ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2004. Серия 2. Том 11, № 1, 51–61

УДК 519.86

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

В. П. Булатов, Н. И. Федурина

Рассматриваются численные методы решения задачи выпуклого программирования, гарантированная скорость сходимости которых зависит лишь от размерности пространства, причем в среднем сходимость лучше, чем в базисных моделях эллипсоидов или симплексов. Приводится соответствующая таблица для различных значений n.

Рассмотрим решение следующей задачи:

$$\varphi_0(x) \longrightarrow \min, \tag{1}$$

где

$$x \in R, \quad R = \{x \in E^n \mid \varphi_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\} \tag{2}$$

и $\varphi_i(x)$ — выпуклые гладкие функции.

Методы решения задачи (1), (2) условно разделим на два класса. К первому отнесем те методы решения этой задачи, в которых скорость сходимости q к решению задачи (1), (2) зависит от ее специфики, исходных данных и др. Например, если $R = E^n$ для градиентного метода минимизации строго выпуклой квадратичной функции величина $q = \dfrac{M-m}{M+m}$, где $M > 0$ и $m > 0$ соответственно максимальное и минимальное собственные числа матрицы положительно определенной квадратичной формы. Очевидно, имеются такие выпуклые задачи, для которых скорость сходимости этих методов может быть сколь угодно быстрой и сколь угодно медленной.

Для методов из другого класса скорость сходимости зависит лишь от размерности пространства. Представителем этого класса методов можно назвать метод центров тяжести [4]. Основной операцией этого метода является поиск центров тяжести последовательности выпуклых множеств $R \supset R^1 \supset \cdots \supset R^k \supset R^{k+1} \supset \ldots$, содержащих решение x^* задачи (1),

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00518).

(2) и отсечение неперспективной части текущего множества R^k. Согласно лемме из [5] отношение объемов $\dfrac{|R^k|}{|R^{k-1}|}$ двух последовательных множеств, локализующих решение x^* задачи (1), (2), удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{e} \leqslant \frac{|R^k|}{|R^{k-1}|} \leqslant 1 - \frac{1}{e}, \tag{3}$$

т. е. скорость сходимости $|R^k|$ к нулю не зависит не только от структуры задачи, но даже от ее размерности. Из сходимости по объему (3) следует сходимость к нулю относительной погрешности

$$\varepsilon(x^k) = \frac{\varphi_0(x^k) - \varphi_0(x^*)}{\max\limits_{x \in R} \varphi_0(x^) - \varphi_0(x^*)}$$

точности решения задачи (1), (2).

Какова же максимальная возможная скорость сходимости $\varepsilon(x^k)$ к нулю? Оказывается, что для любого «локального метода» (см., например, [6]) решения задачи выпуклого программирования при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$K(\varepsilon) \geqslant n \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{4}$$

по-видимому, впервые полученная в [9]. Здесь $K(\varepsilon)$ — число итераций, гарантирующих решение любой задачи выпуклого программирования с точностью $\varepsilon \in [0, 1)$.

В связи с этим возникает вопрос о существовании "локальных" методов, которые гарантируют с точностью до константы c скорость сходимости и удовлетворяют условию

$$K(\varepsilon) \leqslant cn \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Оказывается, что метод центров тяжести [9] имеет константу $c = 1,6$.

К сожалению, метод не имеет практического применения, так как задача поиска центра тяжести произвольного выпуклого множества не проще исходной. Тем не менее через несколько десятилетий работа [9] породила цикл исследований по методам математического программирования, скорость сходимости которых зависит лишь от размерности пространства. Это известные методы эллипсоидов [8] и центров тяжести симплексов [1, 2]. В [9] такие методы называются эффективными. На основе метода эллипсоидов Л. Г. Хачияну удалось доказать полиномиальную разрешимость задачи линейного программирования [7].

На взгляд авторов данной работы имеет смысл получение не только гарантированной оценки скорости сходимости алгоритмов, но также получение средней оценки за счет некоторой разумной статистической гипотезы. Симплекс-метод не является полиномиальным алгоритмом для задач линейного программирования. Однако уже около пятидесяти лет он подтверждает свою высокую эффективность и в среднем для задачи линейного программирования размера $m \times n$ он использует $m + n$ итераций. Такие оценки известны для некоторых версий метода центров тяжести симплексов [1, 2]. Данная работа примыкает к этому направлению и продолжает исследования, начатые в [1–3].

1. Метод центров тяжести ортогональных симплексов. Ниже рассмотрена эффективная модификация метода центров тяжести симплексов [1] решения задачи (1), (2). Идея метода состоит в следующем. Множество R погрузим в n-мерный симплекс

$$S^n = \left\{ x \in E^n \mid x = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1, \quad a_i \geqslant 0 \right\}.$$

Гиперплоскостью, проходящей через центр тяжести S^n, симплекс разбивается на две области, и область, содержащая точку минимума x^*, вновь погружается в n-мерный симплекс меньшего объема чем предыдущий. На каждой итерации понадобится строить последовательность симплексов минимального объема, содержащих "усеченные симплексы". Так как отношение объемов симплексов инвариантно относительно линейного преобразования, то эту задачу будем решать относительно ортогонального симплекса.

2. Постановка задачи. Пусть в E^n задан ортогональный симплекс

$$S^n = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n+1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{6}$$

Центром тяжести симплекса S^n является точка $\bar{x} = (1, 1, \ldots, 1)$. Так как все симплексы аффинно подобны, то задачу оптимального покрытия будем решать для симплекса (6).

Итак, пусть задана область

$$S = \{x \mid x \in S^n, \quad a'(x - \bar{x}) \leqslant 0\}, \tag{7}$$

которую назовем усеченным симплексом. Требуется погрузить S в n-мерный симплекс V, объем которого был бы меньше объема симплекса S^n.

3. Редукция к экстремальной задаче. Очевидно, что в симплексе S^n существует хотя бы одна такая вершина x^j, что $x^j \notin S$, и плоскость $\{a \mid a'(x-\bar{x})=0\}$ отсекает на лучах, исходящих из точки x^j к другим вершинам симплекса, неотрицательные отрезки†, т. е. существует индекс $j \in \{1,\dots,n+1\}$ такой, что $a'(x^j-\bar{x})>0$, где $x^1=(0,0,\dots,0)$, $x^2=(n+1,0,\dots,0)$, $\dots$, $x^{n+1}=(0,0,\dots,n+1)$, причем в базисе $\{x^1-x^j,\ \dots,\ x^{j-1}-x^j,\ x^{j+1}-x^j,\ \dots,\ x^{n+1}-x^j\}$ вектор a имеет неположительные компоненты a_i. Поэтому без ограничения общности будем считать, что начало координат не принадлежит S, т. е.

$$a'\bar{x}<0, \quad a_i \leqslant 0, \quad i=1,\dots,n. \tag{8}$$

В противном случае начало координат всегда можно перенести в точку $x^j \notin S$, а векторы $x^1-x^j,\dots x^{n+1}-x^j$ ортогонализовать, получив снова симплекс S^n вида (6).

Таким образом будем строить новый симплекс, исходя из условия (8). Введем обозначение: $I=\{i \mid a_i<0\}$. Тогда условие (8) примет вид

$$\sum_{i\in I} a_i = p < 0.$$

Допустим, что одна из вершин b нового симплекса имеет координаты b_i, $i\in I$, удовлетворяющие условиям: $0\leqslant b_i\leqslant p/a_i$, $b_i=0$ при $i\notin I$. Легко видеть, что остальные n вершин $\bar{x}^i$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\bar{x}'x = n+1,\\ &x = b+\lambda^i(g^i-b), \quad 1\leqslant i\leqslant n, \end{aligned} \tag{9}$$

где g^i — n-мерный вектор с компонентами $(0,0,\dots,0,p/a_i,0,\dots,0)$, если $i\in I$, и $(b_1,\dots,b_{i-1},1,\,b_{i+1},\dots,b_n)$, если $i\notin I$.

Нетрудно проверить, что $\operatorname{co}\{b,\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n\}\supset S$. Разрешив систему (9) относительно λ^i, получим

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}^i-b=\lambda^i(g^i-b),\\ &\lambda^i=\frac{n+1-\sum\limits_{j\in I} b_j}{\frac{p}{a_i}-\sum\limits_{j\in I} b_j}, \end{aligned}\right\} \quad \text{при } i\in I, \tag{10}$$

†Отрезок $[\underline{x}_i,\overline{x}_i]$ назовем неотрицательным, если $\overline{x}_i\geqslant\underline{x}_i\geqslant 0$.

и

$$\bar{x}^i - b = c^i, \quad i \notin I, \tag{11}$$

где c^i — вектор с компонентами $c^i_j = 0$ при $j \neq i$ и

$$c^i_i = n + 1 - \sum_{j \in I} b_j \quad \text{при } i \notin I.$$

Требуется найти объем симплекса $V(b)$, построенного на векторах (10), (11). Так как эти векторы принадлежат ортогональным подпространствам, то

$$|V(b)| = \left(n + 1 - \sum_{j \in I} b_j\right)^{n_2} |V_{n_1}(b)|,$$

где $|V_{n_1}(b)|$ — объем симплекса, построенного на векторах (10) (n_1 — число индексов в множестве I). Допустим, что это первые n_1 индексов и $n_2 = n - n_1$,. Найдем объем симплекса $V_{n_1}(b)$. Так как $|V_{n_1}(b)| = |\det X|/n!$, где

$$\det X = \begin{vmatrix} \lambda^1(\frac{p}{a_1} - b_1) & -\lambda^2 b_1 & \dots & -\lambda^{n_1} b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^1 b_2 & \lambda^2(\frac{p}{a_2} - b_2) & \dots & -\lambda^{n_1} b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda^1 b_{n_1} & -\lambda^2 b_{n_1} & \dots & \lambda^{n_1}(\frac{p}{a_{n_1}} - b_{n_1}) \end{vmatrix},$$

то

$$|V_{n_1}(b)| = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n_1} \left[\frac{n + 1 - \sum\limits_{j \in I} b_j}{\frac{p}{a_i} - \sum\limits_{j \in I} b_j} \cdot \frac{p}{a_i} \right] \left(1 - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_i a_i}{p}\right).$$

Следовательно, объем симплекса $V(b)$, содержащего область S, равен

$$|V(b)| = \frac{\left(n + 1 - \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_i\right)^n \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n_1} \frac{b_i a_i}{p}\right) p^{n_1}}{n! \left(\frac{p}{a_1} - \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_i\right) \dots \left(\frac{p}{a_{n_1}} - \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_i\right) a_1 \cdots a_{n_1}}. \tag{12}$$

4. Решение экстремальной задачи. Следующая лемма позволяет свести решение задачи из п. 2 к однопараметрической задаче минимизации.

Лемма 1. *Объем симплекса $V(b)$ достигает минимума на векторе $b^* = (0, \dots, 0,\, b_{i^*}, 0, \dots, 0)$, где*

$$i^* = \operatorname*{argmin}_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \frac{p}{a_i}. \tag{13}$$

Доказательство этого утверждения имеется в [2].

Учитывая формулу (12) и лемму 1, получим объем нового симплекса $V(b^*)$:

$$|V(b^*)| = \frac{(n+1-b_{i^*})^n}{n!} \cdot \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{(\frac{p}{a_i} - b_{i^*})a_i}, \tag{14}$$

причем $0 \leqslant b_{i^*} \leqslant p/a_{i^*}$. Значит, для построения оптимального симплекса на каждом шаге необходимо решать следующую однопараметрическую задачу:

$$\varphi(b_{i^*}) = \frac{(n+1-b_{i^*})^n}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} (\frac{p}{a_i} - b_{i^*})} \longrightarrow \min, \quad 0 \leqslant b_{i^*} \leqslant \frac{p}{a_i}.$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что $\dfrac{d^2\varphi(b_{i^*})}{db_{i^*}^2} \geqslant 0$ на всем отрезке $[0, \dfrac{p}{a_{i^*}}]$, т. е. справедлива

Лемма 2. *На отрезке* $\left[0, \dfrac{p}{a_{i^*}}\right]$ *функция $\varphi(b_{i^*})$ выпукла.*

5. Гарантированная оценка уменьшения объема. Как и для ряда других методов центрированных отсечений, для метода центров тяжести симплексов может быть получена оценка скорости убывания последовательности объемов симплексов $V^k(b)$ как функция лишь размерности пространства E^n. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть даны*:

(1^0) n-мерный симплекс S^n вида (6);

(2^0) усеченный n-мерный симплекс S вида (7);

(3^0) симплекс $V(b_{i^*})$, содержащий область S, объем которого вычисляется по формуле (14).

Тогда

$$q = \min_{0 \leqslant b_{i^*} \leqslant \frac{p}{a_{i^*}}} \frac{|V(b_{i^*})|}{|S^n|} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1}.$$

Доказательство. Так как $\dfrac{p}{a_i} \geqslant 1$, то при $b_{i^*} = 1$ из (14) следует неравенство

$$q \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{p-a_i}.$$

Покажем, что

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{p-a_i} \leqslant \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1}. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{p-a_i} \leqslant \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{(p-a_i)(n_1-1)}\right)^{n_1-1}. \tag{16}$$

Поскольку $a_i < 0$ при $i \in I$, из условия (13) получаем

$$\frac{p}{p-a_i} \leqslant 1 + \frac{a_i}{p-a_{i^*}}. \tag{17}$$

Из неравенств (16), (17) следует, что

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} \frac{p}{p-a_i} \leqslant \left(1 + \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i^*}}^{n_1} a_i}{p-a_{i^*}} \cdot \frac{1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} = \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1},$$

либо

$$q \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1}. \tag{18}$$

Теорема 1 доказана.

6. Алгоритм решения основной задачи (1), (2). Пусть задан n-мерный симплекс

$$S_0^n = \left\{x \in E^n \mid x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0\right\}$$

с центром тяжести $\bar{x}^0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{n+1}$. Построим усеченный симплекс

$$S_0 = \{x \mid \ x \in S_0^n, \quad {a^0}'(x - \bar{x}^0) \leqslant 0\},$$

где нормаль a^0 к отсекающей плоскости задается в виде

$$a^0 = \begin{cases} \nabla\varphi_0(\bar{x}^0), & \text{если } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \varphi_i(\bar{x}^0) \leqslant 0, \\ \alpha^0 = \sum\limits_{i=1}^{m^0} u_i \nabla\varphi_i(\bar{x}^0), & \text{если } \varphi_i(\bar{x}^0) > 0, \text{ при любом } i = 1, 2, \ldots, m^0. \end{cases}$$

Здесь m^0 и u_i, где $1 \leqslant m^0 \leqslant n$ и $u_i \geqslant 0$, выбираются таким образом, что если $\nabla\varphi_i(\bar{x}^0)$ и $\nabla\varphi_j(\bar{x}^0)$ $(i \neq j;\ 1 \leqslant i, j \leqslant m^0)$ принадлежат различным ортантам, т. е. некоторые производные $\dfrac{\partial\varphi_i(\bar{x}^0)}{\partial x_\ell}$ и $\dfrac{\partial\varphi_j(\bar{x}^0)}{\partial x_\ell}$ имеют разные знаки, то соответствующие компоненты α_ℓ^0 вектора a^0 равны нулю.

Иначе, число нулевых компонент опорного вектора a^0 к конусу $\{x \mid \nabla\varphi_i(\bar{x}^0)(x - \bar{x}^0) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m^0\}$ совпадают с числом различных ортантов, которым принадлежат градиенты функций $\varphi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant m^0$.

Определим множество $R^0 = \{x^j \mid a^{0'}(x^j - \bar{x}^0) > 0, j = 1, \ldots, n+1\}$ отсеченных вершин симплекса S_0^n. Пусть x^{j0} — такая произвольная вершина в R^0, что

$$\mu_j = \frac{a^{0'}(\bar{x}^0 - x^{j0})}{a^{0'}(x^j - x^{j0})} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n+1, \quad j \neq j^0.$$

Очевидно, что существует хотя бы одна такая вершина, что плоскость $a^{0'}(x - \bar{x}^0)$ отсекает на лучах, исходящих из точки x^{j0} к другим вершинам симплекса, неотрицательные отрезки.

Перенесем начало координат в точку x^{j0} и ортогонализуем векторы $(x^j - x^{j0})$, $j = 1, \ldots, n+1$, $j \neq j^0$. Пусть A^0 — матрица ортогонального преобразования, тогда в новых переменных $z = A^0 y$, $\quad y = x - x^{j0}$ симплекс $S_0^n(z)$ будет ортогональным и будет соблюдаться условие (8).

Усеченый симплекс $S_0^n(z)$ по правилам (9) погружаем в симплекс S_1^n, $|S_1^n| < |S_0^n|$, и повторяем процедуру.

Допустим, что в центре $\bar{x}^k$ симплекса S_n^k равновероятно нарушение одного, двух или n ограничений $\varphi_i(x) \leqslant 0$, что эквивалентно равновероятности числа k, $0 \leqslant k \leqslant n$, нулевых (ненулевых) компонент вектора a' в формуле (7). Тогда оценку (18) можно усреднить, что дает следующую среднюю оценку скорости сходимости по объему итерационного процесса

$$\tilde{q} \leqslant 1 - \frac{\ln n}{n}.$$

Эта оценка существенно лучше оценки для метода центров тяжести симплексов из [1, 2].

7. Сравнение скорости сходимости метода эллипсоидов [7] и метода центров тяжести симплексов [1]. Преимущество предложенного в [1] алгоритма состоит в том, что величина сокращения объема (скорость сходимости) на каждой итерации зависит от числа отсеченных вершин.

Нетрудно видеть, что оценка

$$q^* \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = q_c$$

из [1] — отношение объемов симплексов — достигается лишь в том случае, когда отсекается только одна вершина и секущая параллельна $(n-1)$-мерной грани симплекса, содержащей n не отсеченных вершин. В методе эллипсоидов переход к эллипсоиду меньшего объема происходит с постоянной скоростью

$$q_{\text{э}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

независимо от сложившейся ситуации.

Другой, по-видимому, столь же вероятный случай, как и отсечение одной вершины, состоит в том, что отсекается n вершин.

Заметим, что при этом S_G (усеченный симплекс) есть симплекс, и симплекс S^* минимального объема, содержащий S_G, есть S_G, т. е. $q_c \leqslant 1/2$. Следовательно, при отсечении n вершин текущего симплекса получаем аналог метода деления пополам.

Допустим, что отсечение любого числа вершин k, $\;1 \leqslant k \leqslant n$, равновероятно. Тогда метод из [1] оказывается все же предпочтительней метода эллипсоидов, что следует из таблицы.

В таблице приведены $q_{\text{э}}$ (эллипсоидов), q_c (симплексов), $\bar{q}$ (среднее симплексов) для различных n в версии симплексных погружений, предложенных в [1, 2], а также среднее значение $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n}\left[\sum_{n_1=2}^{n}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} + \frac{1}{2}\right] \sim 1 - \frac{\ln n}{n}$$

для метода, рассмотренного в настоящей работе. Из таблицы видно, что предложенный здесь метод предпочтительнее как метода эллипсоидов [7], так и метода симплексных погружений [1].

n	$q_э$	q_c	$\bar{q}$	$\tilde{q}$
2	0,769800	0,888888	0,694444	0,694444
3	0,843750	0,949218	0,770369	0,764323
4	0,881318	0,970903	0,827252	0,802926
5	0,904224	0,981146	0,858031	0,828345
6	0,918685	0,986791	0,879481	0,846736
7	0,930834	0,990232	0,895311	0,860844
8	0,939250	0,992483	0,907458	0,872107
9	0,945850	0,994037	0,917078	0,881364
10	0,951140	0,995154	0,924885	0,889142
20	0,975290	0,998770	0,061309	0,930168
30	0,983468	0,999450	0,973943	0,947428
40	0,987576	0,999690	0,980357	0,957274
50	0,990049	0,999801	0,984237	0,963738
60	0,991709	0,999861	0,986837	0,968349
70	0,992882	0,999898	0,988700	0,971824
80	0,993700	0,999922	0,990102	0,974548
90	0,994450	0,999938	0,991194	0,976747
100	0,995012	0,999950	0,992069	0,978565

Авторы благодарят И. Д. Гусеву за приведенные в таблице расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Анциферов Е. Г., Булатов В. П.** Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 27, № 3. С. 348–385.
2. **Ащепков Л. Т., Белов Б. И., Булатов В. П.** Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. Новосибирск: Наука, 1984.
3. **Булатов В. П., Федурина Н. И.** Об одном эффективном методе выпуклого программирования // Материалы Всероссийской конференции "Проблемы и экономические приложения". Омск, 2003. С. 19–23.
4. **Левин Ю. Я.** Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 6. С. 1244–1247.
5. **Митягин Б. С.** Два неравенства для объемов выпуклых тел // Математические заметки. 1965. Т. 5, № 5. С. 20–25.
6. **Хачиян Л. Г.** Проблемы оптимальных алгоритмов в выпуклом программировании, декомпозиции и свертки // Компьютер и задачи выбора. М.: Наука, 1989. С. 161–204.
7. **Хачиян Л. Г.** Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 28, № 1. С. 51–69.

8. **Шор Н. З.** Методы отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. 1977. № 1. С. 94–95.

9. **Юдин Д. Б., Немировский А. С.** Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и мат. методы. 1976. Т. 12, № 2. С. 357–369.

Адрес авторов:

УНЦ Иркутской государственной
сельскохозяйственной академии и
Института систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск,
Россия.
E-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru
rector@ishi.baikal.ru

Статья поступила
10 ноября 2003 г.