвольных двух вершин v_{1i}, v_{2i} назовем *перемычкой* множество ребер простого пути, соединяющего эти вершины и проходящего через клику K_i.

Поскольку в каждой такой клике содержится 4 вершины, то для произвольных вершин v_{1i}, v_{2i} существуют две непересекающиеся по ребрам

перемычки.

Лемма 1. *Если в графе G существует гамильтонов цикл, то в графе $\widetilde{G}$ существуют два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла.*

Доказательство. Ввиду четности n гамильтонов цикл графа G можно разбить на два совершенных паросочетания M_1 и M_2. Пусть множество ребер H_1 графа $\widetilde{G}$ состоит из подмножества ребер $E_1 \cap M_1$, подмножества ребер $E_2 \cap M_2$, и набора из n перемычек, по одной на каждую пару вершин (v_{1i}, v_{2i}), $1 \leqslant i \leqslant n$. Аналогично, множество ребер H_2 графа $\widetilde{G}$ состоит из подмножества ребер $E_1 \cap M_2$, подмножества ребер $E_2 \cap M_1$, и набора из n перемычек, не вошедших в H_1, по одной на каждую пару вершин (v_{1i}, v_{2i}), $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда, во-первых, H_1 и H_2 являются гамильтоновыми циклами, а во-вторых, по построению они реберно не пересекаются. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если в графе $\widetilde{G}$ существуют два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла, то в графе G существует гамильтонов цикл.*

Доказательство. Пусть H — произвольный гамильтонов цикл в графе $\widetilde{G}$. В H содержится ровно n перемычек, по одной перемычке на каждую пару вершин $(v_{1i}, v_{2i}), 1 \leqslant i \leqslant n$. Любой другой цикл либо не покрывает все вершины клик $K_1, \ldots, K_n$, либо проходит через какие-то вершины из $V_1 \cup V_2$ по нескольку раз. Следовательно, $H \cap E_i$ образует полное парососчетание на V_i, $i = 1, 2$. Пусть M_i – соответствующее ему паросочетание на V в графе G. Ясно, что $M_1 \cup M_2$ образует гамильтонов цикл в G. Лемма 2 доказана.

Леммы 1 и 2 показывают, что задача нахождения гамильтонова цикла в простом графе с четным числом вершин полиномиально сводится к задаче нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в простом графе. Так как последняя задача принадлежит классу NP, а сведенная к ней задача NP-полна, то и эта задача NP-полна.

Отсюда следует, что задача нахождения двух реберно непересекающихся циклов минимального суммарного веса является NP-трудной.

2. Приближенный алгоритм 1 для задачи с одной весовой функцией

Построим приближенное решение задачи — два реберно непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1 \subset E$ и $H_2 \subset E$. Оценки качества этого решения будет представлена в следующем разделе.

Шаг 0. Если число вершин в графе превосходит 4, то выполняется шаг 1. В противном случае решения нет.

Шаг 1. С помощью алгоритма КС строится первый гамильтонов цикл $H_1 \subset G$. Без ограничения общности считаем, что вершины графа занумерованы так, что $H_1 = \{1, 2, \ldots, n, 1\}$.

Шаг 2. Строится второй гамильтонов цикл H_2. В зависимости от четности n построение проводится по-разному.

Случай нечетного n. В качестве второго гамильтонова цикла H_2 берется последовательность вершин $1, 3, 5, \ldots, n, 2, 4, \ldots, n-1, 1$, в которой в возрастающем порядке сначала расположены все нечетные вершины, затем все четные вершины.

Случай четного n. Обозначим через C_2 (C_3) совокупность n различных ребер вида $(i, i+2)$ (соответственно, вида $(i, i+3)$). Очевидно, что $C_2 \subset G$ является 2-фактором, состоящим из двух циклов: $C' = \{1, 3, \ldots, n-1, 1\}$ и $C'' = \{2, 4, \ldots, n-2, n, 2\}$. Первый фактор состоит из всех нечетных вершин, второй – из всех четных вершин.

Рассмотрим систему из $m = n/2$ гамильтоновых циклов $\{H^1, \ldots, H^m\}$, изображенных на рис. 2.

