

УДК 519.17

СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ 4-ОДНОРОДНЫХ 4-КРИТИЧЕСКИХ ГРАФОВ ^{*)}

Л. С. Мельников

В 1985 году Г. Кёстер построил пример 40-вершинного плоского 4-однородного 4-критического графа G^* , опровергнув гипотезу Т. Галлаи и Г. А. Дирака о справедливости верхней оценки $e \leq 2v - 2$ числа ребер e через число вершин v и гипотезу Г. Грёцша о 3-хроматичности. Позднее в 1990–91 годах Г. Кёстер построил бесконечные семейства 3- и 4-связных графов, начиная с G^* и с шагом в 9 и 15 вершин соответственно. В настоящей статье построен пример 31-вершинного плоского 4-однородного 4-критического графа G_3^0 . На его основе построены бесконечные семейства 3- и 4-связных плоских 4-однородных 4-критических графов, начиная с G_3^0 и с шагом в 3 вершины в обоих случаях. Дан обзор результатов по k -критическим графам и плоским 4-критическим графам, показывающих важность рассматриваемых свойств графов. Приведены некоторые следствия (в частности, о максимальном числе треугольников, максимальной степени грани). Усилена нижняя оценка предела средней степени плоских 4-критических 3-связных графов) и сформулированы нерешенные проблемы в этой области.

Введение

В статье рассматриваются обыкновенные графы $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер. Для подмножества вершин $V_1 \subset V(G)$ индуцированный подграф $G[V_1]$ — это граф с множеством вершин V_1 и всеми ребрами графа G , инцидентными вершинам только из V_1 . Неопределяемые понятия можно найти в [6, 8].

Граф называется *r -однородным*, если степень каждой его вершины равна r . Особая роль в статье отведена 4-однородным графам. Граф называется *r -связным*, если любые две его вершины соединены r простыми цепями, попарно не пересекающимися по внутренним вершинам. Граф называется *плоским*, если при его изображении на плоскости никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им вершины.

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00794 и 02-01-00039).

Число вершин в графе G будем обозначать через $|V(G)| = v$, число ребер — через $|E(G)| = e$ и число граней — через $|F(G)| = f$. Так как мы в основном рассматриваем 3- и 4-связные плоские графы, то границы граней являются простыми циклами. Обозначим через $f_k(G)$ число граней графа G , границы которых изоморфны циклу C_k . *Вершинной раскраской* графа G называется отображение множества его вершин в конечное множество цветов — символов или натуральных чисел. Используемыми символами будут ромб R , звезда Z и треугольник T ($\diamond, \star, \blacktriangle$), причем символы будут использованы на рисунках, а буквы — в тексте.

Раскраска вершин графа G называется *правильной*, если любые две смежные вершины графа G окрашены в различные цвета. *Почти правильной раскраской* (или коротко *почти раскраской*) называется такая раскраска, когда имеется единственная пара смежных вершин, окрашенных в один цвет. Минимальное число цветов $\chi(G)$, необходимое для правильной раскраски графа G , называется *хроматическим числом* графа G . Говорят, что граф G является *k -хроматическим*, если его хроматическое число равно k . Связный k -хроматический граф называется *k -критическим*, если после удаления из него любого ребра получается $(k-1)$ -хроматический граф. Известно, что в любом k -критическом графе степень каждой вершины не меньше $k-1$. Вершины степени $k-1$ назовем *младшими*.

Известные 4-критические графы (см. [74]) с малым числом вершин, большая часть из которых плоские, дали повод Т. Галлаи и Г. А. Дираку [35] предположить, что плоские 4-критические графы всегда имеют младшие вершины, т. е. вершины степени 3, а число ребер в таком v -вершинном графе не превосходит $2v-2$. Долгое время никакого прогресса в этом направлении не было. Первый единственный контрпример 40-вершинного плоского 4-критического 4-однородного графа G^* (см. рис. 4) был построен Г. Кёстером в 1985 году. Чуть позднее он построил бесконечные семейства таких графов, начинающиеся с этого графа, с шагом в 9 и 15 вершин в классе 3- и 4-связных графов соответственно.

Основной целью настоящей статьи является построение с помощью графов, называемых «бабочками», бесконечных семейств плоских 4-однородных 4-критических графов, как 3-связных, так и 4-связных с v вершинами, где $v \equiv 1 \pmod{3}$, т. е. в описываемых семействах шаг равен 3. Предложенные семейства начинаются с 31-вершинного контрпримера, что позволяет получить более сильные следствия и обсудить некоторые открытые проблемы в этой области. Далее, кроме необходимых определений и обозначений, в этом разделе приводится обзор основных

результатов по k -критическим графам.

1. Основные понятия и обозначения

Граф G называется *однозначно k -хроматическим*, если разбиение, соответствующее любой k -раскраске, единственно. Граф G называется *критическим однозначно k -хроматическим*, если разбиение, соответствующее любой k -раскраске, единственно и при удалении любого ребра $e \in E(G)$ граф $G' = G \setminus e$ не является однозначно k -хроматическим.

Антипризмой BP_n называется граф с множеством вершин $V(BP_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ и множеством ребер $E(BP_n) = \{(a_i, a_{i+1}), (b_i, b_{i+1}), (a_i, b_i), (a_i, b_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$, где индексы берутся по модулю n . Октаэдр изоморфен BP_3 . Очевидно, антипризма BP_n является плоским 4-однородным графом и при $n \equiv 0 \pmod{3}$ антипризма BP_n является однозначно 3-хроматическим графом, а при других n антипризма BP_n является 4-хроматическим, но не 4-критическим графом.

Пусть a_0, a_1, \dots, a_k — целые положительные числа такие, что $1 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq \lfloor v/2 \rfloor$. Граф $G = C(v; a_0, a_1, \dots, a_k)$ с множеством вершин $V(G) = \{1, 2, \dots, v\}$ назовем *циркулянт*ом, если множество его ребер $E = \{ij \mid |i - j| \equiv a_m \pmod{v}, 1 \leq m \leq k\}$. Циркулянт G является $(2k + 2)$ -однородным графом, если $a_k < v/2$, и $(2k - 1)$ -регулярным при $a_k = v/2$. Очевидно, бипризма есть частный случай циркулянта $C(2n; 1, 2) \cong BP_n$ и это единственный циркулянт степени 4, который является плоским. Все циркулянты являются вершинно-транзитивными графами. Все циркулянты C без треугольников с $k \geq 1$ имеет обхват (длину кратчайшего цикла) $g(C) = 4$.

Ребра циркулянта, порожденные параметром a_i , будем называть a_i -ребрами. Будем говорить, что циркулянт *правильный*, если $a_0 = 1$ и $(v, a_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \dots, k$, где (a, b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b . Множество ребер правильного циркулянта разбивается на $k + 1$ гамильтонов цикл, причем i -й цикл порождается a_i -ребрами, $1 \leq i \leq k$. Такие циклы называются a_i -циклами.

При этом a_0 -цикл $(1, 2, \dots, v, 1)$ называется *главным циклом* циркулянта. Если в правильном циркулянте $C(v; 1, a_1, \dots, a_k)$ a_i -цикл взять в качестве главного, то получится представление исходного циркулянта, как правило, с другими параметрами. Такие представления называются *инверсиями* циркулянта $C(v; 1, a_1, \dots, a_k)$ при различных i , $1 \leq i \leq k$. Например, правильный циркулянт $(157; 1, 8, 14)$ имеет две инверсии $(157; 59, 1, 41)$ и $(157; 56, 23, 1)$. Существуют циркулянты, все инверсии которых совпадают. Например, таковыми являются циркулянты $C(13; 1, 5)$ и $C(289; 1, 38, 110, 134)$.

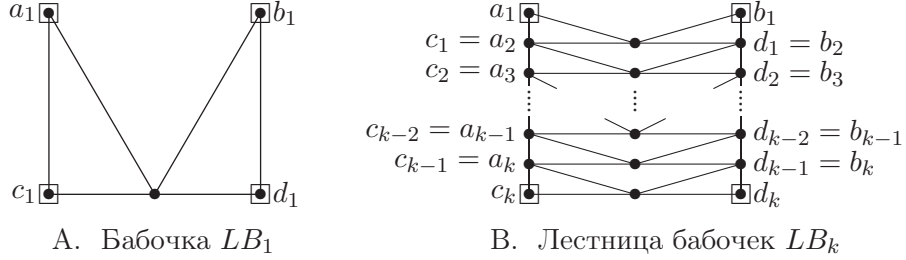
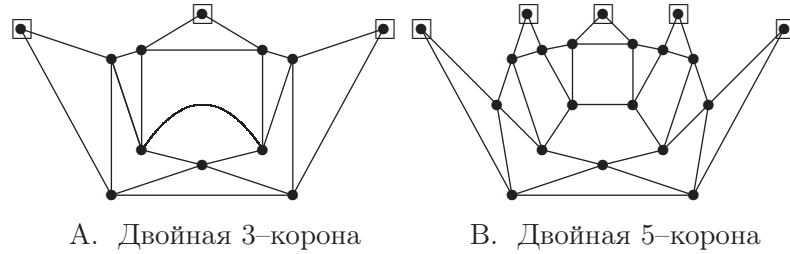


Рис. 1. Лестницы бабочек

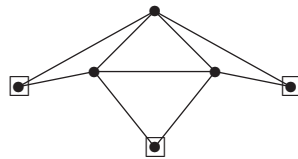
Если отождествить две вершины в двух копиях графа K_3 , то результат назовем *бабочкой* LB_1 (см. рис. 1. А, на котором особые вершины a_1, b_1, c_1, d_1 степени 2 отмечены «кружком в квадрате»); *лестницей бабочек* LB_k длины k называется граф, полученный в результате отождествления вершин c_i и a_{i+1} , d_i и b_{i+1} в k копиях бабочки LB_1 (см. рис. 1. В, на котором особые вершины a_1, b_1, c_k, d_k степени 2 отмечены «кружком в квадрате»).

Двойной k -короной Кёстера DC_k называется граф, полученный в результате отождествления вершин d_i и a_{i+1} , d_k и a_1 в k копиях бабочки LB_1 (индексы берутся по модулю k), а вершины c_1, c_2, \dots, c_k соединяются k новыми ребрами, которые индуцируют C_k ; получившиеся особые вершины b_1, b_2, \dots, b_k степени 2 также отмечены «кружком в квадрате» и лежат на границе одной грани (см. рис. 2, на котором приведены простейшие примеры для $k = 3, 5$).

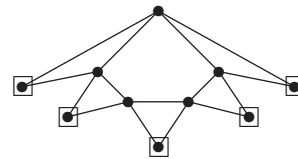
Рис. 2. Двойные k -короны Кёстера DC_k

Простой k -короной SC_k при четном k называется граф, полученный в результате отождествления вершин b_i и a_{i+1} , $b_{k/2}$ и a_1 в $k/2$ копиях бабочки LB_1 (индексы берутся по модулю $k/2$), а во множестве $\{d_1, d_2, \dots, d_{k/2}\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_{k/2}\}$ получившихся особые вершины степени 2 эти

вершины отмечены «кружком в квадрате». В случае нечетного k вершины $b_{\lfloor k/2 \rfloor}$ и a_1 не отождествляются и индуцированный подграф на вершинах $b_{\lfloor k/2 \rfloor}$ и a_1 вместе с дополнительной вершиной v_1 изоморфен треугольнику K_3 . Вершина v_1 как и вершины $d_1, d_2, \dots, d_{k/2}$ $c_1, c_2, \dots, c_{k/2}$ отмечена «кружком в квадрате». Все так отмеченные особые вершины лежат на границе одной грани (см. рис. 3, на котором приведены простейшие примеры для $k = 3, 5$).



А. Простая 3-корона



В. Простая 5-корона

Рис. 3. Простые k -короны SC_k

Определим операции вставки, использующие введенные выше простые k -короны и двойные k -короны Кёстера и позволяющие из плоских 4-однородных графов получать новые плоские 4-однородные графы. В плоском 4-однородном графе выделим специальную k -грань, удалим все ребра границы специальной k -грани, а бывшие вершины специальной k -грани отождествим согласно циклическому порядку с особыми вершинами простой или двойной k -короны.

2. Обзор результатов по k -критическим графам и плоским 4-критическим графам

Прежде всего отметим, что никакой k -критический граф не может быть бесконечным — это следствие теоремы Н. Г. де Брейна и П. Эрдёша [14]. При $k = 1, 2$ единственными k -критическими графами являются полные графы K_1 и K_2 с одной и двумя вершинами, а 3-критическими графами являются только нечетные циклы, что следует из критерия бихроматичности [8]. При $k \geq 4$ структура k -критических графов более разнообразна. Для таких графов не известна хорошая характеристика (см. теорему Е). Так как в классе плоских графов не известны 5-хроматические контрпримеры, то значительный интерес представляет исследование 4-критических плоских графов.

Важность понятия критичности состоит в том, что все проблемы, сформулированные для k -хроматического графа, могут быть сведены к проблемам для k -критических графов. Критические графы впервые были введены и использовались для разных целей Г. А. Дираком [16–20,

22–27]. Исследования таких графов были продолжены Т. Галлаи [33–35] и Б. Тофтом [71–74].

Сформулируем некоторые классические результаты из этой области, используя хронологический принцип.

Теорема А (Брукс [12]). *В k -критическом графе G степень каждой вершины не меньше $k - 1$ ($s_G(v) \geq k - 1$). Более того, если степени всех вершин равны $k - 1$, то либо G изоморфен полному графу K_k , либо $k = 3$ и G является нечетным циклом.*

Используя идеи перекраски двучетных цепей, Л. С. Мельников и В. Г. Визинг в [62] предложили более короткое доказательство этой теоремы. Обобщение результатов из [23] и теоремы А может быть сформулировано следующим образом.

Теорема В (Дирак [22]). *Пусть G — k -критический граф. Если $k \geq 4$ и $G \neq K_k$, то*

$$2|E(G)| \geq (k - 1) \cdot |V(G)| + (k - 3).$$

Оригинальное доказательство Дирака теоремы В довольно сложно. Развивая идеи [62], авторы работ [59, 75, 5] получили более короткие доказательства. Г. Дирак в [27] охарактеризовал все k -критические графы G , для которых достигается равенство в теореме В. При изучении k -критических графов было введено понятие *эксцесса* $\varepsilon_k(G)$, определяемое следующим образом:

$$\varepsilon_k(G) = \sum_{x \in V(G)} (s_G(x) - (k - 1)) = 2|E(G)| - (k - 1)|V(G)|.$$

А. В. Косточка и М. Штибиц в серии работ [53–56] повысили нижнюю оценку для эксцесса $\varepsilon_k(G)$ примерно вдвое при некоторых ограничениях на исследуемый класс k -критических графов. Для $k = 4$ лучшее усиление принадлежит М. Кривелевичу [57, 58]. Он также улучшил нижние оценки числа ребер в k -критических графах с заданной плотностью или обхватом и продемонстрировал интересные применения некоторых из этих оценок.

Наиболее важный результат относительно 3-раскраски плоских графов получен Г. Грётцшом, рассматривавшим его как шаг к решению проблемы четырех красок.

Теорема С (Грётцш [37]). *Каждый плоский граф G без треугольников является 3-хроматическим. Более того, любая правильная 4-раскраска 4-цикла или 5-цикла может быть расширена до 3-раскраски всего графа G .*

Конструктивное описание k -хроматических графов принадлежит Г. Хайошу, пытавшегося найти собственный подход к решению проблемы четырех красок. Граф G назовем k -конструируемым по Хайошу, если G может быть получен из полных графов K_k применением следующих двух операций:

- (а) *Конструкция Хайоша*: Пусть G_1 и G_2 — непересекающиеся графы и пусть $(x_1, y_1) \in E(G_1)$ и $(x_2, y_2) \in E(G_2)$. Удалить ребра (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , отождествить вершины x_1, x_2 и добавить новое ребро (y_1, y_2) .
- (б) Отождествить некоторые попарно несмежные вершины.

Теорема D (Хайош [41]). *Хроматическое число графа G не меньше k тогда и только тогда, когда в G содержится k -конструируемый по Хайошу подграф. Каждый k -критический граф является k -конструируемым по Хайошу.*

Следующее важное обобщение теоремы Брукса принадлежит Г. Галлаи.

Теорема E (Галлаи [33]). *Пусть G — такой k -критический граф, что $k \geq 4$ и $G \neq K_k$. Тогда каждый блок индуцируемого подграфа на младших вершинах степени $k - 1$ изоморфен либо полному графу, либо нечетному циклу. Кроме того,*

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + \frac{k-3}{k^2-3} \cdot |V(G)|.$$

Используя теорию паросочетаний, Т. Галлаи [34] получил структурные результаты о k -критических графах с числом вершин не более $2k-1$. Все эти результаты позитивны в том смысле, что они ограничивают структурную характеристику k -критических графов. В обзоре Х. Закса и М. Штибица [64] собраны все результаты о k -критических графах, имеющих вершины малых степеней. М. Штибиц в своей диссертации [66] дал структурную характеристику k -критических графов, в которых подграфы на не младших вершинах являются либо $(k-1)$ -раскрашиваемыми, либо полными графами. Дальнейшие исследования структуры k -критических графов можно найти в [67].

Теорема F (см. [2, 36, 68, 47]). *Следующие проблемы являются NP-полными:*

1. k -хроматичность гиперграфа;
2. k -хроматичность графа;

3. 3-хроматичность графа;
4. 3-хроматичность плоских графов с максимальной степенью 4.

В частности, полиномиальный алгоритм существует для одной из них тогда и только тогда, когда существуют полиномиальные алгоритмы для всех NP-полных проблем.

Многие результаты относительно критических графов указывают на богатство класса таких графов. В дополнение к критичности эти графы могут обладать следующими дополнительными свойствами: k -критические графы для $k \geq 4$ могут иметь много ребер (Дирак [17], Тофт [71], Рёдл-Штибиц [67]), много независимых вершин (Браун-Мун [13], Шимонович [65]), Ловас [60]), высокую минимальную степень (Шимонович [65], Тофт [72]).

Примеры 4-однородных 4-критических графов с обхватом 5 были построены Б. Грюнбаумом [39] с 25 вершинами и А. В. Косточкой [7] с 21 вершиной. Позднее Г. Бринкманн и М. Мерингер [11] переоткрыли их и с применением компьютеров показали, что построенный Косточкой граф — единственный такой граф с числом вершин до 23.

Большое число нерешенных проблем о k -критических графах можно найти в книге [45] и статье [46].

Рядом исключительных свойств обладает семейство циркулянтов, начинающееся с широко известного (см. [44], [15]) 4-регулярного циркулянта $C(13; 1, 5)$, и некоторые его обобщения. Отметим, что из работы К. Хьюбергера [42] следует, что $C(13; 1, 5)$ — единственный циркулянт, который является 4-регулярным и 4-критическим.

П. Эрдёш в [31] предположил существование r -однородных 4-критических графов при всех $r \geq 3$, отметив, что ему не известны такие графы при $r \geq 6$. Графы, удовлетворяющие этой гипотезе, будем называть *графами Эрдёша*. В 1960 г. Г. Дирак в [24, 25] высказал гипотезу о существовании вершинно r -связных 4-критических графов при всех $r \geq 4$. Такие графы будем называть *графами Дирака*.

Полный граф с четырьмя вершинами является единственным 4-критическим графом в классе всех 3-однородных графов, что легко следует из теоремы Брукса [12].

Известны примеры 4-однородных 4-критических графов, предложенных Т. Галлаи [33, 35], В. А. Евстигнеевым и Л. С. Мельниковым [7] и Д. Янгсом [92]. Т. Йенсен в [43] построил примеры 5-связных 5-однородных 4-критических графов. Среди всех перечисленных примеров нет вершинно-транзитивных графов. Первый пример 6-однородного 6-связного 4-критического вершинно-транзитивного графа построен

А. В. Пяткиным [63]. Позднее в работах [3, 4, 28–30] А. А. Добрынин, Л. С. Мельников и А. В. Пяткин построили вершинно-транзитивные графы Эрдёша и Дирака при $r = 6, 8, 10, 12, 14$ и 16 . В статье [4] приводится список из 114 известных r -однородных 4-критических графов для $r = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ не более чем с 47000 вершинами. Эти результаты можно интерпретировать, как существование 4-критических графов с очень большим эксцессом, а значит мы как бы нащупываем, что можно сказать о верхних оценках эксцесса.

Вопрос о существовании 5-регулярного 4-критического циркулянта остается открытым. О 6-регулярных циркулянтах можно поставить следующую гипотезу (см. [29]):

Гипотеза 2.1. Инверсии двух 6-регулярных циркулянтов

$$\begin{aligned} C(97; 1, 11, 38) &\cong C(97; 44, 1, 23) \cong C(97; 23, 38, 1), \\ C(157; 1, 8, 14) &\cong C(157; 59, 1, 41) \cong C(157; 56, 23, 1) \end{aligned}$$

являются единственными 4-критическими 6-регулярными циркулянтами.

Прежде чем перейти к плоским критическим графам, отметим некоторые результаты о критических топологических (т. е. вложенных в замкнутые ориентированные или неориентированные поверхности) графах. Еще Дирак [21] отметил, что для каждой поверхности S , отличной от сферы, и любого натурального числа $k \geq 8$ существует лишь конечное число k -критических графов, вложенных в S . Т. Галлаи в [34, 35] указал на справедливость этого факта при $k = 7$. Позднее К. Томассен [70] подтвердил этот факт для $k = 6$. Примеры С. Фиска [32] показывают, что существуют бесконечные семейства 5-критических графов, вложенных в поверхность S , отличную от сферы. Для графов, вложенных в тор, 6-критическими графами являются только следующие графы: полный граф K_6 , связка C_3 и C_5 , связка графа K_2 и 4-критического графа, полученного операцией Хайоша из двух копий K_4 и циркулянт $C(11; 1, 2, 3)$ (см. [69]). Для бутылки Клейна проблема описания 6-критических графов открыта. Существование бесконечной серии предписанных (list-coloring) 5-критических графов, вложенных в S , отличную от сферы, также неизвестно.

Следовательно, изучение «богатого» семейства 4-критических плоских графов представляет собой перспективную проблему.

Отметим следующую гипотезу Томассена [70].

Гипотеза 2.2. Пусть S — поверхность, отличная от сферы. Су-

существует ли полиномиальный алгоритм для определения 4-раскрашиваемости графов, вложенных в S ?

Согласно теореме Грёцша в любом плоском 4-критическом графе должен присутствовать треугольник, а согласно формуле Эйлера в случае 4-однородности графа G число треугольников не меньше 8. Минимальное число треугольников в плоских 4-критических графах «нащупал» Грюнбаум [38] — оно равно четырем. Полное доказательство теоремы о продолжении 3-раскраски с выделенной 4- или 5-границы получил В. А. Аксёнов [1].

Сформулируем еще одну гипотезу Р. Стейнберга, опубликованную в [10].

Гипотеза 2.3. Если G — плоский 4-хроматический граф, то верно ли что G содержит 4-цикл или 5-цикл?

Такую же гипотезу можно выдвинуть для плоских 4-критических графов.

Для всех плоских 4-критических 4-однородных графов, рассмотренных в этой работе, гипотеза 2.3 подтверждается.

Г. Кёстер [49, 50] построил пример плоского 4-критического 4-однородного 40-вершинного графа G^* (см. рис. 4) с параметрами $e(G^*) = 80$, $f(G^*) = 42$, $f_3(G^*) = 25$, $f_4(G^*) = 5$, $f_5(G^*) = 7$, $f_6(G^*) = 5$, опровергнув гипотезу Г. А. Дирака и Т. Галлаи о том, что число ребер e в плоском v -вершинном 4-критическом графе удовлетворяет неравенству $e \leq 2v - 2$ (точнее Дирак предполагал существование младших вершин в плоском 4-критическом графе, а Галлаи предположил, что число младших вершин не меньше 4). Этот же граф G^* опровергал гипотезу Грёцша о 3-хроматичности 4-регулярного плоского графа или мультиграфа, полученного суперпозицией семейства классов непересекающихся простых замкнутых кривых без разрешения им касаться друг друга. Действительно, разбиение множества ребер S графа G^* , состоящее из следующих шести классов

- (17, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 17), (2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 2);
- (1, 4, 5, 23, 24, 37, 38, 40, 31, 17, 16, 15, 1);
- (4, 7, 8, 36, 28, 39, 40, 32, 33, 19, 20, 3, 4);
- (7, 10, 11, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 22, 23, 6, 7);
- (10, 13, 14, 16, 18, 33, 34, 36, 37, 25, 26, 9, 10);
- (13, 1, 2, 20, 21, 35, 36, 38, 39, 28, 29, 12, 13),

является таковым.

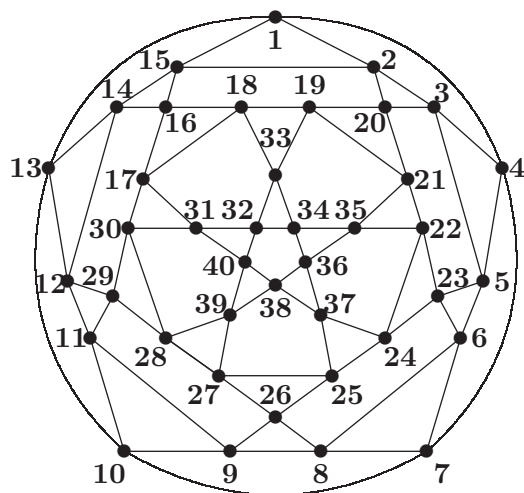


Рис. 4. Плоский 4-критический 40-вершинный граф Кёстера G^*

Заметим, что гипотеза Грёцша о 3-хроматичности 4-регулярного плоского графа при ограничении на мощность семейства S классов принадлежит Заксу (см. проблему 2.11 [45]):

Гипотеза 2.4 (Грёцш-Закс). Если разбиение S множества ребер плоского 4-однородного графа состоит из циклов без касания и число классов таких, что циклы в одном классе не пересекаются, не превосходит 4, то соответствующий граф или мультиграф является 3-хроматическим.

Представляется перспективным изучение тех узлов, графы которых являются 3-хроматическими.

Пример, показывающий точность оценки в гипотезе 2.4, получается отождествлением по циклу особых вершин двойной 4-короны Кёстера и простой 4-короны. Впервые он был построен Кёстером [48]. В аналогичной гипотезе для 4-однородных 4-критических графов предполагается, что число классов не менее шести.

Позднее Кёстером в [51, 52] были построены бесконечные семейства 3-связных плоских 4-однородных 4-критических графов, полученные использованием операции вставки двойной 3-короны Кёстера на любой 3-грани плоского 4-критического графа, например, графа Кёстера G^* . При этом число вершин в новом графе увеличивается на 9 вершин. Более того, с использованием операции вставки двойной 5-короны Кёстера в специальную 5-грань плоского 4-критического графа (например,

внешней 5-грані графа Кёстера G^*) были построены бесконечные семейства 4-связных плоских 4-однородных 4-критических графов. При этом число вершин в новом графе увеличивается на 15, а специальной 5-гранью опять оказывается лишь внешняя грань полученного графа. Сам граф Кёстера G^* суть результат двукратной вставки в 5-грань би-призмы BP_5 двойной 5-короны Кёстера (два 5-разреза $\{16, 20, 23, 26, 29\}$, $\{31, 33, 35, 37, 39\}$ соответствуют особым вершинам двойных 5-корон Кёстера). Результатом k -кратной вставки для $k \geq 3$ двойной 5-короны Кёстера в специальную 5-грань бипризмы BP_5 и является упомянутое выше семейство 4-связных плоских 4-однородных 4-критических графов. Эти результаты можно найти в [51, 52].

Естественно возникает много вопросов в связи с графом Грёцша. Например, каково минимальное число v_* вершин в плоском 4-однородном 4-критическом графе? Или каково наименьшее число v^* вершин такое, что для любого $v \geq v^*$ существует плоский 4-однородный 4-критический v -вершинный граф (возможно нужно учитывать связность)? Каково минимальное или максимальное число треугольников в таких графах? Чему равна максимальная степень грани в плоском 4-однородном 4-критическом v -вершинном графе? Существуют ли критические однозначно 3-хроматические 4-однородные плоские графы? Чему равна максимальная средняя степень в критических однозначно 3-хроматических плоских графах? Группа автоморфизмов графа G^* изоморфна диэдральной группе D_5 . Существуют ли другие плоские 4-однородные 4-критические графы с такой же группой автоморфизмов, или с более «богатой» или «бедной» группами автоморфизмов?

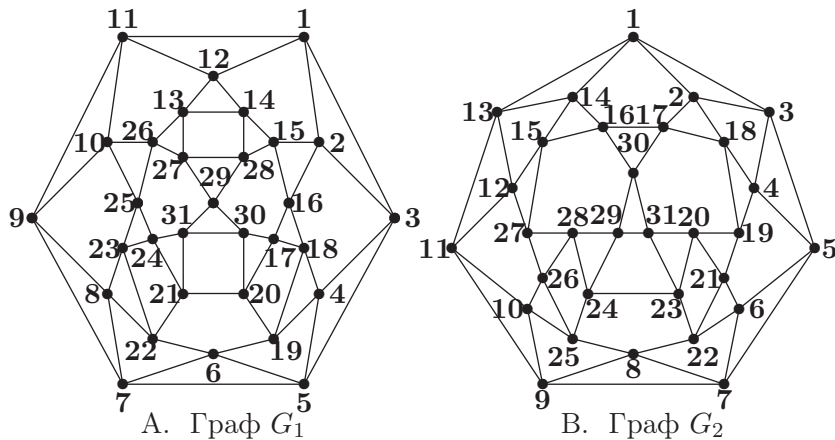


Рис. 5. Плоские 4-критические 4-однородные графы с 31 вершиной

Автором [61] были построены плоские 4-критические 4-однородные 31-вершинные графы G_1 и G_2 (см. рис. 5). Их группы автоморфизмов более бедные, поскольку имеется лишь один нетривиальный автоморфизм — зеркальное отражение относительно вертикальной оси, проходящей соответственно через вершины 12, 29, 5 в G_1 и через вершины 1, 30, 8 в G_2 . Единственные специальные 5-границы для вставки двойной 5-короны Кёстера — это (6, 19, 20, 21, 22, 6) и (8, 22, 23, 24, 25, 8) соответственно (см. рис. 5). Числовые параметры этих графов: $e(G_1) = e(G_2) = 62$, $f(G_1) = f(G_2) = 33$, $f_3(G_1) = f_3(G_2) = 19$, $f_4(G_1) = 6$, $f_4(G_2) = 7$, $f_5(G_1) = 5$, $f_5(G_2) = 4$, $f_6(G_1) = 3$, $f_6(G_2) = 2$, $f_7(G_2) = 1$. Таким образом, максимальная степень грани известных плоских 4-критических 4-однородных графов с 31 вершиной равна семи.

Разложение на классы замкнутых циклов для G_1 и G_2 :

(1, 2, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 10, 11, 1),	(6, 7, 9, 10, 26, 28, 29, 31, 20, 21, 6),
(11, 12, 14, 28, 29, 31, 21, 22, 8, 9, 11),	(30, 17, 2, 3, 5, 6, 22, 23, 31, 30,
(1, 12, 13, 27, 29, 30, 20, 19, 4, 3, 1),	16, 14, 13, 11, 10, 25, 24, 29, 30),
(6, 5, 3, 2, 15, 28, 27, 26, 10, 9, 7, 6,	(1, 3, 4, 19, 20, 23, 24, 28, 27, 12, 13, 1,
19, 18, 16, 15, 14, 13, 26, 25, 23, 22, 6),	2, 18, 19, 21, 22, 8, 9, 11, 12, 15, 16,
	17, 18, 4, 5, 7, 8, 25, 26, 27, 15, 14, 1).

В левой колонке приведены три простых цикла и простейший узел с тремя точками пересечения; этот узел гомеоморфен мультиграфу, полученному из K_3 заменой каждого ребра парой параллельных ребер. В правой колонке указаны один простой цикл, узел «восьмерка» с одной точкой пересечения и довольно сложный узел с восемью точками пересечения — этот узел гомеоморфен графу бипризмы BP_4 . Здесь и далее под термином узел мы понимаем проекцию на плоскость замкнутой жордановой кривой в трехмерном пространстве в общем положении, т. е. в каждой точке плоскости пересекаются не более двух сегментов кривой.

В каждом графе G_1 и G_2 имеется двойная 5-корона (см. разрезы по вершинам {3, 9, 16, 25, 29} для G_1 и {5, 11, 19, 27, 30} для G_2). Вместо «буферной» двойной 5-короны графа G^* в графе G_2 мы использовали две бабочки $G_2[\{3, 4, 5, 18, 19\}]$ и $G_2[\{5, 11, 12, 13, 27\}]$ между двойной 5-коронай и простой 5-коронай $G_2[\{1, 2, 3, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 30\}]$. Граф G_1 демонстрирует, что простая 5-корона необязательная «деталь» конструкции — она заменена простой 4-коронай $G_1[\{12, 13, 14, 15, 26, 27, 28, 29\}]$ плюс треугольник $G_1[\{1, 11, 12\}]$.

3. Минимальный плоский 4-критический 4-однородный граф G_3^0

Необходимо отметить, что граф G_3^0 появился позже построения нашего основного семейства 4-связных графов G_3^k в результате анализа доказательств. Этот граф изображен на рис. 6. Очевидно, что $v(G_3^0) = 31$, $e(G_3^0) = 62$, $f(G_3^0) = 33$, $f_3(G_3^0) = 19$, $f_4(G_3^0) = 5$, $f_5(G_3^0) = 8$ и $f_7(G_3^0) = 1$. Разложение на классы замкнутых циклов для G_3^0 :

(15, 16, 17, 18, 19, 20, 6, 7, 9, 10, 29, 28, 15),
 (25, 17, 2, 3, 5, 6, 21, 22, 24, 25, 16, 14, 13, 11, 10, 30, 31, 26, 25),
 (1, 2, 18, 23, 22, 31, 27, 15, 14, 1, 3, 4, 20, 21, 8, 9, 11,
 12, 28, 27, 26, 24, 23, 19, 4, 5, 7, 8, 30, 29, 12, 13, 1).

В этом разложении имеется один простой цикл, узел «восьмерка» с одной точкой пересечения и довольно сложный узел с шестью точками пересечения; этот узел гомеоморфен мультиграфу, полученному из колеса W_4 заменой каждого ребра из пары противоположных ребер обода парой параллельных ребер.

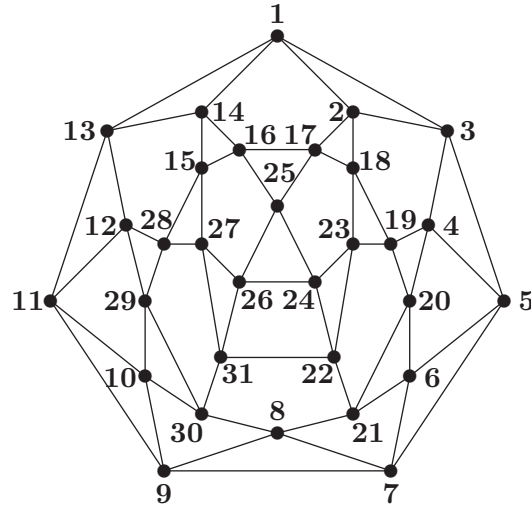


Рис. 6. Плоский 4-критический 4-однородный граф G_3^0 с 31 вершиной

Граф G_3^0 демонстрирует, что и двойная 5-корона не обязательна в конструкции. Легко видеть, что в G_3^0 содержатся подграфы, изоморфные трем простым коронам: $G_3^0[\{1, 2, 3, 4, 5, 17, 18, 19, 20, 23\}]$, $G_3^0[\{1, 2, 3, 13,$

14, 15, 16, 17, 18, 25}] и $G_3^0[\{1, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 27, 28, 29\}]$, попарно пересекающихся по двум бабочкам. Оставшиеся ребра графа G_3^0 образуют подграф $G_3^0[\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31\}]$, «похожий», но не изоморфный двойной 5-короне.

Теорема 3.1. *Граф G_3^0 является плоским 4-критическим 4-однородным 31-вершинным графом с 19 треугольными гранями.*

Доказательство. Все утверждения этой теоремы, кроме 4-критичности, легко следуют из графического представления графа G_3^0 .

Доказательство 4-критичности распадается на 4-хроматичность и критичность относительно удаления любого ребра из графа G_3^0 . Отметим, что при доказательстве мы используем нетривиальный автоморфизм, возникающий из зеркального отображения относительно вертикальной оси, проходящей через вершины 1, 8 и 25. Четыре ребра (7, 9), (16, 17), (22, 31), (24, 26) представляют собой одноэлементные орбиты, каждая из остальных 29 орбит состоит из двух ребер, например, (3, 5), (13, 11) составляют одну орбиту.

Замечание 3.1. Пусть в некоторой 3-раскраске концевые вершины простой цепи $P_4 = (a, b, c, d)$ окрашены одним цветом. Тогда для окраски вершин b и c будут использованы два других цвета. А если имеется вершина v , смежная с вершинами b и c , то цвет вершины v совпадает с цветом концевых вершин.

Во многих случаях при доказательстве не 3-хроматичности графов рассуждение замечания 3.1 будет многократно использоваться.

Лемма 3.1. *Хроматическое число графа G_3^0 равно 4.*

Доказательство. По теореме А $\chi(G_3^0) \leq 4$. Так как в графе G_3^0 есть нечетные циклы, например, C_3 , то $\chi(G_3^0) \geq 3$. Рассмотрим 5-цикл (1, 2, 17, 16, 14, 1) и три возможных случая его 3-раскраски φ :

- (a) $\varphi(1) = T, \varphi(14) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$;
- (b) $\varphi(14) = T, \varphi(1) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$;
- (c) $\varphi(16) = T, \varphi(14) = \varphi(2) = R, \varphi(17) = \varphi(1) = Z$.

Если в каждом случае мы покажем невозможность правильной 3-раскраски графа G_3^0 , лемма будет доказана.

(a) Пусть $\varphi(1) = T, \varphi(14) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$. Тогда $\varphi(15) = \varphi(18) = \varphi(25) = T$. В силу замечания 3.1 и наличия путей (15, 27, 26, 25) и (25, 24, 23, 18) вершины 31 и 22 окрашены в цвет T . Противоречие, поскольку эти вершины смежны.

(b) Пусть $\varphi(14) = T$, $\varphi(1) = \varphi(17) = R$, $\varphi(16) = \varphi(2) = Z$. Тогда $\varphi(3) = \varphi(18) = \varphi(25) = T$. Согласно замечанию 3.1 и наличия путей $(3, 4, 19, 18)$ и $(25, 24, 23, 18)$ вершины 20 и 22 всегда окрашены в один цвет T . По замечанию 3.1 и в силу наличия путей $(3, 5, 6, 20)$ и $(25, 26, 31, 22)$ вершины 7 и 27 окрашены в тот же цвет T . Очевидно, что $\varphi(15) = R$ и $\varphi(28) = Z$. Отметим, что простая цепь $(31, 26, 24, 23, 19, 4, 5, 6, 21, 8, 9)$ в раскраске φ является чередующейся (R, Z) -цепью четной длины 10. Поэтому вершины 31 и 9 окрашены одинаково либо в цвет Z , либо в цвет R . Так как вершины 31 и 9 соединены простой цепью $(31, 30, 10, 9)$ длины 3, то согласно замечанию 3.1 вершина 29, смежная с вершиной 28, должна иметь цвет R , так как $\varphi(28) = Z$. Следовательно, $\varphi(12) = T$. В силу замечания 3.1 и наличия пути $(7, 9, 11, 12)$ вершина 10 должна иметь цвет T . Так как $\varphi(29) = \varphi(9) = R$ и $\varphi(7) = \varphi(10) = T$, то $\varphi(8) = \varphi(30) = Z$. Противоречие, так как вершины 8 и 10 смежны.

(c) Пусть $\varphi(16) = T$, $\varphi(14) = \varphi(2) = R$, $\varphi(17) = \varphi(1) = Z$. Тогда $\varphi(3) = \varphi(18) = \varphi(13) = T$ и $\varphi(25) = R$, $\varphi(15) = Z$. По замечанию 3.1 и ввиду наличия пути $(3, 4, 19, 18)$ вершина 20 должна иметь цвет T . В силу замечания 3.1 и наличия пути $(3, 5, 6, 20)$ вершина 7 должна иметь цвет T . По замечанию 3.1 и в силу наличия пути $(7, 9, 11, 13)$ вершина 10 должна иметь цвет T . Так как вершины 10 и 13 соединены простой цепью $(10, 29, 12, 13)$ длины 3, то по замечанию 3.1 вершина 28 должна иметь цвет T .

Рассмотрим простой 7-цикл $(23, 19, 4, 5, 6, 21, 22, 23)$. Первые шесть вершин этого цикла смежны с вершинами, окрашенными в цвет T . Следовательно, цвет последней вершины 22 должен быть T . Тогда $\varphi(24) = Z$, $\varphi(23) = R$ и $\varphi(21) = Z$. В силу замечания 3.1 и наличия пути $(15, 27, 26, 24)$ вершина 31 должна иметь цвет Z . Очевидно, что $\varphi(30) = R$, но тогда вершина 8 смежна с вершинами 7, 21 и 30, окрашенными в разные цвета: $\varphi(7) = T$, $\varphi(21) = Z$ и $\varphi(30) = R$, противоречие. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Если из графа G_3^0 удалить любое ребро, то хроматическое число полученного графа будет равно 3.

Доказательство. Как было отмечено ранее, ребра графа G_3^0 распадаются на 29 двухэлементных и четыре одноэлементных орбит. На рис. 7 приведены четыре почти 3-раскраски A–D графа G_3^0 с исключительными ребрами $(8, 21)$, $(30, 31)$, $(22, 31)$, $(21, 22)$ соответственно. Приведенным максимальным однозначным двуцветным (с цветами c_i, c_j) ориентированным путем $P_{c_i}^{c_j}(v, w)$ назовем такую последовательность вершин и дуг графа G с почти раскраской ψ

$$P_{c_i}^{c_j}(v, w) = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n),$$

что $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ при $i = 1, \dots, n$; $\psi(v_0) = \psi(v_1) = c_i$; $\psi(v_k) = c_i$ при нечетных k ; $\psi(v_l) = c_j$ при четных l ; для каждой внутренней вершины $v_{i-1} \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ выбор следующей вершины v_i в почти

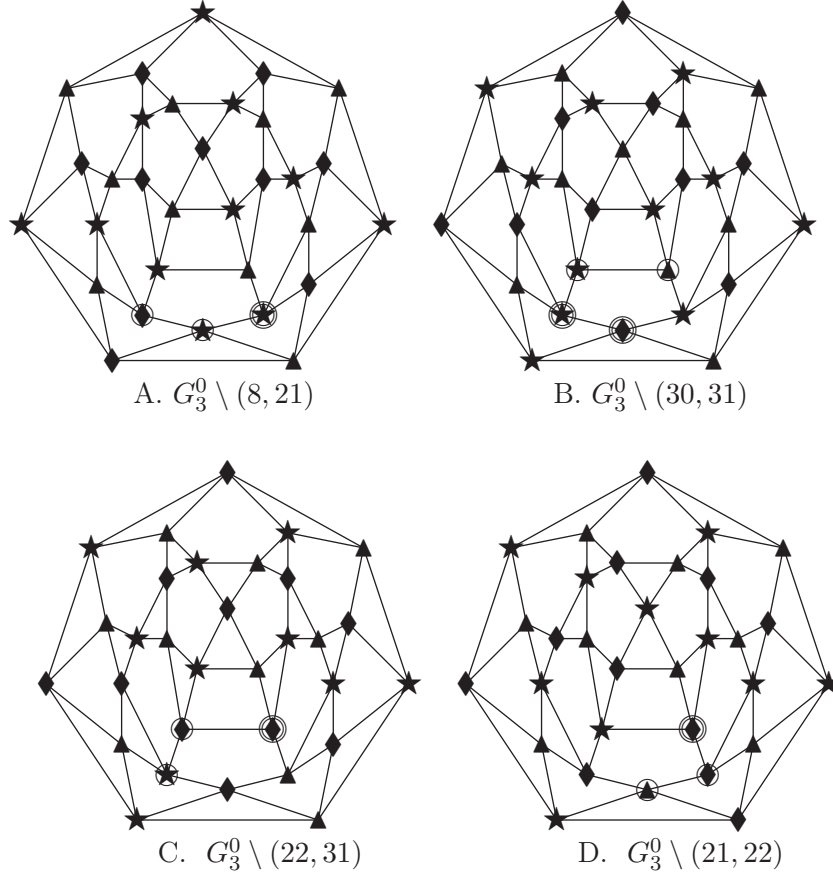


Рис. 7. Почти 3-раскраски (A-D) графа G_3^0 с
исключительным ребром (v, w)

раскраске ψ однозначен. Если начальная и конечная вершины v_0 и v_n совпадают, то $P_{c_i}^{c_j}(v, v)$ назовем *максимальным однозначным двуцветным* (с цветами c_i, c_j) *контуром*. Отметим, что для получения почти раскраски с исключительным ребром $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ достаточно перекрасить вершины $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ цветами c_j и c_i . В результате получается просто *произвольный максимальный однозначный двуцветный путь* $P_{c_i}^{c_j}(v, w)$, где цвета c_i, c_j принадлежат множеству $\{R, Z, T\}$, т. е. множеству $\{\blacklozenge, \star, \blacktriangle\}$.

Для большей емкости почти раскрасок мы выбираем приведенную форму максимального однозначного двухцветного (с цветами c_i, c_j) пути или контура так, что исключительное ребро $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ совпадает с первым ребром пути или контура. Так как для каждого цвета c_i второй цвет c_j выбирается среди двух оставшихся, то в следующем списке приведенных максимальных однозначных двуцветных (с цветами c_i, c_j) путей $P_{c_i}^{c_j}(v, w)$ содержится восемь таких путей (три из которых являются контурами):

1. $(A) P_Z^T(21, 21) = (21, 8, 7, 5, 3, 1, 13, 11, 10, 29, 28, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21)$;
2. $(A) P_Z^R(8, 30) = (8, 21, 6, 5, 4, 19, 23, 24, 25, 17, 2, 1, 14, 15, 27, 31, 30)$;
3. $(B) P_Z^T(31, 22) = (31, 30, 10, 9, 7, 5, 3, 2, 18, 19, 20, 21, 22)$;
4. $(B) P_Z^R(30, 8) = (30, 31, 26, 24, 23, 19, 4, 5, 6, 21, 8)$;
5. $(C) P_R^Z(31, 30) = (31, 22, 23, 18, 2, 1, 13, 11, 9, 8, 30)$;
6. $(C) P_R^T(22, 22) = (22, 31, 27, 15, 14, 1, 3, 4, 19, 18, 17, 25, 24, 22)$;
7. $(D) P_R^Z(22, 22) = (22, 21, 20, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 1, 2, 18, 23, 22)$;
8. $(D) P_R^T(21, 8) = (21, 22, 24, 26, 27, 28, 12, 11, 10, 30, 8)$.

В таблице 1 показано, что для любого ребра $(v, w) \in E(G_3^0)$ можно получить почти 3-раскраску графа G_3^0 с исключительным ребром (v, w) .

Т а б л и ц а 1

Орбиты ребер графа G_3^0 и соответствующие им почти 3-раскраски

$\begin{pmatrix} (1,2) \\ (1,14) \end{pmatrix}$	ACD	$\begin{pmatrix} (1,3) \\ (1,13) \end{pmatrix}$	ACD	$\begin{pmatrix} (2,3) \\ (13,14) \end{pmatrix}$	D	$\begin{pmatrix} (2,17) \\ (14,16) \end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix} (2,18) \\ (14,15) \end{pmatrix}$	ABCD
$\begin{pmatrix} (3,4) \\ (12,13) \end{pmatrix}$	C	$\begin{pmatrix} (3,5) \\ (13,11) \end{pmatrix}$	ABCD	$\begin{pmatrix} (4,5) \\ (12,11) \end{pmatrix}$	ABD	$\begin{pmatrix} (4,19) \\ (12,28) \end{pmatrix}$	ABCD	$\begin{pmatrix} (4,20) \\ (12,29) \end{pmatrix}$	D
$\begin{pmatrix} (6,7) \\ (10,9) \end{pmatrix}$	B	$\begin{pmatrix} (6,20) \\ (10,29) \end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix} (6,21) \\ (10,30) \end{pmatrix}$	ABD	$\begin{pmatrix} (7,8) \\ (9,8) \end{pmatrix}$	AC	$\begin{pmatrix} (7,9) \end{pmatrix}$	BD
$\begin{pmatrix} (8,21) \\ (8,30) \end{pmatrix}$	BCD	$\begin{pmatrix} (16,17) \end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix} (17,18) \\ (16,15) \end{pmatrix}$	AC	$\begin{pmatrix} (17,25) \\ (16,25) \end{pmatrix}$	AC	$\begin{pmatrix} (5,7) \\ (11,9) \end{pmatrix}$	ABCD
$\begin{pmatrix} (18,19) \\ (15,28) \end{pmatrix}$	ABC	$\begin{pmatrix} (18,23) \\ (15,27) \end{pmatrix}$	ACD	$\begin{pmatrix} (19,20) \\ (28,29) \end{pmatrix}$	AB	$\begin{pmatrix} (19,23) \\ (28,27) \end{pmatrix}$	ABD	$\begin{pmatrix} (20,21) \\ (29,30) \end{pmatrix}$	ABD
$\begin{pmatrix} (21,22) \\ (30,31) \end{pmatrix}$	ABD	$\begin{pmatrix} (22,23) \\ (31,27) \end{pmatrix}$	ACD	$\begin{pmatrix} (22,24) \\ (31,26) \end{pmatrix}$	ABD	$\begin{pmatrix} (22,31) \end{pmatrix}$	C	$\begin{pmatrix} (23,24) \\ (27,26) \end{pmatrix}$	ABD
$\begin{pmatrix} (24,25) \\ (26,25) \end{pmatrix}$	AC	$\begin{pmatrix} (24,26) \end{pmatrix}$	BD	$\begin{pmatrix} (5, 6) \\ (10,11) \end{pmatrix}$	ABD				

Следовательно, граф G_3^0 является 4-критическим. Приведем несколько примеров получения почти 3-раскрасок для «исключительных» ребер $(1, 13)$, $(24, 26)$, $(29, 30)$: возьмем соответствующие приведенные максимальные однозначные двуцветные пути 5. $(C) P_R^Z(31, 30)$, 4. $(B) P_Z^R(30,$

8), 3. (B) $P_Z^T(31, 22)$. Для ребра $(1, 13)$ возьмем раскраску $\psi'(22) = \psi'(18) = \psi'(1) = Z$, $\psi'(23) = \psi'(2) = R$ и $\psi'(x) = \psi(x)$ для всех остальных вершин x . Для ребра $(24, 26)$ возьмем раскраску $\psi'(26) = Z$, $\psi'(31) = R$, $\psi'(x) = \psi(x)$ для всех остальных вершин x . Для ребра $(29, 30)$, лежащего в одной орбите с ребром $(20, 21)$, возьмем раскраску $\psi'(30) = \psi'(9) = \psi'(5) = \psi'(2) = \psi'(19) = T$, $\psi'(10) = \psi'(7) = \psi'(3) = \psi'(18) = \psi'(20) = Z$, $\psi'(x) = \psi(x)$ для всех остальных вершин x . Наконец, полученную раскраску отразим нетривиальным автоморфизмом. В результате получаем нужную раскраску. Лемма 3.2 доказана.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует утверждение теоремы 3.1.

Заметим, что единственная специальная 5-грань для вставки двойной 5-короны Кёстера в граф G_3^0 — это $(8, 21, 22, 31, 30, 8)$ (см. рис. 6).

Б. Грюнбаум [40] предложил исследовать плоские 4-критические графы G с максимальной реберной плотностью и показал, что супремум средней степени $S_0 = \sup\{2e(G)/v(G)\}$ и предел $L_0 = \limsup\{2e(G)/v(G)\}$ равны между собой и для 2-связных 4-критических графов могут быть оценены снизу величиной $158/39 = 4,05128\dots$. Г. Кёстер [52] построил такое семейство 3-связных 4-критических плоских графов, для которого $S_0 = L_0 \geq 78/19 = 4,10526\dots$. На основе примера 31-вершинного плоского 4-однородного 4-критического графа G_3^0 (или графов G_1 и G_2) и конструкций Грюнбаума и Кёстера могут быть построены бесконечные семейства 2- и 3-связных 4-критических графов, позволяющих улучшить нижнюю оценку для $S_0 = L_0$.

Следствие 3.1. *Существуют бесконечные семейства плоских 2- и 3-связных 4-критических графов, для которых предел средней степени L_0 соответственно не меньше $61/15 = 4,06666\dots$ и $120/29 = 4,13793\dots$*

4. Семейства 3- и 4-связных плоских 4-критических 4-однородных графов

Очевидно, что в результате вставки простой 3-короны в любую 3-грань плоского 4-критического 4-однородного графа получается 3-связный плоский 4-критический 4-однородный граф, в котором число вершин и число треугольников возрастает на три. Докажем обобщение этого результата, заменяя простую 3-корону на ее обобщение GSC_3^k (см. рис. 8. А). Эта обобщенная простая 3-корона GSC_3^k может быть получена из антипризмы $BP_{3(k+1)}$ в результате удаления ребер K_3 . При $k = 0$ очевиден изоморфизм $GSC_3^0 \cong SC_3$.

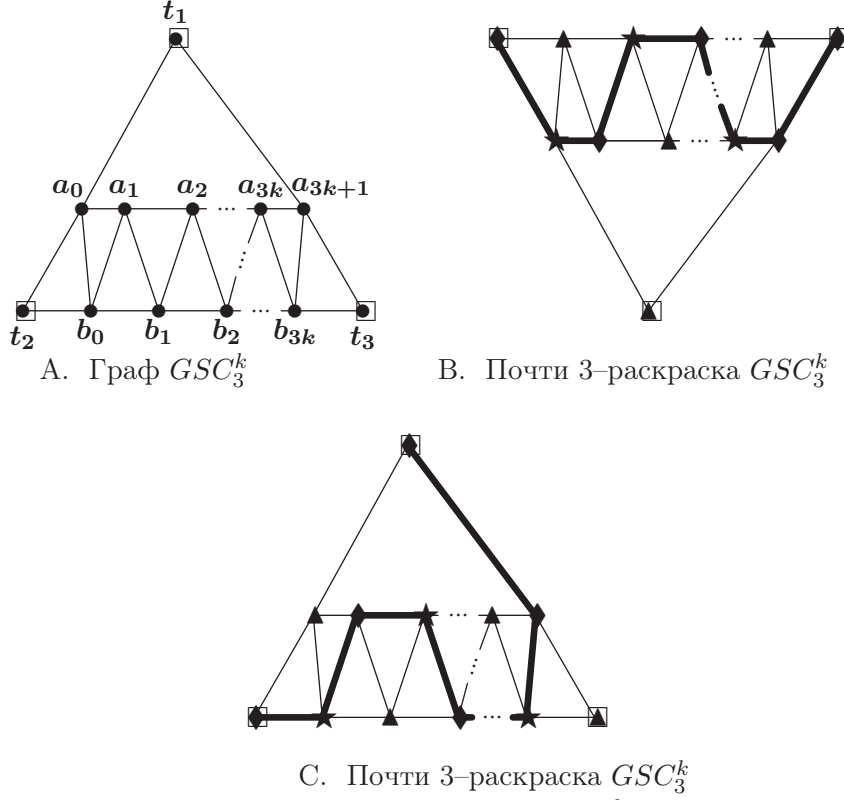


Рис. 8. Обобщенные простые 3-короны GSC_3^k и две их почти 3-раскраски

Теорема 4.1. Пусть G — плоский 4-критический 4-однородный v -вершинный граф. Тогда в результате вставки в любую треугольную грань обобщенной простой 3-короны GSC_3^k получается плоский 4-критический 4-однородный $(v+3(2k+1))$ -вершинный 3-связный граф $G\Delta GSC_3^k$.

Доказательство. Очевидно, что хроматическое число обобщенной простой 3-короны GSC_3^k равно 3. Более того, граф GSC_3^k имеет единственную 3-раскраску ψ . Действительно, $\psi(t_2) = \psi(a_1) = \psi(b_2) = \psi(a_4) = \psi(b_5) = \dots = \psi(a_{3k+1})$ и $\psi(a_0) = \psi(b_1) = \psi(a_3) = \psi(b_4) = \dots = \psi(a_{3k}) = \psi(t_3)$. Так как $(t_2, a_0) \in E(GSC_3^k)$, то $\psi(t_2) \neq \psi(t_3)$ и $\psi(a_0) \neq \psi(a_{3k+1})$. Следовательно, $\psi(t_2) \neq \psi(t_1) \neq \psi(t_3)$.

Вершины t_1, t_2, t_3 в графе $G\Delta GSC_3^k$ образуют разделяющее множество. Поэтому граф $G\Delta GSC_3^k$ является 3-связным. Планарность, 4-однородность графов $G\Delta GSC_3^k$ и равенство $|V(G\Delta GSC_3^k)| = v + 3(2k + 1)$ легко следуют из построения.

Так как граф G является 4-хроматическим и граф GSC_3^k имеет единственную 3-раскраску ψ с доказанным свойством $\psi(t_2) \neq \psi(t_1) \neq \psi(t_3)$, то граф $G\Delta GSC_3^k$ является 4-хроматическим.

Докажем теперь 4-критичность графа $G\Delta GSC_3^k$. Из 4-критичности графа G следует, что каждое ребро e из $E(G\Delta GSC_3^k \setminus GSC_3^k)$ является критическим. Отметим, что на рис. 8.В изображена перевернутая для компактности картинка. Участки максимальных однозначных двухцветных путей $P_R^Z(t_3, t_2)$ и $P_R^Z(t_1, t_2)$ в почти 3-раскрасках обобщенной простой 3-короны GSC_3^k на рис. 8. В–С выделены жирно. С помощью их двухцветной перекраски и с учетом нетривиального автоморфизма в GSC_3^k , соответствующего зеркальному отражению относительно вертикальной оси, проходящей через вершину t_1 , можно установить, что каждое ребро $e \in E(GSC_3^k)$ является критическим в графе $G\Delta GSC_3^k$. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. Графы $G_2\Delta GSC_3^k$ и $G_3^0\Delta GSC_3^k$, в которых треугольник имеет общее ребро с гранью максимальной степени, являются плоскими 4-критическими 4-однородными $(31 + 3(2k + 1))$ -вершинными 3-связными графами с максимальной степенью грани $3k + 8$.

Очевидно, что предел отношения числа вершин к максимальной степени грани графа в классе плоских 4-критических 4-однородных 3-связных графов не больше 2.

Следствие 4.2. Граф $G\Delta GSC_3^k$ с произвольным треугольником является плоским 4-критическим 4-однородным $(v + 3(2k + 1))$ -вершинным 3-связным графом с числом треугольников $f_3(G\Delta GSC_3^k) = f_3(G) + 6k + 2$ при $k \geq 1$ и $f_3(G\Delta SC_3) = f_3(G) + 3$.

Таким образом, в результате многократного применения операции вставки простых 3-корон или обобщенных 3-корон GSC_3^k получаются графы, у которых отношение числа треугольников к числу вершин стремиться к единице, что подтверждает асимптотическую точность оценки Штибица [67], показавшего, что у любого 4-критического графа число треугольников не превосходит числа вершин. Вопрос о существовании плоских 4-критических 4-однородных графов с константным числом треугольников и произвольным числом вершин остается открытым. Если ответ на вопрос положителен, то число треугольников может, по видимому, лежать между 10 и 20.

Для получения 4-связных плоских 4-критических 4-однородных графов G_3^k в графе G_3^0 расщепим вершины 5 и 11 в соответствующие пары вершин (5, 34) и (11, 32) так, чтобы инцидентные им треугольники не

разрывались, а затем вставим лестницу бабочек LB_k так, чтобы верхняя пара особых вершин отождествлялась с парой $(5, 11)$, а нижняя пара особых вершин отождествлялась с парой $(34, 32)$ (см. рис. 9 А и В. Они различаются нумерацией вершин в нижней части рисунков).

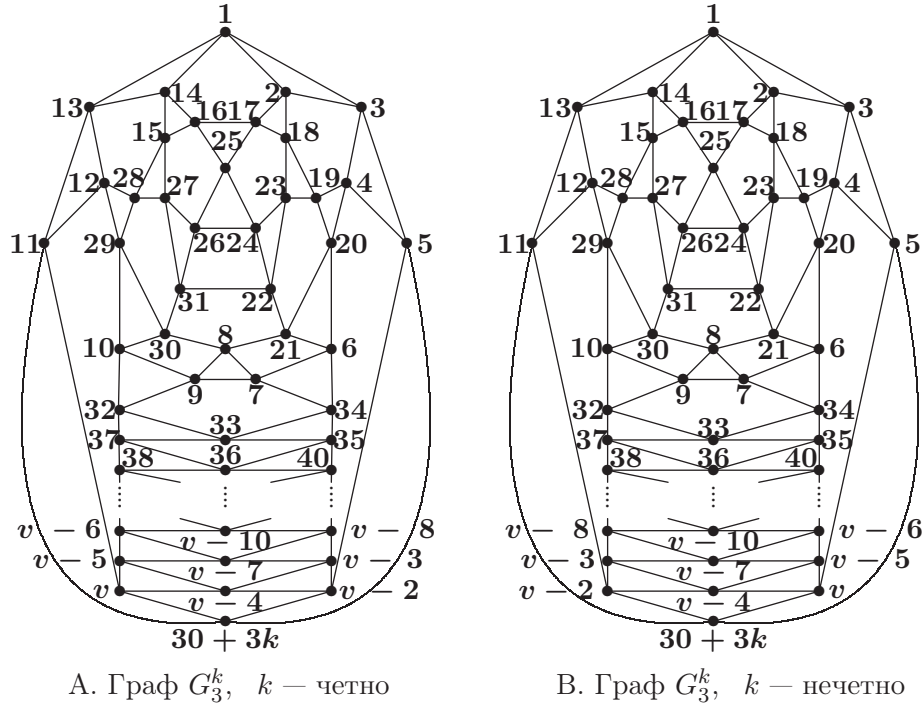


Рис. 9. Плоские 4-критические 4-однородные графы с $3k + 31$ вершиной

Теорема 4.2. Графы G_3^k являются плоскими 4-критическими 4-однородными $(3k + 31)$ -вершинными 4-связными с $2k + 19$ треугольными гранями; при $k \geq 3$ максимальная степень этих граней равна $k + 4$.

Доказательство. Все утверждения этой теоремы кроме 4-критичности легко следуют из графического представления графов G_3^k .

Доказательство 4-критичности естественно распадается на 4-хроматичность и критичность относительно удаления любого ребра из графа G_3^k . Отметим, что для доказательства используется нетривиальный автоморфизм — зеркальное отображение относительно вертикальной оси, проходящей через вершины $1, 8, 25, 33, 36, \dots, v - 10, v - 7, v - 4$ и $v - 1 = 30 + 3k$. Четыре ребра $(7, 9), (16, 17), (22, 31), (24, 26)$ представляют собой одноэлементные орбиты, каждая из остальных орбит состоит из двух ребер; например, $\{(6, 7), (10, 9)\}$ составляют одну орбиту.

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд вспомогательных лемм.

Лемма 4.2. *В любой 3-раскраске ψ лестницы бабочек LB_k справедливы следующие утверждения:*

- (а) Если $\psi(a_1) = \psi(b_1)$, то $\psi(c_k) = \psi(d_k)$; при $k = 1$ продолжение 3-раскраски ψ однозначно.
- (б) Если $\psi(a_1) \neq \psi(b_1)$, то $\psi(c_k) \neq \psi(d_k)$, причем при любом четном k справедливы равенства $\psi(a_1) = \psi(c_k), \psi(b_1) = \psi(d_k)$; а при нечетном k справедливы равенства $\psi(a_1) = \psi(d_k), \psi(b_1) = \psi(c_k)$; при любом k продолжение 3-раскраски ψ однозначно.

Доказательство. Случай (а) легко доказывается индукцией по k . Подслучай $k = 1$ тривиален. Случай (б) при $k = 1$ очевиден. Случай (б) при $k = 2$ следует в результате двухкратного применения предыдущего. Используя эти подслучаи, индукция позволяет доказать случай (б) при произвольном k . Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Хроматическое число графа G_3^k равно 4.*

Доказательство. Также как и для графа G_3^0 доказательство разбивается на три случая при допустимой правильной 3-раскраске φ 5-цикла $(1, 2, 17, 16, 14, 1)$:

- (а) $\varphi(1) = T, \varphi(14) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$;
- (б) $\varphi(14) = T, \varphi(1) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$;
- (с) $\varphi(16) = T, \varphi(14) = \varphi(2) = R, \varphi(17) = \varphi(1) = Z$.

(а) Пусть $\varphi(1) = T, \varphi(14) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$. В этом случае следует провести рассуждения из доказательства леммы 3.1.

(б) Пусть $\varphi(14) = T, \varphi(1) = \varphi(17) = R, \varphi(16) = \varphi(2) = Z$. Тогда $\varphi(3) = \varphi(18) = \varphi(25) = T$. По замечанию 3.1 в силу наличия путей $(3, 4, 19, 18)$ и $(18, 23, 24, 25)$ вершины 20 и 22 окрашены в цвет T . Из замечания 3.1 и наличия пути $(22, 31, 26, 25)$ следует, что вершина 27 окрашена в цвет T . Тогда вершины из простой цепи $(5, 4, 19, 23, 34, 26, 31)$, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной цвета T , окрашены в цвета: $\varphi(5) = \varphi(19) = \varphi(34) = \varphi(31)$. Кроме того, $\varphi(13) = Z, \varphi(15) = R, \varphi(28) = Z$.

Далее доказательство распадается на три подслучая.

(б1) Пусть $\varphi(5) = Z$. Тогда $\varphi(31) = Z$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути $(28, 29, 30, 31)$ вершина 10 всегда окрашена в цвет Z . Так как $\varphi(5) \neq \varphi(11)$, то согласно лемме 3.2 $\varphi(34) = Z$. Согласно замечанию 3.1 в силу наличия пути $(10, 9, 7, 34)$ вершина 8 окрашена в цвет Z . Очевидно,

что $\varphi(6) = R$. Тогда вершина 21, смежная с вершинами 20, 22, 6, 8, не может быть раскрашена одним из трех цветов. Противоречие.

(b2) Пусть $\varphi(5) = R$ и $\varphi(11) = T$. Тогда $\varphi(31) = R$. Очевидно, что $\varphi(12) = R$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути (12, 29, 30, 31) вершина 10 окрашена в цвет R . Так как $\varphi(5) \neq \varphi(11)$, то согласно лемме 3.2 $\varphi(34) = R$. В силу замечания 3.1 и наличия пути (10, 9, 7, 34) вершина 8 окрашена в цвет R . Очевидно, что $\varphi(6) = Z$. Тогда вершина 21 не может быть окрашена одним из трех цветов. Противоречие.

(b3) Пусть $\varphi(5) = R$ и $\varphi(11) = R$. Тогда $\varphi(31) = R$. Очевидно, что $\varphi(12) = T$ и $\varphi(29) = R$. Согласно лемме 3.2 имеем $\varphi(32) = \varphi(34) = x$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути (32, 9, 7, 34) вершина 8 окрашена в цвет x . Если $x \in \{T, R\}$, то без ограничения общности можно полагать, что $\varphi(32) = T$. Тогда $\varphi(10) = Z$ и $\varphi(30) = T$. В силу замечания 3.1 и наличия пути (32, 9, 8, 30) вершина 7 окрашена в цвет T . Поэтому смежные вершины 7 и 34 одинаково окрашены. Противоречие. Если $x = Z$, то $\varphi(10) = T$ и $\varphi(30) = Z$. Следовательно, смежные вершины 8 и 30 окрашены одинаково. Противоречие.

(c) Пусть $\varphi(16) = T$, $\varphi(14) = \varphi(2) = R$, $\varphi(17) = \varphi(1) = