

УДК 681.883

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ ПОИСКА

М. Б. Беляева, М. Ю. Митрофанов

Рассматриваются три известные задачи теории поиска. В первых двух предлагаются новые способы оценки вероятности обнаружения цели при ее известной траектории и случайной дальности обнаружения D , при неизвестной траектории цели и фиксированной D . В третьей задаче оптимизируется применение “двойника” цели, обеспечивающего её уклонение от обнаружения. Сформулированы и доказаны новое общее свойство корреляционных матриц и две теоремы из области геометрических вероятностей.

1. Обнаружение цели, движущейся по известной траектории, разведчиком со случайной $D_{\text{обн}}$

Физически осуществимы два вида поиска: дискретный и непрерывный. Первый из них состоит из отдельных мгновенных “взглядов”, в результате каждого из которых цель может быть обнаружена разведчиком с некоторой вероятностью; во втором процесс наблюдения осуществляется непрерывно.

Для оценки эффективности дискретного поиска классическая теория поиска [18] предлагает следующий аппарат. Пусть в процессе поиска цели разведчик осуществляет N “взглядов” и пусть вероятность обнаружения при i -м “взгляде” равна p_i . Полагая независимыми случайные события, состоящие в обнаружении цели в результате разных “взглядов”, эффективность всего поиска (так называемую “накопленную” вероятность обнаружения цели) оценивают как вероятность того, что хотя бы один “взгляд” будет успешен:

$$P_{\text{обн}}(N) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_i). \quad (1)$$

Полагая что траектории цели и разведчика известны, а источник неопределённости — дальность обнаружения $D_{\text{обн}}$, можно записать:

$$p_i = P\{D_{\text{обн}}^i > D_{\text{рц}}^i\}, \quad (2)$$

или

$$p_i = \int_{D_{\text{рц}}^i}^{\infty} f(x) dx, \quad (3)$$

где $D_{\text{обн}}^i$ — значение случайной величины $D_{\text{обн}}$ в момент i -го “взгляда”, $D_{\text{рц}}^i$ — расстояние (неслучайное) между целью и разведчиком в тот же момент, $f(x)$ — плотность распределения $D_{\text{обн}}$.

Чаще всего используется нормальное распределение, поскольку, во-первых, с ним легче всего работать, особенно в многомерном случае, во-вторых, оно отвечает нашим интуитивным представлениям о характере разброса дальности обнаружения. В действительности распределение $D_{\text{обн}}$ неизвестно — натурные эксперименты для его определения вряд ли могут быть проведены из-за большого количества практических сложностей.

Подставив (2) или (3) в (1), получим равенство, математически безукоризненное, но малоприспособленное для практического использования, ибо следствия из него очевидным образом противоречат здравому смыслу. Действительно, представим себе, что цель и разведчик неподвижны:

$$D_{\text{рц}}^i = D_{\text{рц}}^j = D^*, \quad p_i = p_j = p^*, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

причем расстояние D^* настолько велико, что обнаружение цели при одном “взгляде” маловероятно; например, $p^* = 0,05$. Из (1) следует, что если временной промежуток Δt между двумя соседними “взглядами” равен 30 сек, то мы можем быть почти уверены, что уже через полчаса обнаружение состоится: $N = 60$, $P_{\text{обн}} > 0,95$. Сокращая Δt , мы ускорим наступление почти гарантированного обнаружения: при $\Delta t = 15$ оно наступит уже через 15 мин, а при $\Delta t = 5$ потребуется всего 5 мин. Имеем парадокс: практически необнаруживаемая цель почти наверняка будет обнаружена через короткое время.

При $\Delta t \rightarrow 0$ дискретный поиск превращается в непрерывный и, следовательно, любая сколь угодно далекая неподвижная цель должна быть обнаружена моментально. Если же цель приближается к разведчику (вероятности p_i возрастают), то обнаружение тем более будет мгновенным. Характер поведения $P_{\text{обн}}(N)$ при фиксированном $p_i = p^*$ и различных интервалах между “взглядами” представлен на рис. 1.

На практике часто используется усеченное распределение $D_{\text{обн}}$, т. е. отбрасываются значения, превосходящие некоторую большую граничную величину (с соответствующей нормировкой). В этом случае из равенства (1) получим, что цель, едва пересекая указанную границу, бу-

дет мгновенно обнаружена. Зная дальности работы современных средств обнаружения, можно ожидать, что морские и воздушные цели будут обнаруживать друг друга задолго до сближения вплотную. Как показывает опыт и здравый смысл, в реальности происходит иначе: поиск — процесс длительный и не всегда успешный. Не обнаружив друг друга вовремя, погибают столкнувшиеся в море корабли, самолеты пересекают границы, оставаясь незамеченными, несмотря на весь оптимизм равенства (1).

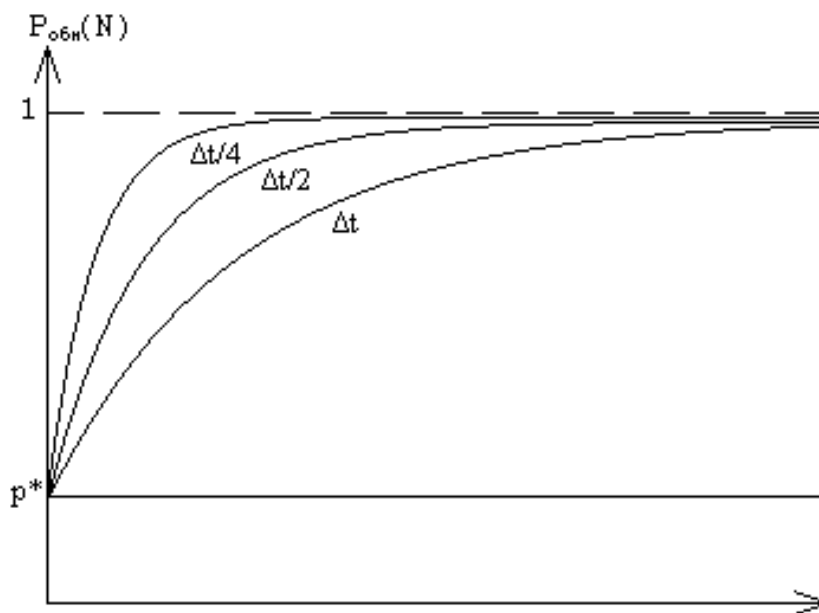


Рис. 1

Итак, с одной стороны, для независимых “взглядов” формула (1), безусловно, верна, а с другой стороны, результаты, к которым она приводит, противоречат реальности.

Очевидно, выход из возникшего парадокса — в отмене предположения о независимости “взглядов” [2, 3], как не соответствующего физической сути процесса поиска. Действительно, любые характеристики любой среды, в частности, и те, которые влияют на дальность обнаружения (температура, плотность, соленость — для воды; влажность, давление, температура — для воздуха), представляют собой случайные процессы. Известно [9], что не бывает реальных процессов с характеристиками белого шума. Следовательно, существуют отличные от нуля временные

интервалы, на которых замеры указанных характеристик в разные моменты времени непременно являются коррелированными. В литературе имеются, например, данные о виде и параметрах корреляционных функций температуры воды, полученные в разных районах Мирового океана [8, 11].

Подобных данных для дальности обнаружения нет, однако ясно, что ее значения в различные моменты, разделенные ненулевыми интервалами, также коррелированы, а случайные события, состоящие в обнаружении цели, статистически зависимы. Таким образом, мы приходим к новой для теории поиска трактовке дальности обнаружения — не случайной величины $D_{\text{обн}}$, как обычно, а случайного процесса $D_{\text{обн}}(t)$. Будем считать этот процесс гауссовским; это не увеличивает степень произвола принятых допущений. На время поиска $D_{\text{обн}}(t)$ будем полагать стационарным.

Теперь равенство (1) следует заменить на

$$P_{\text{обн}}(N) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P(i|\overline{1, 2, \dots, i-1})), \quad (4)$$

где

$$P(i|\overline{1, 2, \dots, i-1}) = P\{D_{\text{обн}}^i > D_{\text{рц}}^i | D_{\text{обн}}^1 < D_{\text{рц}}^1, D_{\text{обн}}^2 < D_{\text{рц}}^2, \dots, D_{\text{обн}}^{i-1} < D_{\text{рц}}^{i-1}\} \quad (5)$$

вероятность того, что обнаружение произойдет при i -м “взгляде” при условии, что все предыдущие “взгляды” оказались безрезультатными.

Из физических соображений ясно, что корреляция между “взглядами” положительна. Поэтому при неизменной дистанции $D_{\text{рц}}^i$ вероятность $P(i|\overline{1, 2, \dots, i-1})$ должна резко убывать со временем. Можно ожидать, что при этом накопленная вероятность $P_{\text{обн}}(N)$ не всегда будет расти до единицы, и мы избавимся от рассматриваемого парадокса. Основатель теории поиска Б. Купман, ограничившись рассмотрением процесса поиска как последовательности независимых “взглядов”, подчеркивал, что в реальной среде такая трактовка неверна, хотя оценка возникающей при этом ошибки не производилась:

“Предположение о независимости неверно, когда наблюдатель действует в условиях какой-либо реальной неопределенности, касающейся физических условий обстановки (среда — воздух или вода, — через которую должен проходить сигнал до цели), или средств обнаружения, или цели. Происшедшая неудача заставит его относиться с большим

пессимизмом к состоянию этих физических факторов и пересмотреть в сторону понижения оценку своих шансов на удачу при второй попытке” [17].

Для расчёта $P(i|\overline{1, 2, \dots, i-1})$ целесообразно воспользоваться методом Монте-Карло, промоделировав последовательность коррелированных случайных величин $D_{\text{обн}}^i$, т. е. временной ряд, и сравнив их реализации с неслучайными $D_{\text{рц}}^i$.

Существуют разные способы моделирования временных рядов [4], причем каждый способ ориентирован на конкретный вид распределения. Правда, в начале 80-х годов практически одновременно в нашей стране [12] и США [19] был предложен новый способ, заявленный как универсальный, т. е. позволяющий генерировать временной ряд с любыми требуемыми распределением и корреляционной функцией [15]. Идея способа состоит в нахождении такой перестановки независимых случайных величин с заданным законом распределения, который обеспечит совпадение выборочной корреляционной функции с заданной. При этом предполагается, что при перестановке случайных величин их распределение сохраняется.

Последнее предположение, однако, неверно. В качестве примера назовем порядковые статистики, т. е. величины, полученные путем упорядочения исходной последовательности независимых случайных величин: на первое место ставится минимальный член последовательности, на второе — минимальный из оставшихся и т. д. В [16] приведен вид распределения порядковых статистик нормальной случайной последовательности — сам он нормальным не является.

Таким образом, следует обратиться к более традиционным способам моделирования. Наиболее очевидный — стандартный — метод моделирования гауссовского ряда основан на известном факте: существует невырожденное линейное преобразование, переводящее многомерный нормальный вектор в вектор с независимыми нормальными компонентами; существует и обратное преобразование. В [4] описан соответствующий алгоритм, по ходу которого требуется последовательно выполнять операцию извлечения корня из всех главных миноров корреляционной матрицы. В процессе реализации алгоритма, однако, выяснилось, что это не всегда возможно, поскольку некоторые из главных миноров принимают отрицательные значения. Теоретически этого никак не может быть, так как одно из свойств корреляционной матрицы — положительная полуопределенность!

Проведённые расчёты показали, что главные миноры корреляцион-

ных матриц с ростом размерности быстро стремятся к нулю. Так, например, у экспоненциальной корреляционной функции $\rho(t) = \exp(-\alpha^2 t^2)$, рассчитанной с интервалом 50 сек при интервале корреляции 5 мин минор шестого порядка $\det(\rho_{ij}) = 0,9 \cdot 10^{-12}$. При работе с величинами такого масштаба машинная ошибка вычислений порой приводит к отрицательным значениям — очень малое значение минора случайно "заезжает за нуль". Этим и объясняется описанный эффект. Обнаруженное нами свойство корреляционных матриц составляет содержание следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть ξ_i , $1 \leq i \leq n$, — случайные величины, имеющие среднее и дисперсию, r_{ij} — коэффициент корреляции ξ_i и ξ_j . Тогда

$$\det(r_{ij}) \leq \prod_{i=1}^{n-1} (1 - r_{ii+1}^2).$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что все величины ξ_i имеют нулевое среднее (так как вычитая из каждой величины ее среднее, мы не изменим коэффициенты корреляции) и единичную дисперсию (по аналогичным соображениям). Тогда r_{ij} — скалярное произведение ξ_i и ξ_j в гильбертовом пространстве L_2 . Рассмотрим подпространство L_2 , натянутое на все ξ_i . Оно конечномерно и может быть отождествлено (путем выбора в нем ортонормированного базиса) с пространством \mathbb{R}^n . Тогда, как известно, определитель $\det(r_{ij})$, состоящий из попарных скалярных произведений, называется *граммианом системы* ξ_i и равен квадрату объема n -мерного параллелепипеда, натянутого на эти вектора. Далее, из элементарной геометрии известно, что объем параллелепипеда равен площади его основания (т. е., объему $n-1$ -мерного параллелепипеда, натянутого на все ξ_i , кроме n -го), умноженной на его высоту. Для завершения доказательства достаточно показать, что высота такого параллелепипеда не превосходит $\sqrt{1 - r_{n-1n}^2}$, после чего доказываемое утверждение получится из тривиального случая $n = 1$ ($\det(1) = 1$) индукцией по n .

Искомая высота есть произведение длины ребра ξ_n (равной единице, ибо в данном случае квадрат длины есть дисперсия) на синус угла между этим ребром и основанием параллелепипеда, а он, в свою очередь, не превосходит синуса угла между ξ_n и любым вектором, лежащим в плоскости основания, например, ξ_{n-1} . Но косинус угла между этими векторами равен их скалярному произведению (ибо длина каждого из них равна единице), т. е. r_{ij} . Поэтому достаточно применить известную

формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие. Если процесс ξ_i стационарен и $r_{ii+1} \neq 0$ (т. е. соседние измерения коррелированы), то $\det(r_{ij})$ стремится к нулю.

В монографии [10] неположительность главных миноров корреляционной матрицы полагается возможной лишь при формировании её по результатам статистической обработки экспериментальных данных и объясняется ошибкой расчётов. Напротив, наше исследование показывает, что этот эффект есть закономерное следствие весьма общего (и до сих пор неизвестного) свойства корреляционных матриц, проявляющийся и при их аналитическом задании.

Задачу моделирования гауссовского ряда удалось решить, обратившись к другому источнику: в [14] приведен вариант “стандартного” метода, не требующий вычисления миноров.

Результат моделирования оказался таким, как и предполагалось. В рассмотренном выше случае постоянного расстояния между целью и разведчиком условная мгновенная вероятность обнаружения стала резко убывать со временем (рис. 2), причем тем резче, чем выше вероятность p^* .

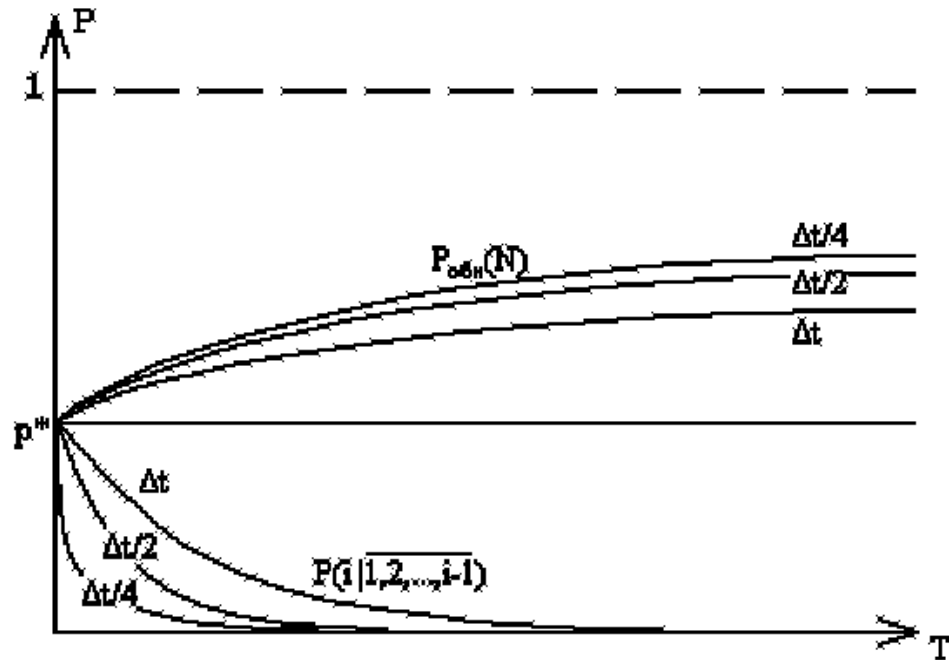


Рис. 2

Как следствие, понизилась и кривая накопленной вероятности. Теперь сокращение временного интервала между “взглядами” уже не приводит к гарантированному обнаружению, так как чем чаще они производятся, тем быстрее падает условная вероятность, а накопленная вероятность при $\Delta t \rightarrow 0$ растёт до некоторого предела, который, вообще говоря, меньше 1.

Таким образом, мы разрешили известный парадокс классической теории поиска и обнаружили новое общее свойство корреляционных матриц.

2. Обнаружение цели, движущейся по неизвестной траектории, разведчиком с фиксированной $D_{\text{обн}}$

Представим себе, что место цели неизвестно (“размазано” по району поиска) — на практике это наиболее часто встречающаяся поисковая ситуация. Под районом будем понимать плоскую выпуклую область. На практике район чаще всего выбирается прямоугольной формы.

Траектория цели нам неизвестна. Этот вид неопределённости не допускает никакой разумной формализации (“дурная” неопределённость [5]). Действительно, произвол в выборе способа действий у цели огромен: можно затаиться в углу района, можно выбрать какое-то закономерное движение, например, двигаться по окружности, по спирали, по любой другой замкнутой или разомкнутой кривой, можно выбрать какое-нибудь хаотическое движение.

Выбрав конкретный тип маневрирования цели, мы, по-видимому, сможем оценить вероятность ее обнаружения с помощью более или менее сложных математических построений. Однако этот результат ничего не будет стоить, ибо каждая цель решает, как ей двигаться, сугубо индивидуально. Мы поступим иначе: рассмотрим известные в теории поиска модели движения цели, постараемся задать на них некоторую иерархию, а в качестве искомой оценки примем среднее значение между двумя крайними результатами. При этом наши рассуждения будут носить не вполне строгий характер, исключение — теорема, которую мы докажем в целях косвенной проверки одного из этих крайних результатов, не очевидного на первый взгляд.

В [18] рассматриваются два способа поиска. Первый — это закономерный поиск (рис. 3). Цель неподвижна, ее место не меняется за все время поиска. Очевидно, наилучший способ действий разведчика состоит в том, чтобы осмотреть весь район, причем никакая часть района не должна быть обследована более одного раза; это можно сделать так, как на рис. 3, а, б или как-нибудь иначе. В результате последовательного обследования всего района обнаружение цели гарантировано (мы

пренебрегаем уголками, остающимися необследованными при поворотах разведчика, так как их площадь мала по сравнению с общей площадью поиска).

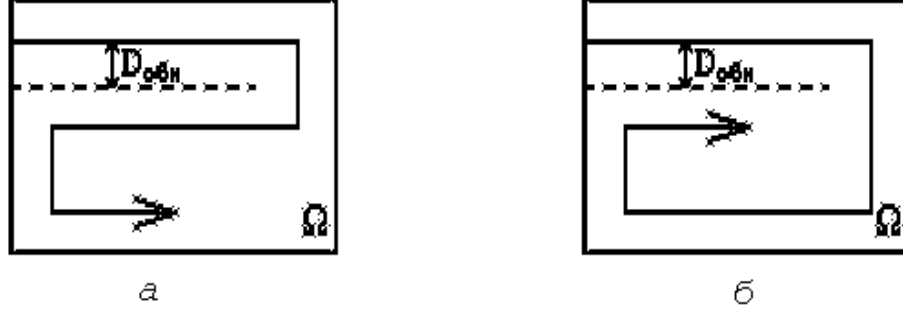


Рис. 3

Вероятность обнаружения за время T при этом равна

$$P_{\text{обн}}^{(\text{зн})}(T) = \begin{cases} \frac{2D_{\text{обн}}v_p T}{S_{\Omega}} & \text{при } 2D_{\text{обн}}v_p T < S_{\Omega}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь v_p — скорость разведчика, S_{Ω} — площадь района.

Второй способ — случайный поиск. Предполагается, что траектория разведчика длиной $L = v_p T$ настолько беспорядочна, что всю ее можно разделить на M равных участков, и считать случайные события, состоящие в обнаружении цели на различных участках, независимыми. Вероятность обнаружения на одном участке равна

$$g = \frac{2D_{\text{обн}}L/M}{S_{\Omega}}, \quad (7)$$

а за все время поиска становится равной

$$P_{\text{обн}}^{(\text{сп})}(T) = 1 - g^M = 1 - \left(1 - \frac{2D_{\text{обн}}L/M}{S_{\Omega}}\right)^M. \quad (8)$$

Увеличив число участков ($M \rightarrow \infty$), получим

$$P_{\text{обн}}^{(\text{сп})}(T) = 1 - \exp\left(-\frac{2D_{\text{обн}}v_p T}{S_{\Omega}}\right). \quad (9)$$

Последняя формула и ее модификации применяются в абсолютном большинстве практических расчетов, связанных с поиском цели в районе, и уже поэтому она заслуживает пристального внимания.