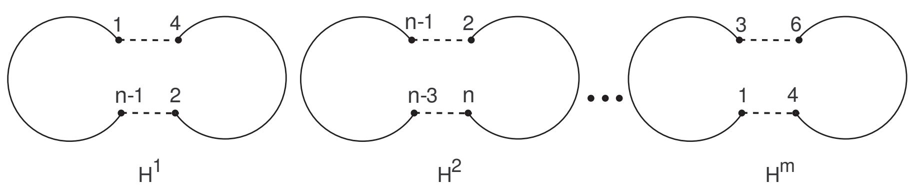

Рис. 2

Гамильтонов цикл H^j получается склейкой циклов C' и C'', образующих 2-фактор C_2. Склейка осуществляется путем удаления из указанного 2-фактора двух ребер

$$\big(2(m-j)+1,\ 2(m-j)+3\big) \in C',$$

$$\big(2(m-j)+4,\ 2(m-j)+6\big) \in C''$$

и добавления двух новых ребер

$$\big(2(m-j)+1,\ 2(m-j)+4\big) \in C_3,$$

$$\big(2(m-j)+3,\ 2(m-j)+6\big) \in C_3$$

(см. рис. 3).

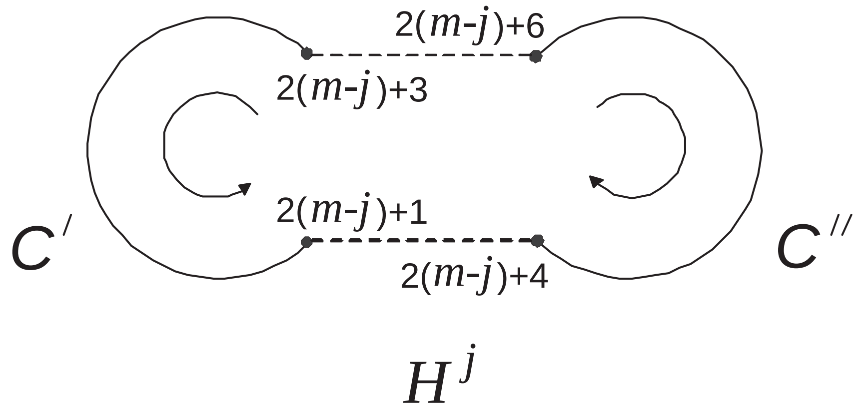

Рис. 3

В качестве второго гамильтонова цикла H_2 берем тот из циклов указанной системы, который имеет наименьший вес.

Описание алгоритма 1 закончено.

3. Оценка качества алгоритма 1

Теорема 1. *В полном n-вершинном ($n > 4$) неориентированном взвешенном графе с одной весовой функции, удовлетворяющей неравенству треугольника, алгоритм 1 находит два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла минимального суммарного веса за время $O(n^3)$ с гарантированной оценкой точности*

$$\Delta = \begin{cases} 9/4, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 9/4 + 3/n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через W^* суммарный вес двух гамильтоновых циклов оптимального решения рассматриваемой задачи, через W^*_{TSP} вес минимального обхода вершин графа G (оптимальное решение задачи коммивояжера).

Доказательство проведем отдельно для случаев нечетного и четного $n > 6$. При $n > 6$ этапы 1 и 2 алгоритма корректны. Иначе алгоритм заканчивает свою работу на этапе 0, найдя точное решение задачи. Первый случай оказывается более простым.

Случай нечетного n. Очевидно, что $2W^*_{TSP} \leqslant W^*$. Согласно алгоритму КС имеем $W(H_1) \leqslant (3/2)W^*_{TSP}$. Из неравенства треугольника следует, что $W(H_2) \leqslant 2W(H_1)$. С учетом этих неравенств имеем

$$\Delta = \frac{W(H_1) + W(H_2)}{W^*} \leqslant \frac{3W(H_1)}{2W^*_{TSP}} \leqslant \frac{3(3/2)W^*_{TSP}}{2W^*_{TSP}} = 9/4.$$

При нечетном n теорема 1 доказана.

Случай четного n. Так как суммарный вес всех m гамильтоновых циклов $H^1, \ldots, H^m$ равен $(m-1)W(C_2) + 2W(C_3)$, то вес минимального из этих циклов (обозначенный через H_2) удовлетворяет неравенству

$$W(H_2) \leqslant \frac{(m-1)W(C_2) + 2W(C_3)}{m}.$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$W(C_2) \leqslant 2W(H_1),$$

$$W(C_3) \leqslant 3W(H_1).$$

С учетом трех последних неравенств имеем

$$W(H_2) \leqslant 2W(H_1)(1 + 2/m).$$

Отсюда следует оценка точности алгоритма 1 в случае четного n

$$\Delta = \frac{W(H_1) + W(H_2)}{W^*} \leqslant \frac{W(H_1) + 2W(H_1)(1 + 2/m)}{2W^*_{TSP}}$$

$$= \frac{W(H_1)(3 + 2/m)}{2W^*_{TSP}} \leqslant \frac{(3/2)W^*_{TSP}(3 + 2/m)}{2W^*_{TSP}} = 9/4\big(1 + 4/(3n)\big),$$

т. е. асимптотически (с ростом n) оценка точности одна и та же для четных и нечетных n.

Временна́я сложность алгоритма определена трудоемкостью алгоритма КС и равна $O(n^3)$. Теорема 1 доказана.

4. Приближенный алгоритм 2 для задачи с двумя весовыми функциями

Обозначим через $G_1 = (V_1, E_1) = G = (V, E)$ граф с весовой функцией w_1, а через $G_2 = (V_2, E_2) = G = (V, E)$ граф с весовой функцией w_2.

Алгоритм состоит из трех шагов.

Шаг 0. Если число вершин в графе таково, что $n > 6\lfloor n/5 \rfloor$ (т. е. при $n \in \{7, 8, 9, 13, 14, 19\}$), то задача решается перебором, иначе выполняется шаг 1.

Шаг 1. С помощью алгоритма КС находятся два гамильтоновых цикла $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$. Их веса удовлетворяют неравенствам

$W_1(H_1) \leqslant (3/2)W_1(H_1^*)$ и $W_2(H_2) \leqslant (3/2)W_2(H_2^*)$, где H_1^* и H_2^* – гамильтоновы циклы минимального веса в соответствующих графах G_1 и G_2. Очевидно, что $W_1(H_1^*) + W_2(H_2^*) \leqslant W^*$. Если найденные циклы H_1 и H_2 не пересекаются по ребрам, то получено приближенное решение с оценкой точности 3/2 и алгоритм на этом заканчивает свою работу. В противном случае выполняется шаг 2.

Шаг 2. В качестве первого обхода берется гамильтонов цикл H_1. Целью 2-го шага является преобразование гамильтонова цикла H_2 в гамильтонов цикл $\widetilde{H}_2$, реберно непересекающийся с первым обходом H_1. Прежде всего перенумеруем вершины графа G согласно порядку обхода в гамильтоновом цикле H_2.

Пусть $n = 5m + r$, где $0 \leqslant r < 5$. Очевидно, что $m = \lfloor n/5 \rfloor$. Пусть S^k — совокупность последовательно расположенных в гамильтоновом цикле H_2 отрезков (цепей) $P_1^k, \ldots, P_m^k$. Последние получаются в результате разрезания цикла H_2 на $m - r$ отрезков по 5 ребер и оставшиеся r отрезков по 6 ребер. Индекс k означает, что первый отрезок P_1^k (в совокупности S^k) начинается с вершины k, $1 \leqslant k \leqslant K$, где

$$K = \begin{cases} 5, & \text{если } n \text{ кратно } 5, \\ n & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Крайние ребра отрезка P_i^k обозначим через e'_{ik} и e''_{ik}.

Вершины каждой цепи $P \in S^k$ обходятся путем $\widetilde{P}$, удовлетворяющим следующим свойствам:

1^o. $\widetilde{P}$ выходит из начальной вершины цепи;

2^o. $\widetilde{P}$ проходит ровно один раз через каждую внутреннюю вершину цепи P;

3^o. $\widetilde{P}$ заканчивается в концевой вершине цепи P;

4^o. $\widetilde{P}$ не содержит ребер гамильтонова цикла H_1.

(Корректность построения пути $\widetilde{P}$, состоящего из 5 или 6 ребер, следует из леммы 3).

Склеивая все пути, найденные для множества S^k, получаем гамильтонов цикл H^k, реберно непересекающийся с гамильтоновым циклом H_1. В качестве решения принимается гамильтонов цикл $\widetilde{H_2}$ наименьшего веса, выбираемый из циклов $H^1, \ldots, H^K$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что множество значений n (см. описание шага 0), при которых выполняется алгоритм на первом и втором шаге, непосредственно определено условиями $n = 5\lfloor n/5 \rfloor + r$, $6r \leqslant n$.

Описание алгоритма 2 закончено.

5. Оценка качества алгоритма 2

Для упрощения записи вторую весовую функцию будем записывать без нижнего индекса, т. е. положим $w = w_2$.

Лемма 3. *Пусть простая цепь $P \in H_2$ состоит из 5 или 6 ребер. Тогда за конечное число элементарных операций можно построить путь $\widetilde{P}$, удовлетворяющий свойствам 1^o–4^o и имеющий суммарный вес*

$$W(\widetilde{P}) \leqslant 3 \cdot W(P) - 2\big(w(e') + w(e'')\big),$$

где e', e'' – первое и последнее ребро цепи P.

Доказательство. Для каждого случая, когда цепь P состоит из 5 или 6 ребер, доказательство проведем отдельно.

Случай 5-реберной цепи. Рассмотрим цепь $P = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$. Здесь $e' = (v_1, v_2)$, $e'' = (v_5, v_6)$. Ребро $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in P$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, будем называть *запрещенным*, если $e_i \in H_1$. Доказательство утверждения основано на рассмотрении всевозможных таких цепей P (см. рис. 4).

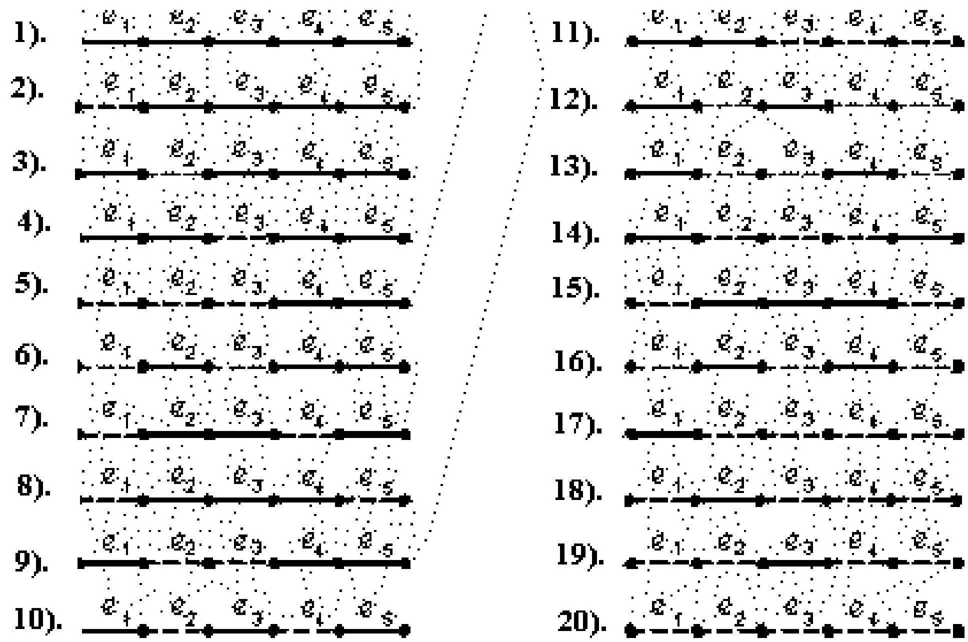

Рис. 4

На рис. 4 запрещенные ребра показаны сплошной линией.

В случае 1) условиям леммы удовлетворяет путь $\widetilde{P} = (v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6)$.

На рис. 5 путь $\widetilde{P}$ показан пунктиром с точкой.

