ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2004. Серия 2. Том 11, № 1, 62–79

УДК 519.87

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУСТОРОННИХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ АЛГОРИТМАМИ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ*)

В. И. Зоркальцев

Рассматриваются свойства систем двухсторонних линейных неравенств. Излагаются варианты алгоритмов внутренних точек для решения таких систем. Приводятся результаты экспериментальных исследований алгоритмов применительно к линеаризованным модификациям задачи определения режимов функционирования электроэнергетических систем.

1. Системы двухсторонних линейных неравенств

Рассматривается задача поиска решения $x \in \mathbb{R}^n$ системы линейных уравнений и неравенств:

$$Ax = b, \quad \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}. \tag{1}$$

Заданы векторы $b \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Считаем, что $\underline{x} < \overline{x}$, т. е. $\underline{x}_j < \overline{x}_j$ при всех $j = 1,\dots,n$. Условия (1) будем называть *системой двухсторонних линейных неравенств*.

К этому типу предлагается относить системы линейных уравнений и неравенств, когда ограничения-неравенства задаются только для отдельных переменных; эти ограничения имеют место для всех переменных, причем с обеих сторон — сверху и снизу. При указанном представлении условия на значения линейных комбинаций нескольких переменных задаются в виде равенств, которые можно считать частным случаем двусторонних ограничений-неравенств. Действительно, условие $Ax = b$ равносильно условию $b \leqslant Ax \leqslant b$.

Вероятно, разработчик любой модели всегда способен оценить, пусть даже с запасом, диапазоны возможных вариаций отдельных переменных. Поэтому в содержательном плане система (1) универсальна, хотя

*) Исследование осуществлено в рамках интеграционного проекта № 6 за 2003 г. СО РАН, выполняемого в содружестве с учеными УрО РАН.

она не является таковой в математическом отношении — не любая система линейных неравенств путем формальных преобразований сводится к виду (1).

Целесообразность особого выделения систем с двухсторонними неравенствами выявилась в результате исследований задачи расчета режимов электроэнергетических систем (ЭЭС) [2]. Основы использования методов линеаризации и приведенного градиента для данной задачи были заложены еще в 50-х годах прошлого века в работах Л. А. Крумма, что обобщено в монографии [11]. С конца 70-х годов для решения линеаризованных подзадач при расчетах режимов ЭЭС используется метод внутренних точек, первая реализация которого для данной задачи осуществлена А. М. Тришечкиным [13].

Современное состояние моделей и методов расчета режимов ЭЭС с использованием алгоритмов внутренних точек освещено в статье О. В. Войтова [1]. Исходной утилитарной целью представленных в данной статье исследований было изучение возможности применения новых модификаций метода внутренних точек для ускорения процесса решения линеаризованной подзадачи расчета режимов ЭЭС или ускорения обнаружения случаев несовместности.

Линеаризованная задача рассчета допустимых режимов ЭЭС представляется в виде системы (1), которая, как оказалось в процессе исследований, дает большие преимущества. Особые свойства системы вида (1) и некоторые из приводимых ниже результатов более подробно обсуждались в работе [10].

В частности, выяснилось, что для системы (1) факт несовместности (противоречивости) условий может эффективно выявляться на основе приводимого ниже варианта теоремы Фаркаша об альтернативных неравенствах. При решении системы (1) многими из известных методов явно или неявно итеративно формируется вектор двойственных оценок ограничений $Ax=b$, который может использоваться в следующем критерии.

Теорема 1. *Система* (1) *несовместна тогда и только тогда, когда*

$$\psi(u) > 0 \tag{2}$$

при некотором $u \in \mathbb{R}^m$, *где*

$$\psi(u) = b^{\mathrm{T}}u - \overline{x}^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}u\right)_{+} - \underline{x}^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}u\right)_{-}.$$

Здесь $(\cdot)_{+}$, $(\cdot)_{-}$ — *положительная и отрицательная срезки*: *для* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left(x_{+}\right)_j = \max\left(0, x_j\right), \qquad \left(x_{-}\right)_j = \min\left(0, x_j\right), \quad j = 1, ..., n.$$

Доказательство этой теоремы об альтернативных неравенствах приведено в [3].

Фиктивная задача линейного программирования (ЛП). Теорему 1 можно представить в виде следствия из теории двойственности ЛП. Преобразуем систему (1) в задачу ЛП с фиктивной целевой функцией. Необходимо найти векторы $x,\ y,\ z$ из $\mathbb{R}^n$, являющиеся решением задачи

$$0^{\mathrm{T}}x + 0^{\mathrm{T}}y + 0^{\mathrm{T}}z \to \min \tag{3}$$

при ограничениях

$$Ax{=}b,\ -x-y=-\overline{x},\ \ x-z=\underline{x}, \tag{4}$$

$$y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0. \tag{5}$$

Здесь 0 — вектор со всеми нулевыми компонентами.

Задача (3)–(5) мало отличается от исходной задачи (1). Целевая функция (3) носит фиктивный характер. Проблема состоит в решении системы уравнений и неравенств (4), (5), полученной из (1) введением векторов дополнительных переменных y и z.

Особый интерес представляет двойственная к (4)–(6) задача ЛП. Пусть $u \in \mathbb{R}^m,\ \ v \in \mathbb{R}^n,\ \ w \in \mathbb{R}^n$ — векторы двойственных оценок ограничений (4).

Двойственная к фиктивной задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти векторы $u,\ v,\ w$ такие, что

$$\varphi\,(u,v,w) \equiv b^{\mathrm{T}}u - \overline{x}^{\mathrm{T}}v + \underline{x}^{\mathrm{T}}w \to \max \tag{6}$$

при ограничениях

$$A^{\mathrm{T}}u - v + w = 0, \tag{7}$$

$$v \geqslant 0,\ \ w \geqslant 0. \tag{8}$$

Данная задача имеет вполне реальную целевую функцию, но специфичные ограничения. В частности, априори известно, что двойственная задача всегда имеет допустимое решение. Более того, аналитически несложно определить все множество допустимых решений. Для любых векторов $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n_+$, где $\mathbb{R}^n_+$ — множество n-мерных векторов с неотрицательными компонентами, векторы

$$u,\ v = \left(A^{\mathrm{T}}u\right)_+ + t,\ w = -\left(A^{\mathrm{T}}u\right)_- + t \tag{9}$$

удовлетворют условиям (7), (8). Наоборот, для любых векторов u, v, w, удовлетворяющих условиям (7), (8), найдется вектор $t \in \mathbb{R}_+^n$, при котором справедливы выражения (9).

Из трех возможных случаев отсутствия решений у задач ЛП (по терминологии И. И. Еремина [5] несобственные задачи ЛП 1, 2 и 3-го рода) для рассматриваемых здесь задач возможен только один случай — целевая функция двойственной задачи неограниченна сверху на множестве допустимых решений этой задачи. В этом и только в этом случае исходная фиктивная задача ЛП не имеет допустимых решений. Отсюда следует

Теорема 2. *Линейная система* (4), (5) *и равносильная ей линейная система* (1) *несовместны тогда и только тогда, когда при некоторых* u, v, w, *удовлетворяющих ограничениям* (7), (8), *справедливо неравенство*

$$\varphi\,(u, v, w) > 0. \tag{10}$$

Условия (2) и (10) эквивалентны. Это следует из того, что для любого допустимого решения u, v, w задачи (6)–(8)

$$\psi\,(u) = \varphi\left(u,\ \left(A^{\mathrm{T}}u\right)_+,\ -\left(A^{\mathrm{T}}u\right)_-\right) \geqslant \varphi\,(u, v, w)\,.$$

Решение системы (1) можно организовать в виде процесса поиска решения задачи ЛП (6)–(8). Обычно при решении задач ЛП каким-либо методом параллельно находится решение двойственной задачи: либо в процессе решения задачи (6)–(8) будет получено ее оптимальное решение и двойственные оценки ограничений (7), которые составят решение системы (1), либо на одной из итераций будет получено допустимое решение задачи (6)–(8) с положительным значением целевой функции, что будет означать несовместность исходной системы (1).

Задача (6)–(8) может быть полезна для идентификации решения системы (1) с минимальным набором активных ограничений относительно внутренних точек множества решений системы (1). Из теории двойственности ЛП вытекает [8].

Теорема 3. *Система* (1) *совместна тогда и только тогда, когда задача* (6)–(8) *имеет оптимальные решения. В этом случае*

1) *оптимальное значение целевой функции задачи* (6)–(8) *равно нулю*;

2) *для любого решения* x *системы* (1) *и любого оптимального решения* u, v, w *задачи* (6)–(8) *выполняется условие дополняющей нежесткости*

$$\min\{\left(x_j - \underline{x}_j\right),\ v_j\} = 0, \quad \min\{\left(\overline{x}_j - x_j\right),\ w_j\} = 0, \quad j = 1, ..., n; \tag{11}$$

3) *существуют решение системы* (1) *и оптимальное решение задачи* (6)–(8), *для которых условия дополняющей нежесткости выполняются в строгой форме, т. е. в добавлении к* (11) *справедливы неравенства*

$$\max\{(x_j - \underline{x}_j)\,,\ v_j\} > 0, \quad \max\{(\overline{x}_j - x_j)\,,\ w_j\} > 0, \quad j = 1, ..., n. \qquad (12)$$

При этом выполнение условий (11) *для решения системы* (1) *и для решения* u, v, w *системы* (7), (8) *является необходимым и достаточным, чтобы векторы* u, v, w *были оптимальным решением задачи* (6)–(8).

Выполнение условий (12) *для решения* x *системы* (1) *и оптимального решения* u, v, w *задачи* (6)–(8) *является необходимым и достаточным для того, чтобы решение* x *имело минимальный набор активных ограничений среди всех решений системы* (1), *а решение* u, v, w *имело минимальный набор активных ограничений среди всех оптимальных решений задачи* (6)–(8).

Подмножество решений систем линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений совпадает с относительной внутренностью множества решений данной системы. Понятие относительной внутренности выпуклого множества ввел Р. Рокафеллар [12]. Так он назвал подмножество внутренних точек данного множества относительно минимального линейного многообразия.

Решение систем линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений имеют особое практическое значение. В частности, этот факт может быть полезен для компактного описания множества решений, при анализе устойчивости решения к варьированию параметров задачи и при решении многокритериальных задач с лексикографически упорядоченными целевыми функциями. Более подробно указанные и другие возможности эффективного использования относительно внутренних точек множества решений задач линейного программирования и систем линейных неравенств рассмотрены [4, 6].

2. Алгоритмы метода внутренних точек

Представление проблемы решения системы линейных неравенств в виде задачи ЛП с одной дополнительной переменной. Пусть задан вектор x^0 такой, что $\underline{x} < x^0 < \overline{x}$. Например, $x^0 = 0{,}5\,(\overline{x} + \underline{x})$. Пусть $r = b - Ax^0$ — вектор невязок ограничений равенств системы (1). Далее считаем, что $r \neq 0$. Иначе исходный вектор x^0 есть решение системы (1).

Рассмотрим задачу ЛП, в которой переменными являются компоненты вектора x и дополнительная переменная α:

$$\alpha \to \min, \quad Ax + \alpha r = b, \quad \underline{x} \leqslant \widetilde{x}^0 \leqslant \overline{x}. \qquad (13)$$

Двойственная к (13) задача ЛП совпадает с задачей (6)–(8) при добавлении условия $r^{\mathrm{T}}u = 1$.

Вектор x^0 и величина $\alpha^0 = 1$ образуют допустимое решение задачи (13). Так как допустимые значения вектора x ограничены, то ограничены и допустимые значения α. Следовательно, задача (13) имеет оптимальное решение. Оптимальное значение α обозначим через $\bar{\alpha}$.

Теорема 4. *Для оптимального значения целевой функции задачи* (13) *возможны четыре случая*:

1) $\bar{\alpha} = 1$ — *этот случай возможен тогда и только тогда, когда несовместна система уравнений* $Ax = b$;

2) $0 < \bar{\alpha} < 1$ — *этот случай возможен тогда и только тогда, когда система* $Ax = b$ *совместна, но среди ее решений нет удовлетворяющих ограничениям-неравенствам* $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$;

3) $\bar{\alpha} = 0$ — *этот случай возможен тогда и только тогда, когда задача* (1) *имеет решения и некоторые ограничения-неравенства для всех решений задачи* (1) *выполняется только в виде равенства*;

4) $\bar{\alpha} < 0$ — *этот случай возможен тогда и только тогда, когда задача* (1) *имеет решения, для которых все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме* (*в виде строгих неравенств*).

Доказательство. Пусть вектор y вместе со значением $\overline{\alpha}$ являются оптимальным решением задачи (13), т. е.

$$Ay + \overline{\alpha} r = b, \quad \underline{x} \leqslant y \leqslant \overline{x},$$

и для любых других x, α таких, что

$$Ax + \alpha r = b, \quad \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x},$$

выполняется неравенство $\overline{\alpha} \leqslant \alpha$. В частности при $x = x^0$ и $\alpha = \alpha^0$ имеем $\overline{\alpha} \leqslant 1$. Поэтому возможны только указанные в теореме четыре случая.

Введем вектор $x(\lambda) = x^0 + \lambda(y - x^0)$ и величину $\alpha(\lambda) = \alpha^0 + \lambda(\overline{\alpha} - \alpha^0)$, зависящие от вещественного параметра λ. Отметим, что при любом λ

$$Ax(\lambda) + \alpha(\lambda) r = b.$$

Поэтому если $\overline{\alpha} < 1$, то при $\overline{\lambda} = 1/(1 - \overline{\alpha})$ имеют место равенства

$$\alpha(\overline{\lambda}) = 0, \quad Ax(\overline{\lambda}) = b,$$

т. е. если $\overline{\alpha} < 1$, то система уравнений $Ax = b$ совместна.

Докажем обратное, что из равенства $Az = b$ при некотором $z \in \mathbb{R}^n$ следует неравенство $\overline{\alpha} < 0$.

Введем вектор
$$z(\beta) = x^0 + \beta(z - x^0),$$
зависящий от вещественного параметра β. Отметим, что
$$Az(\beta) + (1-\beta)r = b$$
при любом β. В силу того, что для вектора x^0 выполняются строгие неравенства $\underline{x} < x^0 < \overline{x}$, при некотором $\overline{\beta} > 0$ имеем
$$\underline{x} \leqslant z(\beta) \leqslant \overline{x}.$$
Итак, пара $x = z(\overline{\beta})$, $\alpha = (1 - \overline{\beta})$ является допустимым решением задачи (13). Следовательно, $\overline{\alpha} \leqslant (1 - \overline{\beta}) < 1$.

Итак, доказано первое утверждение теоремы 4.

Для остальных значений величины $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha} < 1$, система $Ax = b$ совместна и некоторые компоненты вектора y принимают граничные в условиях-неравенствах $\underline{x} \leqslant y \leqslant \overline{x}$ значения. Поскольку для вектора x^0 все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме, при любом $\lambda \in [0, 1)$ выполняются строгие неравенства
$$\underline{x} < x(\lambda) < \overline{x}.$$

Если система $Ax = b$ имеет такое решение, что $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$, то для данного вектора x и $\alpha = 0$ будут выполняться все ограничения задачи (13) и, следовательно, $\overline{\alpha} \leqslant 0$. Поэтому если $0 < \overline{\alpha} < 1$, то решения системы $Ax = b$ не удовлетворяют ограничениям-неравенствам.

Если $\overline{\alpha} \leqslant 0$, то найдется решение системы $Ax = b$, удовлетворяющее ограничениям-неравенствам. При $\overline{\alpha} = 0$ это решение есть вектор y. При $\overline{\alpha} < 0$ это вектор $x(\overline{\lambda})$.

Итак, доказано второе утверждение теоремы 4. Из этого утверждения следует, что $\overline{\alpha} \leqslant 0$ тогда и только тогда, когда исходная система (1) имеет решение.

Если $\overline{\alpha} < 0$, то
$$0 < \overline{\lambda} \equiv 1/(1 - \overline{\alpha}) < 1$$
и для вектора $x(\overline{\lambda})$ выполняются все условия системы (1). При этом ограничения-неравенства выполняются в строгой форме.

Если $\overline{\alpha} = 0$, то все решения системы (1) вместе с $\alpha = 0$ образуют оптимальное решение задачи (13). Для них, как отмечалось выше, некоторые ограничения-неравенства будут выполняться в виде равенств. Следовательно, в этом и только в этом случае у любого решения x системы (1)

достигаются граничные по условиям-неравенствам значения: при некотором j либо $x_j = \underline{x}^j$, либо $x_j = \overline{x}_j$.

Отсюда следует, что если система (1) имеет решение, для которого все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме, то $\overline{\alpha} < 0$. Итак, доказаны третьее и четвертое утверждения теоремы 4. Теорема 4 доказана.

Семейство алгоритмов метода внутренних точек. Рассматриваемые в данном разделе алгоритмы дают монотонное улучшение решения задачи (13). При этом в задачу (13) вводится дополнительное условие — неотрицательность α. Итеративный переход осуществляется по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \Delta x^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2, ..., \tag{14}$$

где Δx^k — направление улучшения решения, λ_k — шаг. На каждой итерации решению x^k соответствует значение α^k, монотонно убывающее по итерациям. Пара $\left(x^k, \alpha^k\right)$ является допустимым решением, причем

$$\underline{x} < x^k < \overline{x}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, ... \tag{15}$$

Исходным приближением служат вектор x^0 и значение $\alpha^0{=}1$. На последующих итерациях условие (15) выполняется за счет выбора шага корректировки решения

$$\lambda_k = \min\{\ 1,\ \tilde{\lambda}_k\}, \tag{16}$$

где $\tilde{\lambda}_k = \gamma \max\{\lambda \mid \underline{x} \leqslant x^k + \lambda \Delta x_k \leqslant \overline{x}\}$ при заданном $\gamma \in (0,\ 1)$.

Направление улучшения решения выбирается таким, чтобы выполнялось условие

$$A\Delta x^k = r^k, \tag{17}$$

где $r^k = b - Ax^k$ — вектор невязок ограничений-равенств исходной задачи (1) на итерации k. Подчеркнем, что (17) является только необходимым условием на вектор направления улучшения решения.

Из (14) и (17) следует, что $r^{k+1} = (1 - \lambda_k)\ r^k$. Поэтому вектор x^{k+1} и значение $\alpha^{k+1} = (1 - \lambda_k)\ \alpha^k$ являются допустимым решением задачи (13). Это также объясняет, почему в правиле (16) шаг ограничивается сверху единицей. При $\lambda_k = 1$ имеем $\alpha^{k+1} = 0$ и $r^{k+1} = 0$. Тогда вектор x^{k+1} будет решением исходной задачи (1).

В полном виде вспомогательная задача поиска направления Δx^k формулируется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\Delta x_j\right)^2 / d_j^k \to \min \tag{18}$$

при условии (17). Здесь d_j^k — некоторые положительные весовые коэффициенты.

Исходная идея изменения весовых коэффициентов состоит в следующем: чем ближе текущее значение x_j^k к любой из границ интервала $\left[\underline{x}_j, \overline{x}_j\right]$, тем меньше должно быть значение весовых коэффициентов d_j^k, тем больше должно быть значение штрафных коэффициентов $1/d_j^k$. Степень близости к границам характеризуют показатели

$$\tilde{x}_j^k = \min\{\, \overline{x}_j - x_j^k,\ \ x_j^k - \underline{x}_j\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

Изложенную идею уточняет следующее аксиоматическое условие на выбор весовых коэффициентов. Должно выполняться неравенство

$$\underline{\sigma}\left(\tilde{x}_j^k\right) \leqslant d_j^k \leqslant \overline{\sigma}\left(\tilde{x}_j^k\right), \ \ 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{20}$$

где $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ — некоторые функции от неотрицательного аргумента, удовлетворяющие двум требованиям:

1) для любого $\beta > 0$ справедливы неравенства

$$0 < \underline{\sigma}\left(\beta\right) \leqslant \overline{\sigma}\left(\beta\right); \tag{21}$$

2) для некоторых $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ при всех $\beta \in (0,\, \varepsilon)$ и $t \in [0,\, 1]$ выполнено неравенство

$$\bar{\sigma}\left(t\beta\right) \leqslant M t \underline{\sigma}\left(\beta\right). \tag{22}$$

Для решения вспомогательной задачи (18) можно воспользоваться методом множителей Лагранжа. Вектор из $\mathbb{R}^m$ множителей Лагранжа ограничений (17) обозначим через u^k. Этот вектор определяется в результате решения системы линейных уравнений

$$AD^kA^{\mathrm{T}}u = r^k, \tag{23}$$

где $D^k = \operatorname{diag} d^k$, d^k — вектор из $\mathbb{R}^n$ с компонентами d_j^k. Чтобы избежать неоднозначности в определении вектора u^k, можно считать, что матрица A имеет ранг m или вектор u^k является решением системы (23) с минимальной нормой.

Если $\psi\left(u^k\right) > 0$, то в силу теоремы 1 исходная задача (1) не имеет решения. Иначе вычисляем направление корректировки решения

$$\Delta x^k = D^kA^{\mathrm{T}}u^k,$$

определяем шаг корректировки и осуществляем итеративный переход (14).

Если $\lambda_k = 1$, то вектор x^{k+1} является решением исходной задачи (1) и вычисления завершаются. В противном случае вычисления продолжаются на итерации $k + 1$.

Отметим, что несовместность системы $Ax = b$ выявляется сразу на исходной итерации. Только в этом случае $\delta^0 = 0$. Иначе на всех итерациях $\delta^k > 0$. Здесь $\delta^k = r^{\mathrm{T}} u^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

Если система $Ax = b$ совместна, то векторы

$$\tilde{u}^k = \frac{1}{\delta^k} u^k, \quad \tilde{v}^k = \left(A^{\mathrm{T}} \tilde{u}^k\right)_+, \quad \tilde{w}^k = -\left(A^{\mathrm{T}} \tilde{u}^k\right)_- \tag{24}$$

являются допустимым решением задачи, двойственной к (13).

Сходимость порождаемых решений. Если вычисления не прекратятся при получении требуемого решения или выявлении несовместности условий системы (1), то рассматриваемый вычислительный процесс будет порождать бесконечную последовательность допустимых решений задачи (13) с монотонным убыванием целевой функции: $\alpha^k > \alpha^{k+1} > 0$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Следовательно, $\alpha^k \to \tilde{\alpha}$ при $k \to \infty$ для некоторого $\tilde{\alpha} \geqslant 0$. Использование положительности значений весовых коэффициентов d_j^k дает [10] сходимость векторов x^k: существует $y \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = y$. Учитывая условия (19)–(22), можно доказать [6], что вектор y и значение $\tilde{\alpha}$ являются стационарным решением задачи (13), т. е.

$$\tilde{g}_j \min\{\overline{x}_j - y_j,\ y_j - \underline{x}_j\} = 0, \ \ 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{25}$$

при $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ и $\tilde{g} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$A^{\mathrm{T}} \tilde{u} - \tilde{g} = 0, \quad r^{\mathrm{T}} \tilde{u} = 1, \tag{26}$$

причем векторы $\tilde{u},\ \tilde{g}$ являются пределами при $k \to \infty$ последовательностей векторов $\tilde{u}^k$, и $\tilde{v}^k + \tilde{w}^k$ из (24). Подчеркнем, что указанные и некоторые другие теоретические факты являются переносом результатов, доказанных для задачи линейного программирования в стандартной форме, на алгоритмы внутренних точек для рассматриваемой здесь специфической задачи линейного программирования.

Обоснование вычислительного процесса при предположении о невырожденности задачи. Предположим, что $\tilde{u},\ \tilde{g}$ являются единственной парой векторов, для которых справедливы соотношения (25), (26). Это называется предположением невырожденности решения y.

Основываясь на результатах обоснования алгоритмов метода внутренних точек для невырожденных задач линейного программирования [6], можно доказать, что при предположении о невырожденности выполняются условия дополняющей нежесткости в строгой форме. Из (25) и (26) следует, что для вектора y и векторов $\tilde{v} = \tilde{g}_+$, $\tilde{w} = \tilde{g}_-$ выполняются условия (11), (12). Согласно теореме 4 это означает, что вектор y вместе со значением $\tilde{\alpha}$ будет относительной внутренней точкой множества оптимальных решений задачи (13).

Отметим, что векторы $\tilde{u}$, $\tilde{w} = \tilde{g}_+$ и $\tilde{w} = -(\tilde{g})_-$ являются относительной внутренней точкой множества оптимальных решений задачи, двойственной к (13), причем при $k \to \infty$ имеем

$$\tilde{u}^k \to \tilde{u}, \;\; \tilde{v}^k \to \tilde{v}, \;\; \tilde{w}^k \to \tilde{w}, \quad \varphi\left(\;\; \tilde{u}^k, \, \tilde{v}^k, \, \tilde{w}^k\right) \to \tilde{\alpha}.$$

Последнее, в частности, означает, что рассматриваемый вычислительный процесс будет бесконечным тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha} = 0$. В остальных случаях через конечное число итераций либо будет выявлен факт противоречивости условий задачи (1), либо будет найдено ее решение.

Для рассматриваемого вычислительного процесса при некоторых $M > 0$, $L > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$M\,(\varepsilon)^k \geqslant \left\|\tilde{x}^k - y\right\| \geqslant L\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ....,$$

т. е. имеем линейную скорость сходимости. Этот факт является также следствием полученных ранее [6] результатов исследования сходимости алгоритмов решения невырожденных задач линейной оптимизации.

Конечно, обоснование алгоритмов при сформулированном предположении о невырожденности нельзя считать полным. Это предположение трудно проверить и вполне возможно его нарушение.

Обоснование для одного класса алгоритмов без использования предположения о невырожденности задачи. Условия (20)–(22) допускают широкое многообразие правил задания весовых коэффициентов. В частности, эти правила можно задавать в виде следующей функции от переменных $\tilde{x}_j$: при заданном $p \geqslant 1$

$$d_j^k = \left(\tilde{x}_j^k\right)^p. \tag{27}$$

Из результатов обоснования алгоритмов внутренних точек для решения задач линейного программирования в случае $p = 1$ [7] и для $p \in (1;\, 3]$

[8] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть система* $Ax = b$ *совместна, матрица* A *имеет ранг* m, *в рассматриваемом вычислительном процессе параметр* $\gamma \in (0, 2/(p+1))$, *а весовые коэффициенты вычисляются по правилу* (27) *при* $p \in [1, 3]$. *Тогда*

1) *если система* (1) *несовместна, то ее несовместность будет установлена через конечное число итераций с использованием условия* $\psi\left(u^k\right) > 0$;

2) *если система* (1) *имеет решения, в которых все ограничения-неравенства выполняются строго, то через конечное число итераций будет получено такое решение, причем на последней итерации* $\lambda_k = 1$;

3) *если система* (1) *совместна и любое ее решение имеет активные ограничения-неравенства, то при* $k \to \infty$

$$x^k \to y, \ \ \tilde{u}^k \to \tilde{u}, \ \ \tilde{v}^k \to \tilde{v}, \ \ \tilde{w}^k \to \tilde{w},$$

где y — *одно из решений системы* (1) *с минимальным набором активных ограничений, векторы* $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ *являются решением задачи, двойственной к* (13), *с минимальным набором активных ограничений.*

При этом скорость сходимости будет линейной: для некоторых $M > 0$, $\varepsilon \in (0, \ 1)$

$$\left\|x^k - y\right\| \leqslant M\,(\varepsilon)^k, \ \ \left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\| \leqslant M\,(\varepsilon)^k, \ \ k = 0, \ 1, \ 2, \ldots$$

Для алгоритмов с $p > 1$ *скорость сходимости асимптотически не зависит от параметров задачи. В этом случае при* $k \to \infty$

$$\frac{\alpha^{k+1}}{\alpha^k} \to 1 - \gamma, \ \ \frac{\left\|x^{k+1} - \tilde{x}\right\|}{\left\|x^k - \tilde{x}\right\|} \to 1 - \gamma, \ \ \ \frac{\left\|\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}\right\|}{\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|} \to 1 - \gamma.$$

Другой способ формирования весовых коэффициентов. Весовые коэффициенты необязательно задавать в виде функции от параметра $\tilde{x}_j^k$. Необязательно в явном виде задавать и функции $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$. Достаточно иметь доказательство того, что для данного правила задания весовых коэффициентов существуют такие функции $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$, которые удовлетворяют условиям (21), (22), причем выполнены неравенства (20).

Как показали теоретические и экспериментальные исследования, по сравнению с правилом (27) преимущества в снижении негативных влияний погрешностей решения вспомогательной задачи в конце итеративного процесса имеет следующее правило:

$$d_j^k = x_j^k / \min\{\varepsilon, \ \left|\tilde{g}_j^{k-1}\right|\} \tag{28}$$

при заданном $\varepsilon > 0$, где $\tilde{g}^k = A^{\mathrm{T}}\tilde{u}^k$. При $k = 0$ можно положить $\tilde{g}_j^{k-1} = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Известно [7], что при некотором $M > 0$

$$\left\|\tilde{g}^k\right\| \leqslant M, \quad k = 0,\ 1,\ 2, ...$$

Следовательно, условия (21)–(22) для правила (28) выполняются при $\underline{\sigma}\,(\alpha) = \alpha/M$, $\overline{\sigma}\,(\alpha) = \alpha/\varepsilon$.

3. Двойственные алгоритмы внутренних точек

В изложенных выше алгоритмах происходит монотонное улучшение решения задачи ЛП (13) в области ее допустимых решений. При этом по правилу (24) на каждой итерации вырабатывается допустимое решение двойственной к (13) задачи. Эти решения, хотя и немонотонно, сходятся к точке оптимума уточненной двойственной задачи, причем, как показывают многие расчеты, приближенные двойственные оценки сходятся существенно быстрее, чем итеративно улучшаемые решения прямой задачи.

В связи с этим в [6] были предложены двойственные алгоритмы внутренних точек, в которых происходит монотонное улучшение внутри области допустимых решений двойственной задачи ЛП. При этом при решении вспомогательной задачи на каждой итерации вырабатывается приближение к решению прямой задачи. Можно надеяться, что таким путем удастся быстрее получать решение системы (1).

Важным преимуществом линейной системы с двухсторонними ограничениями-неравенствами является то, что явно можно сформировать внутреннюю точку допустимых решений двойственной задачи (6)–(8), с которой начинается процесс ее решения. Например, можно положить $u^0 = 0$, $v^0 = w^0 = e$, где e — вектор, состоящий из единиц. На итерации $k = 0, 1, 2, \ldots$ определяем такие векторы весовых коэффициентов $d_v^k > 0$, $d_w^k > 0$, чтобы для некоторых функций $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$, удовлетворяющих условиям (21), (22), выполнялись неравенства

$$\underline{\sigma}\left(v_j^k\right) \leqslant \left(d_v^k\right)_j \leqslant \overline{\sigma}\left(v_j^k\right), \quad \underline{\sigma}\left(w_j^k\right) \leqslant \left(d_w^k\right)_j \leqslant \overline{\sigma}\left(w_j^k\right), \quad j = 1, ..., n.$$

Затем находим векторы $\Delta u^k,\ \Delta v^k,\ \Delta w^k$ как результат решения вспомогательной задачи

$$-\varphi\left(\Delta u, \Delta v, \Delta w\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\left(\Delta v_j\right)^2}{(d_v^k)_j} + \frac{\left(\Delta w_j\right)^2}{(d_w^k)_j}\right) \to \min$$

при ограничениях $A^{\mathrm{T}}\Delta u - \Delta v + \Delta w = 0$.

Вектор множителей Лагранжа этих ограничений обозначим через x^k.

Для решения вспомогательной задачи сначала найдем вектор Δu^k как решение системы линейных уравнений

$$A\left(D_v^k + D_w^k\right)^{-1} A^T \Delta u = b - A\left(D_v^k \bar{x} + D_w^k \underline{x}\right),$$

где $D_v^k = \operatorname{diag}\left\{d_v^k\right\}$, $D_w^k = \operatorname{diag}\left\{d_w^k\right\}$ — диагональные матрицы, составленные из компонентов векторов d_v^k и d_w^k. Затем вычисляем векторы

$$x^k = \left(D_v^k + D_w^k\right)^{-1}\left(A^{\mathrm{T}}\Delta u^k + D_v^k \overline{x} + D_w^k \underline{x}\right),$$

$$\Delta v^k = D_v^k\left(x^k - \overline{x}\right), \quad \Delta w^k = D_w^k\left(\underline{x} - x^k\right).$$

Если $\psi\left(\Delta u^k\right) > 0$, то вычисления заканчиваются из-за несовместности системы (1). Решения также заканчиваются, если $\underline{x} \leqslant x^k \leqslant \overline{x}$, так как тогда вектор x^k будет решением системы (1). Отметим, что на всех итерациях имеем $Ax^k = b$.

Иначе находится величина шага

$$\lambda_k = \gamma \max\{\lambda \mid v^k + \lambda\Delta v^k \geqslant 0, \;\; w^k + \lambda\Delta v^k \geqslant 0\}$$

при заданном $\gamma \in (0,1)$ и выполняется итеративный переход

$$u^{k+1} = u^k + \lambda_k \Delta u^k, \;\; v^{k+1} = v^k + \lambda_k \Delta v^k, \;\; w^{k+1} = w^k + \lambda_k \Delta w^k.$$

При $\psi\left(u^{k+1}\right) > 0$ вычисления заканчиваются из-за несовместности системы (1). Подчеркнем, что в рассматриваемых двойственных алгоритмах проверка на несовместность исходной системы (1) по теореме 1 осуществляется на каждой итерации дважды. Используются вектор переменных двойственной задачи u и направление корректировки этого вектора.

Для двойственных алгоритмов справедливы приведенные в разделе 2 теоретические результаты. Аналогом правила (27) с $p = 2$ задания весов в двойственных алгоритмах являются формулы

$$\left(d_v^k\right)_j = \left(v_j^k\right)^2, \quad \left(d_w^k\right)_j = \left(w_j^k\right)^2. \tag{29}$$

Аналогом правила (28) являются правила:

$$\left(d_v^k\right)_j = v_j^k \Big/ \max\left\{\varepsilon,\; x^k - \underline{x}\right\}, \quad \left(d_w^k\right)_j = w_j^k \Big/ \max\left\{\varepsilon,\; \bar{x} - x^k\right\} \tag{30}$$

при заданном $\varepsilon > 0$.

4. Результаты экспериментальных расчетов

В таблице представлены результаты экспериментального исследования, проведенного А. Ю. Филатовым [14] двух прямых и двух двойственных алгоритмов внутренних точек для решения системы линейных неравенств

$$\underline{y} \leqslant Ax \leqslant \overline{y}, \qquad \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \tag{31}$$

при заданных векторах $\underline{y}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Введением дополнительных переменных эта система сводится к виду (1). Отметим, что именно в виде (31) представляется линеаризованная модель расчета режимов ЭЭС [3].

Во всех рассмотренных алгоритмах использовалось значение $\gamma = 2/3$. Через G_1 и G_2 обозначим двойственные алгоритмы с весовыми коэффициентами (29), (30). Им соответствуют прямые алгоритмы с аналогичными весами F_1 и F_2. Здесь представлены результаты исследования на 14 совместных и 14 несовместных системах, полученных в ходе линеаризации моделей поиска допустимых режимов электроэнергетических систем [1]. Линеаризованные модели расчета режимов ЭЭС подготовлены О. Н. Войтовым. Кроме того, были рассмотрены два тестовых примера. Указанные в таблице размеры соответствуют размеру матрицы A в условиях (31).

Для всех рассмотренных алгоритмов объем вычислений на каждой итерации примерно одинаков. Основной вычислительной процедурой по затратам времени является выбор направления улучшения решения, что сводится к решению системы m линейных уравнений с m неизвестными и симметричной неотрицательно определенной матрицей. Поэтому число итераций при решении одной и той же задачи дает сравнительную характеристику времени расчетов разными алгоритмами. Для обеих серий по 14 задач в таблице приведено среднее число итераций, потребовавшееся для решения или выявления несовместности системы, а также (в скобках) указан диапазон вариаций числа итераций по отдельным задачам рассматриваемого класса. В таблице демонстрируется высокая эффективность введенного критерия несовместности. Несовместность обычно выявляется сразу на первых итерациях. Особенно хорошо это видно для двойственных алгоритмов. Двойственные алгоритмы также существенно быстрее позволяют находить решения в случае совместности ограничений.

Наиболее существенным результатом для исходной задачи расчета режимов ЭЭС явилось введение нового критерия несовместности. Этот критерий реализован и эффективно работает в действующем программ-

но вычислительном комплексе СДО-6 расчета режимов ЭЭС [1]. Ранее выявление случаев несовместности линеаризованной подзадачи расчета режимов ЭЭС осуществлялось по иной процедуре, требовавшей существенно большего времени. Реализованный первоначально в СДО-6 для решения линеаризованной подзадачи вариант метода внутренних точек соответствует алгоритму F1 в приводимой таблице. Приведенные в таблице, так и другие (см., например, [2, 3, 6, 14]) экспериментальные расчеты показывают, что двойственные алгоритмы (G1 и, особенно, G2) обычно эффективнее (на 30–50% по времени расчетов), чем прямые алгоритмы внутренних точек (F1 и F2). Вместе с тем возможности использования двойственных алгоритмов внутренних точек для решения линеаризованных подзадач требуют дополнительных исследований, поскольку сокращение времени расчетов для одной линеаризации может сопровождаться увеличением числа глобальных итераций (т. е. числа решаемых линеаризованных подзадач).

Табл. Число итераций, необходимое для получения решения или идентификации несовместности прямыми и двойственными алгоритмами внутренних точек

Задачи/ алгоритм	F1	F2	G1	G2
Совместные (30×80)-(41×80)	9.5(3-13)	13.4(7-17)	10.2(6-13)	5.9(3-8)
Несовместные (30×80)-(41×80)	1.6(1-5)	1.6(1-7)	1(все 1)	1(все 1)
Тестовый пример (19×19)	13	8	11	6
Тестовый пример (201×201)	19	7	16	9

ЛИТЕРАТУРА

1. **Войтов О/ Н.** Алгоритм определения оптимальных установившихся режимов электроэнергетических систем // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики. Сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 2003. С. 70–85.
2. **Войтов О. Н., Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю.** Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. Иркутск, 1997. 30 с. (Препринт/ИСЭМ СО РАН; № 10).
3. **Войтов О/ Н., Зоркальцев В. И., Филатов А. Ю.** Исследование итеративной процедуры определения допустимых режимов ЭЭС // Изв. РАН. Энергетика. 2000. №6. С. 64–73.
4. **Дикин И. И., Зоркальцев В. И.** Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек). Новосибирск: Наука, 1980.

5. **Еремин И. И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург, 1999.
6. **Зоркальцев В. И.** Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. М.: Наука, 1980.
7. **Зоркальцев В. И.** Относительная внутренняя точка оптимальных решений. Сыктывкар, 1984. 48 с. (Препринт/Коми филиала АН СССР; № 3).
8. **Зоркальцев В. И.** Обоснование алгоритмов внутренних точек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, №2. С. 208–221.
9. **Зоркальцев В. И.** Теорема Фаркаша и теория двойственности в линейной оптимизации. Иркутск, 2001. 15 с. (Препринт/ИСЭМ СО РАН; № ?).
10. **Зоркальцев В. И.** Решение систем линейных неравенств алгоритмами внутренних точек // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики. Новосибирск: Наука, 2003. С. 110–141.
11. **Крумм Л. А.** Метод приведенного градиента при управлениями энергетическими системами. Новосибирск: Наука, 1977.
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. **Тришечкин А. М.** Метод расчета допустимых режимов электроэнергетических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 2. С. 18–26.
14. **Филатов А. Ю.** Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложений к системам неравенств: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2001.

Адрес автора:

Институт систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск,
Россия.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

Статья поступила
27 октября 2003 г.

Переработанный вариант —
21 апреля 2004 г.