Здесь, как и в предыдущем разделе, сомнения вызывает предположение о независимости. Если цель неподвижна, то сколь бы беспорядочно ни двигался разведчик, упомянутые случайные события обязательно зависимы: обнаружение цели на первых i участках означает, что площадь возможного нахождения цели уменьшилась по сравнению с первоначальной на $\bigcup_{j=1}^i U_j$, где U_j — часть района поиска, осмотренная разведчиком при прохождении им j -го участка траектории. Следовательно, вероятность обнаружения на $(i + 1)$ -м участке будет равна не

$$\frac{S_{U_{i+1}}}{S_{\Omega}} = \frac{2D_{\text{обн}}L/M}{S_{\Omega}}, \text{ а } S_{U_{j+1} \setminus \bigcup_{j=1}^i U_j} / S_{\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^i U_j}.$$

Эффект последействия налицо, рассматриваемые события не являются независимыми, равенство (8) неверно.

Если же цель движется, то неверно равенство (7) — и, следовательно, (8) тоже.

Очевидно, для того чтобы (8) было верно, поиск должен быть организован следующим образом: в течение времени T/M цель остается неподвижной, а разведчик движется прямолинейно со скоростью v_p ; в момент окончания указанного временного интервала цель “перепрыгивает” на любое другое место, координаты которого равномерно распределены в районе независимо от предыдущего места, а разведчик продолжает прямолинейное движение либо тем же курсом, либо изменив его. Процесс повторяется M раз. Ясно, что подобная скачкообразная модель нереализуема, так как траектория любой реальной цели непрерывна.

И. Я. Динер [6] предлагает учесть движение цели, заменив скорость v_p на среднюю относительную скорость, что не снимает сомнений в обоснованности предположения о независимости, да и замена одного из аргументов нелинейной функции на его среднее значение может привести к значительной погрешности ее значений.

Возможен, конечно, и такой ход рассуждений: если допустить, что при расчете вероятности $P_{\text{обн}}^{(\text{сп})}$ по окончании каждого участка мы забываем, какую территорию мы уже обследовали и чем это кончилось (т. е. произошло обнаружение или нет), и на следующем участке начинаем поиск как бы сначала. Иначе говоря, в момент смены участков распределение места цели обновляется, “встряхивается”.

Идея случайного поиска в такой трактовке представляется несколько надуманной. Действительно, трудно представить себе реального разведчика, который в процессе поиска хронически забывает о том, где он был и, главное, видел ли он там цель.

Воспользуемся тем, что сам характер задачи предполагает учет неопределенности в движении не разведчика, а цели — ведь именно она является объектом поиска — и “перевернем” задачу. Рассмотрим три модели движения цели, имеющие хождение среди специалистов по моделированию поисковых задач.

Модель 1. Цель неподвижна (рис. 4, а). Если разведчик выполняет закономерный поиск, то вероятность обнаружения рассчитывается по формуле (6). Этот вариант мы рассмотрели выше.

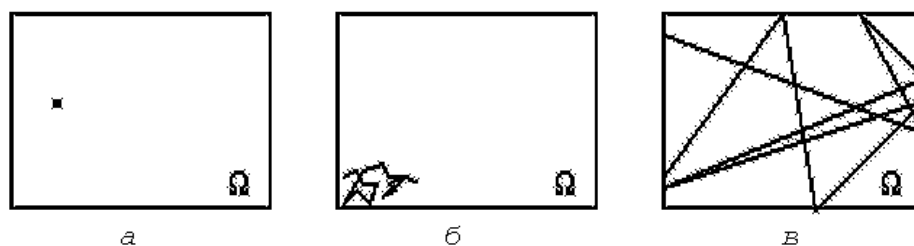


Рис. 4

Модель 2. Цель совершает броуновское движение (рис. 4, б). При этом плотность распределения ее места меняется в соответствии с законами диффузии. Возникающие оптимизационные задачи достаточно сложны и требуют применения серьезного математического аппарата. Наиболее полное изложение существующих решений, в частности, с использованием теории параболических уравнений, приведено в монографии [13]. Вряд ли они найдут практическое применение: если мы говорим о цели, осуществляющей некоторое разумное и целенаправленное перемещение, то данная модель явно не подходит. Если же цель движется беспорядочно (дрейфует), то при расчетах придется учитывать большое количество дополнительной информации — например, при поиске в море это будут данные о течениях в районе поиска. При этом потребуются еще более сложный аппарат, чем тот, что применен в [13].

Модель 3. Цель движется прямолинейно, пока не натолкнется на границу района (рис. 4, в). В этот момент она меняет направление своего движения (отталкивается от границы), выбирая его как равномерную

случайную величину на множестве тех направлений, которые позволят ей и на следующем галсе остаться внутри района. Далее цель движется прямолинейно до следующего столкновения с границей и т. д.

Этот вариант носит название “модели шершавого бильярда”, или ШБ-модели, так как описанное маневрирование напоминает движение шара по бильiardному столу (без попадания в лузы) с неровными, шершавыми стенками: угол отражения шара от стенки выбирается случайным образом независимо от угла падения.

Все три модели принципиально реализуемы (в отличие от описанной выше скачкообразной модели), но вряд ли реализуются на практике, когда речь идет о движущейся неизвестным нам образом цели. Первая модель не годится, так как в ней цель неподвижна. Во второй модели цель излишне “суетится” — реальные цели предпочитают более длинные галсы. Наоборот, в третьей модели галсы слишком длинны: район поиска обычно довольно велик, и цель успевает повернуть несколько раз до того, как достигнет границы. Кроме того, сама идея отражения от границ не имеет ничего общего с реальностью, так как цель, которую мы ищем, обычно понятия не имеет о том, какой район мы выбрали и, следовательно, не знает, где находятся его границы. Очевидно, фактическое маневрирование цели должно занимать некоторое промежуточное положение между первой и третьей моделями.

Легко видеть, что все рассмотренные модели отличаются друг от друга “временем запоминания”, т. е. временем, в течение которого последующее место цели существенно зависит от предыдущего. Для модели 1 это время совпадает с временем поиска.

У модели 2 оно поменьше, но еще достаточно велико, так как при диффузии вероятностное распределение места цели “расползается” не сразу. Гораздо более динамичен процесс, описываемый ШБ-моделью: места цели на одном и том же галсе существенно зависят друг от друга, но при переходе на следующий галс эта зависимость уменьшается, а через галс практически исчезает. Исследование, проведенное на имитационной модели, показало, что в случае неподвижного разведчика вероятность обнаружения цели, движущейся в соответствии с ШБ-моделью (“ШБ-цели”), с достаточной для практики точностью совпадает с правой частью (9), где v_p заменена на v_c . Этот результат можно объяснить указанным обстоятельством — малым временем запоминания и, следовательно, возможностью представить процесс поиска в виде последовательности большого числа независимых событий (если, конечно, время поиска достаточно велико). Наконец, у описанной выше скачкообразной

модели время запоминания еще меньше, так как зависимость полностью прекращается при переходе на следующий участок.

Если рассматривать координаты цели как двумерный случайный процесс, то “время запоминания” есть не что иное, как его интервал корреляции I . Расчет I для моделей 2 и 3 — сложная задача, но решение ее нам и не требуется. Достаточно представлять себе, что интервал корреляции задает иерархию на множестве известных моделей движения цели и определяет число событий M в равенстве (8). Заметим, что (6) — это частный случай (8) при $M = 1$. Теперь можно записать:

$$T = I_1 > I_2 > I_p > I_3,$$

где индексы 1, 2, 3 — это номера моделей, а p означает реальное маневрирование цели.

Чем меньше I , тем больше M . Вследствие (8) чем больше M , тем меньше вероятность обнаружения. Поэтому вероятность обнаружения есть монотонно возрастающая функция от I :

$$P_{\text{обн}}^{(\text{зн})} = P(I_1) > P(I_2) > P(I_p) > P(I_3) = P_{\text{обн}}^{(\text{сп})}.$$

Вряд ли в этой ситуации можно предложить более точную оценку вероятности обнаружения, чем среднее значение между минимальным и максимальным значениями:

$$\hat{P}_{\text{обн}}(T) = \frac{P_{\text{обн}}^{(\text{зн})} + P_{\text{обн}}^{(\text{сп})}}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, анализируя возможные модели движения цели, мы пришли к выводу, который, вообще говоря, можно было сделать и исходя из рассуждений Купмана о двух способах поиска. Закономерный поиск он расценивает как лучший, а случайный — как худший из всех возможных видов поиска [18]. Поэтому равенство (10) означает лишь, что в реальности осуществляется не лучший и не худший, а некоторый средний вид поиска. Представляется, однако, что наш вывод, базирующийся на анализе возможного маневрирования цели, выглядит убедительнее по двум причинам.

Во-первых, мы выделили параметр, по которому и осуществляем усреднение: интервал корреляции I . Если оценивать неизвестное нам значение интервала корреляции, соответствующего реальному маневрированию цели, как среднее значение

$$\hat{I} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} = \frac{I_1 + I_2}{2},$$

то формула (10) есть просто результат применения линейной интерполяции к вероятности обнаружения как монотонной функции I . Таким образом, механизм получения (10) в нашей трактовке более прозрачен.

Во-вторых, купмановский подход не оставляет простора для выбора способа движения разведчика. Обе оценки (7) и (9) отвечают вполне конкретным способам поиска: в первом случае — это закономерный поиск, во втором — случайный. Поэтому вопрос о выборе наилучшего варианта маневрирования разведчика остается невыясненным.

У нас же в модели 3 вид траектории разведчика не оговаривается. Известен лишь экспериментальный факт (см. выше), состоящий в том, что с точки зрения оценки вероятности обнаружения процесс поиска ШБ-цели неподвижным разведчиком представим в виде последовательности большого числа независимых событий (достаточного для справедливости оценки (9)). Логично ожидать, что такое представление допустимо и в случае движущегося разведчика, если время поиска достаточно велико, и, следовательно, при этом также можно пользоваться оценкой типа (9) (легко показать, что достаточно заменить v_p на v_ρ). А это, в свою очередь, означает, что эффективность поиска “ШБ-цели” не зависит от того, по какой траектории будет двигаться разведчик.

С другой стороны, для модели 1 — другого крайнего случая — способ маневрирования разведчика весьма важен: если поиск не будет закономерным, т. е. его траектория будет иметь самопересечения, то вероятность обнаружения окажется ниже (6).

Логично предположить, что чем больше I , тем больше вероятность обнаружения чувствительна к выбору способа маневрирования разведчика. Поэтому в условиях отсутствия информации о движении цели наилучшим будет тот способ, который максимизирует вероятность обнаружения для модели 1. Ясно, что при фиксированном значении $D_{\text{обн}}$ это закономерный поиск.

Теперь вернемся к высказанному нами предположению о том, что вероятность обнаружения цели в модели 3 индифферентна к способу маневрирования разведчика. Косвенным подтверждением того, что не существует траектории разведчика, предпочтительной в смысле вероятности обнаружения ШБ-цели, может служить следующая

Теорема 2. Среднее число пересечений случайной прямой, пересекающей плоскую выпуклую область Ω с лежащей в этой области кривой W , равно

$$\bar{k} = \frac{2L_w}{\Pi_\Omega}, \quad (11)$$

где L_w — длина кривой W , Π_Ω — длина периметра области Ω .

Действительно, если рассматривать W как траекторию разведчика, а отрезок случайной прямой внутри района поиска Ω как галс цели в ШБ-модели, то данная теорема означает, что число пересечений этой целью траектории разведчика не зависит от формы последней.

Для замкнутых выпуклых кривых равенство (11) есть следствие утверждения, доказанного в [7]: “если выпуклая фигура C_2 длины L_2 содержится в выпуклой фигуре C_1 длины L_1 , то вероятность того, что случайная хорда фигуры C_1 пересекает C_2 , равна $L_2 L_1^{-1}$ ”. В сформулированной нами теореме требуется только замкнутость и выпуклость района, а кривая W может быть любой формы.

Доказательство. Пусть k — число пересечений некоторой прямой с заданной кривой W , лежащей внутри Ω . Очевидно, что среднее число таких пересечений равно

$$\bar{k} = \sum_i i P\{k = i\}. \quad (12)$$

Для расчета $P\{k = i\}$ зададим вероятностную меру на пространстве событий. Случайное событие в данном случае состоит в выборе конкретной прямой. Для множества всех прямых на плоскости такая мера предложена в [7]: ее дифференциальный элемент — $\lambda dp d\theta$, где (p, θ) — полярные координаты точки пересечения прямой с перпендикуляром, опущенным на нее из начала координат; λ — коэффициент, конкретное значение для нас сейчас не важно (в проводимых ниже построениях он исчезнет бесследно, попав как в числитель, так и в знаменатель дроби).

Теперь можно записать

$$P\{k = i\} = \frac{M_i}{M_\Omega}, \quad (13)$$

где M_i — мера множества прямых, i раз пересекающих W , M_Ω — мера множества прямых, пересекающих район.

В [7] показано, что для выпуклой области справедливо равенство $M_\Omega = \lambda \Pi_\Omega$.

Для расчета M_i введем следующее понятие: назовем “ i -слойной проекцией кривой W в направлении θ ” ту часть всей проекции, на которую точки кривой W проектируются ровно i раз. Обозначим ее длину через $G_i(\theta)$. Для примера, заимствованного из [7] (рис. 5), имеем

$$G_1(\theta) = BC + DE, G_2(\theta) = AB, G_3(\theta) = CD.$$

Обозначим через $Z(\theta)$ сумму длин всех i -слойных проекций, взятых с соответствующими коэффициентами, т. е.

$$Z(\theta) = \sum_i iG_i(\theta). \quad (14)$$

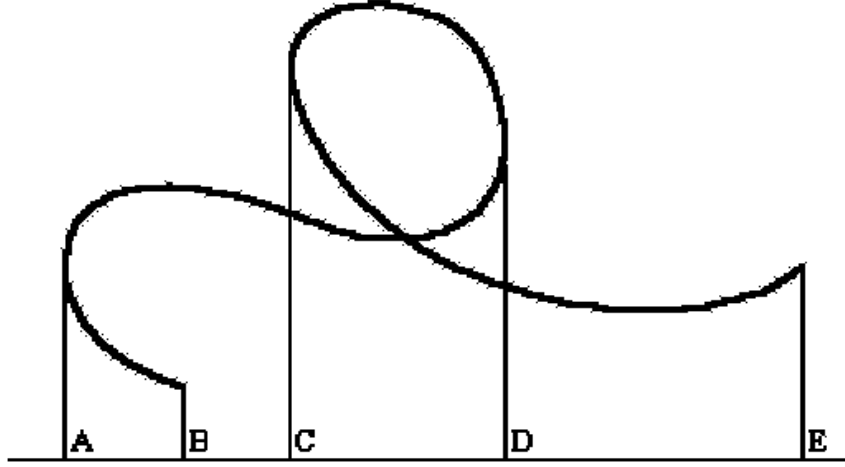


Рис. 5

В [7] введена величина $P(\theta)$ — проекция кривой в направлении θ , которая “измеряется так, что каждый подынтервал проекции подсчитывается столько раз, сколько точек из кривой проектируется на него”. Так в случае, показанном на рис. 5,

$$P(\theta) = 2AB + BC + 3CD + DE.$$

Там же доказано равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta = \frac{2L_w}{\pi}. \quad (15)$$

Легко видеть, что всегда

$$P(\theta) = Z(\theta).$$

Далее, исходя из выбранной нами меры, можно записать

$$M_i = \lambda \int_0^\pi G_i(\theta) d\theta.$$

Отсюда с учетом (13) следует, что

$$P\{k = i\} = \frac{\int_0^\pi G_i(\theta) d\theta}{\Pi_\Omega}.$$

Подставив этот результат в (12), получим:

$$\bar{k} = \frac{\sum_i i \int_0^\pi G_i(\theta) d\theta}{\Pi_\Omega} = \frac{\int_0^\pi \sum_i i G_i(\theta) d\theta}{\Pi_\Omega}.$$

Воспользовавшись (14), получим $\bar{k} = \frac{\int_0^\pi Z(\theta) d\theta}{\Pi_\Omega}$. Очевидно, $Z(\theta) = Z(\theta + \pi)$.

Поэтому $\bar{k} = \frac{\int_0^{2\pi} Z(\theta) d\theta}{2\Pi_\Omega}$. Отсюда с учетом (15) следует (11). Теорема 2 доказана.

Равенство (11) означает, что среднее число пересечений любой кривой, лежащей внутри выпуклой области, хордами этой области, зависит лишь от длины кривой и длины периметра области и не зависит от их формы. Этот результат объясняется следующим образом: линию фиксированной длины можно уложить в районе так, чтобы она была сосредоточена в его малой части (рис. 6, а), или пересекала большую его часть (рис. 6, б). В первом случае эту линию пересекут мало хорд, зато у каждой из них будет много пересечений. Во втором случае линию пересекут много хорд, но каждая — немного раз. Среднее же число пересечений постоянно.

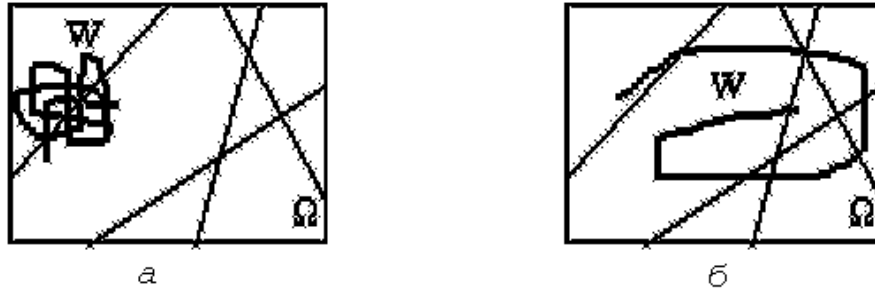


Рис. 6

Полученный результат свидетельствует о том, что все траектории разведчика одной длины равноценны с точки зрения числа пересечений

их целью, движение которой похоже на ШБ-модель. Похоже, но не совпадает — потому что траектория, как и в ШБ-модели, состоит из последовательности случайных хорд, но, в отличие от нее, разрывна. Однако “надежность расчета с инженерной точки зрения может быть проверена, например, тем, что мы найдем точное решение другой математической задачи, близкой к исходной” [1]. В этом смысле теорема 2 косвенно подтверждает высказанное выше предположение о том, что выбор разведчиком того или иного вида траектории не влияет на эффективность поиска для данной модели движения цели.

Теорема 2 представляет собой более сильный результат, нежели полученный в [7].

В обеих рассмотренных задачах учитывается корреляция между случайными событиями, которые в классической теории поиска считаются независимыми. При этом если в первом примере учет корреляции между “взглядами” снижает накопленную вероятность обнаружения цели, то во втором вероятность обнаружения повышается. Это объясняется разницей в знаках корреляции. Действительно, корреляция между “взглядами”, или значениями дальности обнаружения, положительна из-за инертности среды, а корреляция между событиями, состоящими в обнаружении цели в различных частях района поиска, отрицательна — убедившись, что цели нет в одной части района, мы начинаем больше верить в то, что найдем ее в другой.

3. Уклонение от обнаружения с помощью двойника

Пусть цель имеет перед разведчиком существенное преимущество в дальности обнаружения и пусть в ее распоряжении имеется автономный “двойник”, способный обмануть разведчика, т. е. притвориться целью и увести его за собой. Цель спасена, если при обнаружении разведчика ей удастся запустить “двойника” таким образом, чтобы он первым попал в зону обнаружения разведчика.

Траектории всех объектов прямолинейны, зона обнаружения разведчика представляет собой круговой сектор S (рис. 7). Подготовка к запуску “двойника” осуществляется мгновенно, она происходит одновременно с обнаружением целью разведчика. Необходимо найти направление движения “двойника”, обеспечивающее его попадание в S .

Задача была бы элементарной, если бы были известны все ее параметры, а именно: r_0 — расстояние между целью и разведчиком в начальный момент; v_c, v_p, v_d — скорости цели, разведчика и двойника соответственно; $v_c < v_d$, φ — угол между прямой, соединяющей цель и разведчика и направлением движения последнего; ω — угол между этой же прямой и

направлением движения цели. $\alpha, D_{\text{обн}}$ — угол раствора и радиус сектора обнаружения разведчика.

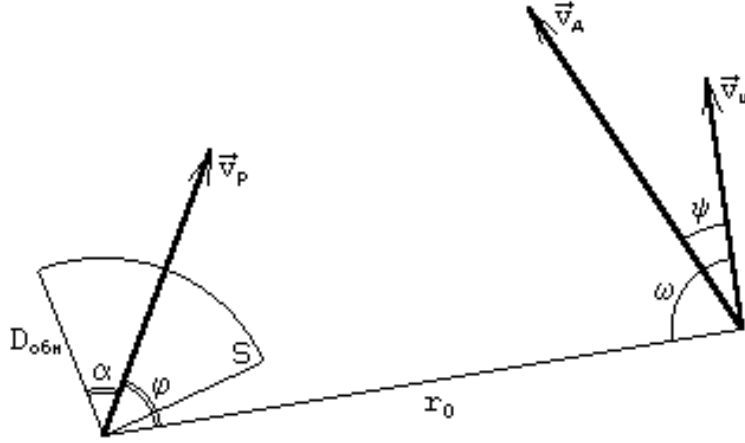


Рис. 7

Если обозначить через ψ угол между направлением движения цели и искомым направлением запуска “двойника”, то одно из возможных решений может быть получено с помощью теорем косинусов и синусов:

$$\psi = \omega - \arcsin \frac{x + v_p t}{v_d t \sin \varphi},$$

где

$$x = D_{\text{обн}} \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi},$$

а t находится из уравнения

$$v_d^2 t^2 = r_0^2 + (x + v_p t)^2 - 2r_0(x + v_p t) \cos \varphi.$$

Однако в реальности мы не знаем значений большинства из используемых параметров. Средства обнаружения, имеющиеся у цели, весьма несовершенны и не могут определить ни расстояние до разведчика (r_0), ни вектор его скорости (φ, v_u), ни тем более характеристики его сектора обнаружения ($\alpha, D_{\text{обн}}$). Известен лишь сам факт обнаружения целью разведчика и направление на него (ω).

Таким образом, мы имеем задачу с пятью неизвестными. Предлагаемое решение основано на отказе от попыток оценить их истинные значения и на использовании в полной мере предположения о том, что разведчик опасен для цели.

Совместим начало декартовой системы координат с положением разведчика в момент обнаружения его целью, а положительное направление оси ординат с направлением движения цели (рис. 7). Направление движения разведчика будем задавать углом $\xi = \omega + \varphi - \frac{\pi}{2}$, отсчитываемым от положительного направления оси абсцисс, а направление движения “двойника”, как и выше, — углом, отсчитываемым от положительного направления оси ординат. Зафиксируем r_0 , v_p , α и $D_{\text{обн}}$.

Определение 1. Угол ξ будем называть *опасным* для цели, движущейся со скоростью $v_{\text{ц}}$, если при движении разведчика под этим углом цель попадет в его сектор обнаружения. Направление, задаваемое опасным углом, назовём “*опасным направлением*”.

Множество углов, опасных для цели, обозначим через $Y = Y(r_0, \varphi, v_p, v_{\text{ц}}, \alpha, D_{\text{обн}})$.

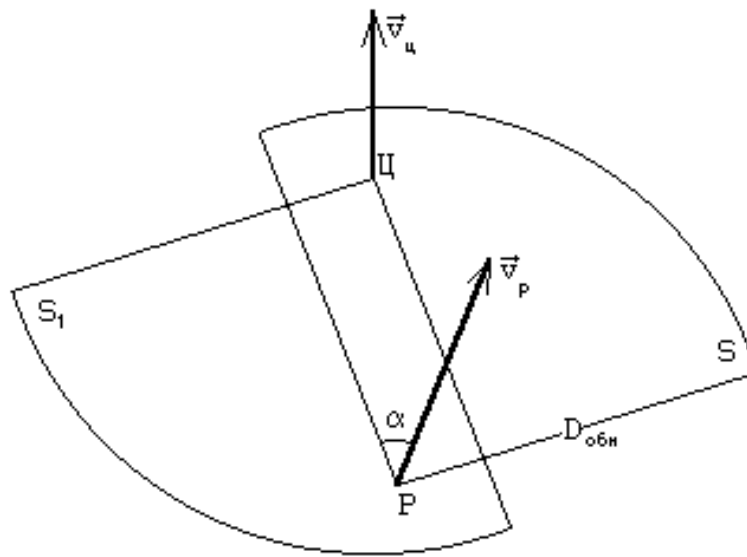


Рис. 8

Аналогично определим множество $Z = Z(r_0, \varphi, v_p, v_{\text{ц}}, \alpha, D_{\text{обн}}, \psi)$ углов, опасных для “двойника”; число параметров при этом увеличивается

на единицу за счет учета угла запуска “двойника”. Тогда вероятность спасения цели определяется равенством

$$P_c = \frac{P\{\xi \in Y \cap Z\}}{P\{\xi \in Y\}}.$$

Ясно, что для расчета P_c достаточно определить, какая часть множества углов, опасных для цели, опасна и для двойника. Максимум вероятности P_c доставит такое значение ψ , при котором эта часть будет наибольшей.

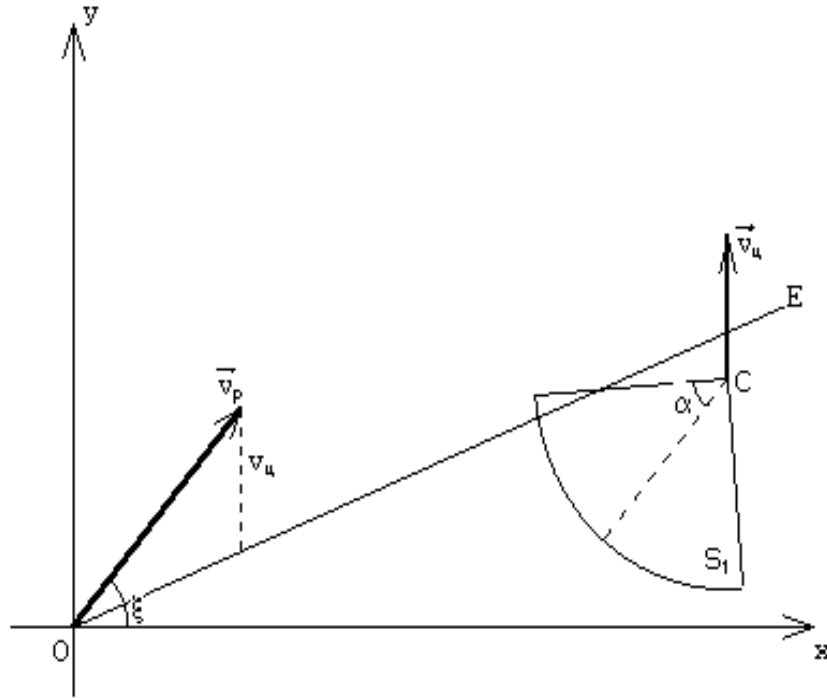


Рис. 9

Теперь забудем о существовании направлений, безопасных для цели, и предположим, что значение угла ξ достоверно принадлежит множеству Y : $P\{\xi \in Y\} = 1$. Тогда

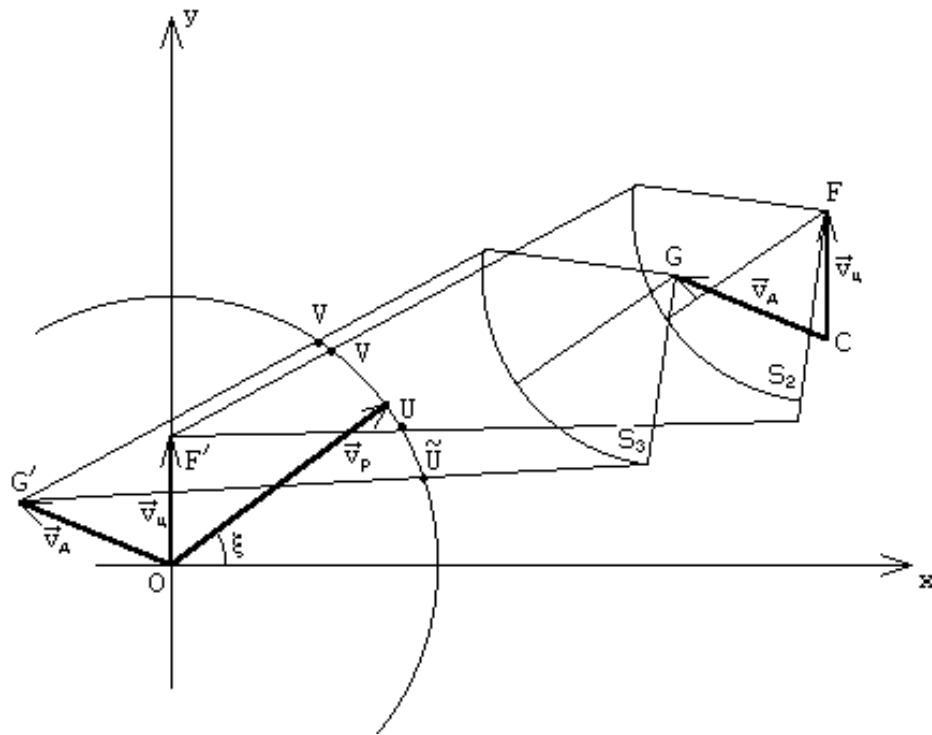
$$P_c = P\{\xi \in Y \cap Z\}.$$

Теорема 3. Если $\psi = \psi^*$, где

$$\psi^* = \omega - \arcsin\left(\frac{v_H}{v_D} \sin \omega\right), \quad (16)$$

 $\text{to } Y \subset Z.$

Доказательство. Заметим, что попадание цели (“двойника”) внутрь сектора S обнаружения разведчика равносильно попаданию разведчика внутрь равного ему по величине, но ориентированного противоположным образом сектора S_1 с вершиной в месте цели (“двойника”) (рис. 8). Поскольку такой сектор, в отличие от сектора обнаружения, не имеет физической природы, будем называть его *фигурным*; так же будем на-



Puc. 10

Очевидно, для того чтобы разведчик обнаружил цель, линия его относительного движения должна иметь пересечение с фиктивным сектором S_1 (рис. 9).

Обозначим (рис. 10) через F и G соответственно концы векторов \bar{v}_Π и \bar{v}_d с общим началом в месте цели в момент обнаружения (точка Π), а через F' , G' соответственно концы таких же векторов с общим началом в начале координат. Построим фиктивные сектора S_2 и S_3 с вершинами в точках F и G соответственно.

Определение 2. Прямыми, *ограничивающими* замкнутую плоскую кривую из точки, лежащей вне ее, будем называть границы множества лучей, исходящих из этой точки и пересекающихся с данной кривой.

Очевидно, для гладких кривых ограничивающие прямые суть касательные.

Из точки F' проведем прямые, ограничивающие сектор S_2 . Точки пересечения этих прямых с окружностью (O, v_p) обозначим через U и V . Из G' проведем прямые, ограничивающие сектор S_3 . Их точки пересечения с окружностью (O, v_p) обозначим через \tilde{U} и \tilde{V} .

Легко видеть, что угол ξ опасен для цели тогда и только тогда, когда конец вектора \bar{v}_p лежит на дуге UV . Аналогично, опасность ξ для “двойника” равносильна тому, что конец вектора \bar{v}_p лежит на дуге $\tilde{U}\tilde{V}$. Теперь достаточно доказать, что при $\psi = \psi^*$ выполняется включение

$$UV \subset \tilde{U}\tilde{V}. \quad (17)$$

Отметим, что прямые, ограничивающие фиктивные сектора S_2 и S_3 , попарно параллельны: $F'U \parallel G'\tilde{U}$, $F'V \parallel G'\tilde{V}$. Следовательно, включение (17) верно тогда и только тогда, когда угол $UF'V$ лежит внутри угла $\tilde{U}G'\tilde{V}$, или, что то же самое, когда точка F' лежит внутри угла $\tilde{U}G'\tilde{V}$.

Покажем, что последнее условие выполняется для ψ^* . Этот угол реализует сближение вплотную “двойника” с разведчиком, который, в свою очередь, движется под углом

$$\xi^* = \arcsin \frac{v_\Pi \sin \omega}{v_p} + \omega - \frac{\pi}{2},$$

реализующим его сближение вплотную с целью. Следовательно, отрезки FG и $F'G'$ параллельны прямой OC , соединяющей начальные положения цели и разведчика. Далее, из построения точек F , F' , G и G' ясно, что отрезки FF' и GG' также параллельны.

Таким образом, очевидно, что при $\psi = \psi^*$ все эти четыре точки лежат на одной прямой в следующей последовательности: G' , F' , G , F . Следовательно, точка F' непременно находится внутри угла, составленного прямыми, которые ограничивают любую кривую, содержащую точку G , и, в частности, внутри угла $\tilde{U}G'\tilde{V}$. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. Если цель запустит двойника под углом ψ^* , то она гарантированно избежит обнаружения разведчиком, т. е. $P_c = 1$.

Этот результат интересен тем, что для практической задачи, характеризующейся высокой степенью неопределенности исходных данных, удалось получить простое и точное решение, что само по себе большая редкость в прикладных областях. Правая часть равенства (16) зависит исключительно от известных нам параметров v_c , v_d и ω и индифферентна ко всем неопределенным параметрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
2. Беляева М. Б. Поиск кораблей в море: от теории к реальности // Морской сборник. 1994, № 7. С. 36–38.
3. Беляева М. Б. Теория поиска и здравый смысл // Морской сборник. 2000. № 7. С. 28–31.
4. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Советское радио, 1971.
5. Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе // Вопросы философии. 1976. № 6. С. 104–114.
6. Динер И. Я. Исследование операций. Ленинград: Военно-морская Академия, 1969.
7. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.
8. Крылов С. И. Спектры колебаний температуры в поверхностном слое моря // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5. № 9. С. 921–929.
9. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике. М.: Советское радио, 1957.
10. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.
11. Озмидов Р. В., Беляев В. С., Любимцев М. М., Пака В. Т. Исследование изменчивости гидрофизических полей на океаническом полигоне // Исследование изменчивости гидрофизических полей в океане. М.: Наука, 1974. С. 3–31.
12. Хамитов Г. П. Моделирование случайных функций с заданными статистическими параметрами: Дисс. ... канд. техн. наук. Киев, 1970.
13. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
14. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Ленинград: Машиностроение, 1986.

15. **Шеннон Р.** Имитационное моделирование систем — искусство и наука. М.: Мир, 1978.
16. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
17. **Koopman В. О.** Search and screening. New York: Pergamon Press, 1980.
18. **Koopman В. О.** The theory of search, II. Target detection // Operations research. 1956. N 4. P. 503–531.
19. **Polge R. J., Holliday E. M., Bhagavan B. K.** Generation of pseudo-random sets desire correlation and probability Distribution // Simulation. 1973. V. 20., N 5. P. 153–158.

Адрес авторов:

Беляева М. Б.,
24 ЦНИИ МО РФ,
ул. Разводная, 7,
198516, Петродворец,
Санкт-Петербург,
Россия.
E-mail: soreshn@nwgsm.ru

Митрофанов М. Ю.,
Санкт-Петербургский
государственный университет,
ул. Библиотечная, 4,
198504, Петродворец,
Санкт-Петербург,
Россия.
E-mail: miguelimo38@yandex.ru

Статья поступила
19 мая 2002 г.

Переработанный вариант —
9 февраля 2004 г.