Действительно, из неравенства треугольника имеем

$$W(\widetilde{P}) = w(v_1,v_3)+w(v_3,v_5)+w(v_5,v_2)+w(v_2,v_4)+w(v_4,v_6)$$
$$\leqslant \big(w(e_1)+w(e_2)\big)+\big(w(e_3)+w(e_4)\big)$$
$$+\big(w(e_4)+w(e_3)+w(e_2)\big)+\big(w(e_2)+w(e_3)\big)+\big(w(e_4)+w(e_5)\big)$$
$$\leqslant 3\cdot\sum_{i=1}^{5} w(e_i)-2\big(w(e_1)+w(e_5)\big)=3\cdot W(P)-2\big(w(e')+w(e'')\big).$$

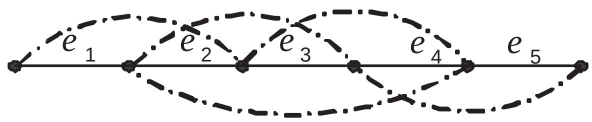

Рис. 5

В случае 6) условиям леммы удовлетворяет путь $\widetilde{P}=(v_1,v_3,v_4,\ v_2,$ $v_5,v_6)$, показанный (пунктиром с точкой) на рис. 6.

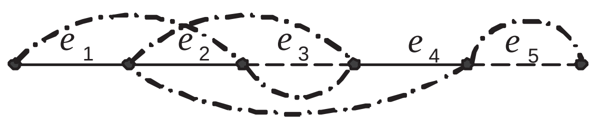

Рис. 6

Действительно, из неравенства треугольника имеем

$$W(\widetilde{P}) = w(v_1,v_3)+w(v_3,v_4)+w(v_4,v_2)+w(v_2,v_5)+w(v_5,v_6)$$
$$\leqslant \big(w(e_1)+w(e_2)\big)+w(e_3)+\big(w(e_3)+w(e_2)\big)$$
$$+\big(w(e_2)+w(e_3)+w(e_4)\big)+w(e_5)$$
$$\leqslant 3\cdot\sum_{i=1}^{5} w(e_i)-2\big(w(e_1)+w(e_4)+w(e_5)\big)\leqslant 3\cdot W(P)-2\big(w(e')+w(e'')\big).$$

Аналогичным образом рассматриваются оставшиеся случаи.

В случае 5-реберной цепи лемма доказана.

Случай 6-реберной цепи. Рассмотрим цепь $P=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7)$. Здесь $e'=(v_1,v_2)$, $e''=(v_6,v_7)$. Ребро $e_i=(v_i,v_{i+1})\in P$, $1\leqslant i\leqslant 6$, будем называть *запрещенным*, если $e_i\in H_1$. Доказательство утверждения основано на рассмотрении всевозможных цепей P с запрещенными ребрами e_1 и e_6 (см. рис. 5). Если у цепи P ребро e_1 (либо e_6) не является запрещенным, то считаем это ребро принадлежащим $\widetilde{P}$ и рассматриваем оставшуюся цепь из пяти сцепленных ребер.

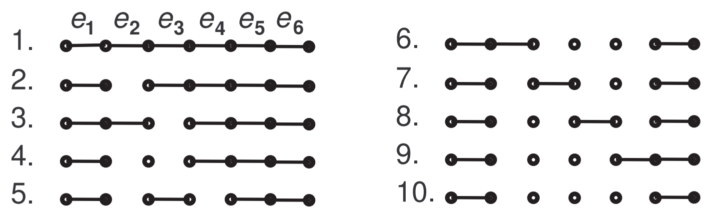

Рис. 7

На рис. 7 запрещенные ребра показаны сплошной линией.

В случае 1) условиям леммы удовлетворяет путь $\widetilde{P} = (v_1, v_3, v_6, v_4, v_2, v_5, v_7)$.

На рис. 8 путь $\widetilde{P}$ показан пунктиром с точкой.

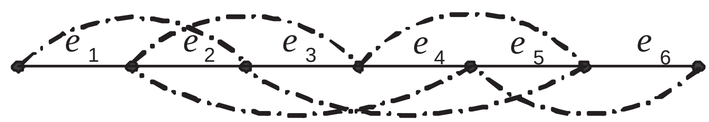

Рис. 8

Действительно, из неравенства треугольника имеем

$$W(\widetilde{Q}) = w(v_1, v_3) + w(v_3, v_6) + w(v_6, v_4) + w(v_4, v_2) + w(v_2, v_5) + w(v_5, v_7)$$

$$\leqslant \big(w(e_1) + w(e_2)\big) + \big(w(e_3) + w(e_4) + w(e_5)\big) + \big(w(e_5) + w(e_4)\big)$$

$$+\big(w(e_3) + w(e_2)\big) + \big(w(e_2) + w(e_3) + w(e_4)\big) + \big(w(e_5) + w(e_6)\big)$$

$$\leqslant 3 \cdot \sum_{i=1}^{5} w(e_i) - 2\big(w(e_1) + w(e_6)\big) = 3 \cdot W(P) - 2(w(e') + w(e'')).$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные случаи. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Вес $W(\widetilde{H_2})$ гамильтонова цикла $\widetilde{H_2}$ удовлетворяет неравенству*

$$W_2(\widetilde{H_2}) \leqslant \begin{cases} (11/5)W(H_2), & \text{если } n \text{ кратно } 5, \\ (11/5)\big(1 + 16/(11n)\big)W_2(H_2) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Вес гамильтонова цикла $\widetilde{H_2}$ равен

$$W(\widetilde{H_2}) = w(n, 1) + \sum_{j=1}^{n-1} w(j, j+1).$$

(Напомним, что для второй весовой функции используется запись $w_2 = w$.)

С учетом леммы 3 для весов гамильтоновых циклов $H^1, \ldots, H^K$ имеем

$$W(H^k) = \sum_{i=1}^{m} W(\widetilde{P}_i^k) \leqslant 3\sum_{i=1}^{m} W(P_i^k) - 2\sum_{i=1}^{m}\bigl(w(e'_{ik}) + w(e''_{ik})\bigr)$$
$$\leqslant 3W(H_2) - 2\sum_{i=1}^{m}\bigl(w(e'_{ik}) + w(e''_{ik})\bigr).$$

Так как гамильтонов цикл $\widetilde{H}_2$ имеет наименьший вес среди циклов $H^1, \ldots, H^K$, то

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant (1/K)\sum_{k=1}^{K} W(H^k) \leqslant 3W(H_2) - (2/K)\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m}\bigl(w(e'_{ik}) + w(e''_{ik})\bigr).$$

Когда n кратно 5, имеем

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant (1/5)\sum_{k=1}^{5} W(H^k) \leqslant 3W(H_2) - (2/5)\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{m}\bigl(w(e'_{ik1}) + w(e''_{ik})\bigr).$$

На рис. 9 серым цветом помечены первые ребра каждой пятерки, черным цветом — последние. Именно эти крайние ребра вычитаются. Сверху указан номер ребра в H_2, слева — значения k.

Поскольку каждое ребро e гамильтонова цикла H_2 входит в двойную сумму ровно 2 раза, имеем

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant 3W(H_2) - (2/5)2W(H_2) = (11/5)W(H_2).$$

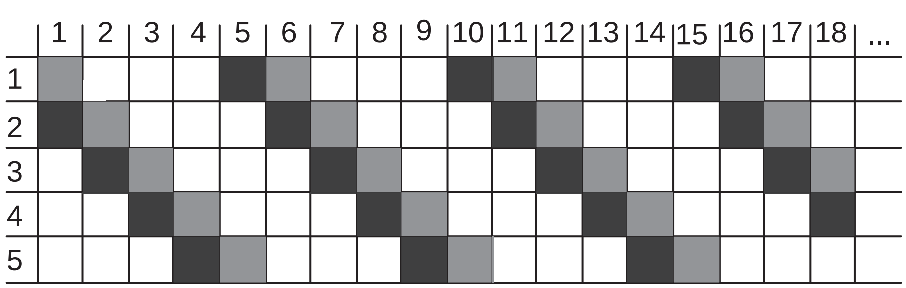

Рис. 9

Когда n не кратно 5, имеем

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant (1/n)\sum_{k=1}^{n} W(H^k) \leqslant 3W(H_2) - (2/n)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\big(w(e'_{ik}) + w(e''_{ik})\big).$$

Здесь каждое ребро e гамильтонова цикла H_2 входит в двойную сумму ровно $2m$ раз. Следовательно,

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant 3W(H_2) - (2/n)2mW(H_2)$$

и с учетом неравенства $5m \geqslant n-4$, справедливого в рассматриваемом случае, когда n не кратно 5, получаем

$$W(\widetilde{H}_2) \leqslant (11/5)\big(1 + 16/(11n)\big)W(H_2).$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *В полном n-вершинном ($n > 4$) неориентированном взвешенном графе с двумя весовми функциями, удовлетворяющими неравенству треугольника, алгоритм 2 находит два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла минимального суммарного веса за время $O(n^3)$ с гарантированной оценкой точности*

$$\Delta \leqslant \begin{cases} (12/5), & \text{если } n \text{ кратно } 5, \\ (12/5)\big(1 + 1/n\big) & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (1)$$

Доказательство. Оценку точности проведем отдельно для n, кратных и некратных 5.

Случай, когда n кратно 5. Из следующих двух неравенств

$$W_1(H_1^*) + W(H_2^*) \leqslant W^*,$$

$$W^* \leqslant W_1(H_1) + W(\widetilde{H}_2) \leqslant W_1(H_1) + (11/5)W(H_2)$$
$$\leqslant (3/2)\Big(W_1(H_1^*) + (11/5)W_1(H_2^*)\Big)$$

получаем первую оценку точности алгоритма 2

$$\Delta = \frac{W_1(H_1) + W(\widetilde{H}_2)}{W^*} \leqslant (3/2)\frac{W_1(H_1^*) + (11/5)W(H_2^*)}{W_1(H_1^*) + W(H_2^*)}$$
$$= (3/2)\Big(1 + \frac{6/5}{1+t}\Big),$$

где $t = W_1(H_1^*)/W_2(H_2^*)$.

Меняя ролями графы G_1 и G_2, получим вторую оценку точности

$$\Delta \leqslant (3/2)\Big(1 + \frac{6/5}{1+1/t}\Big).$$

Отсюда следует требуемая оценка точности алгоритма в случае n, кратных 5.

$$\Delta \leqslant (3/2)\Big(1 + \min\Big\{\frac{6/5}{1+t}, \frac{6/5}{1+1/t}\Big\}\Big) \leqslant (3/2)(1+3/5) = 12/5. \qquad (2)$$

Случай, когда n *не кратно* 5. С учетом асимптотической поправки (см. лемму 4) в этом случае имеем

$$\Delta = \frac{W_1(H_1) + W(\widetilde{H}_2)}{W^*} \leqslant (3/2)\frac{W_1(H_1^*) + (11/5)\big(1+16/(11n)\big)W(H_2^*)}{W_1(H_1^*) + W(H_2^*)}$$
$$= (3/2)\Big(1 + \frac{6/5 + 16/(5n)}{1+t}\Big),$$

где $t = W_1(H_1^*)/W(H_2^*)$. Меняя ролями графы G_1 и G_2, получаем неравенство

$$\Delta \leqslant (3/2)\Big(1 + \frac{6/5 + 16/(5n)}{1+1/t}\Big).$$

Поэтому

$$\Delta \leqslant (3/2)\Big(1 + \min\Big\{\frac{6/5+16/(5n)}{1+t}, \frac{6/5+16/(5n)}{1+1/t}\Big\}\Big)$$
$$\leqslant (3/2)(1 + 3/5 + 8/(5n)) = 12/5(1+1/n). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует (1).

Временна́я сложность алгоритма 2 определяется работой алгоритма КС и равна $O(n^3)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Представляется интересным продолжение исследований на случай более двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов. Авторы полагают, что увеличение числа несмежных гамильтоновых циклов существенно затруднит разрешение вопросов, связанных с определением сложностного статуса задачи и построением приближенных алгоритмов с хорошими оценками точности, если оставаться только в рамках техники, использованной в данной статье.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Агееву и М. Г. Пащенко за ценные советы по обоснованию NP-трудности задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косточка А. В., Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 26. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 55–59.
2. **Пападимитриу Х., Стайглиц К.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М: Мир, 1982.
3. **Сердюков А. И.** О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1984. С. 76–79.
4. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. of the 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, 1983), New York: ACM Press, 1983. P. 448–456.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Статья поступила
10 ноября 2003 г.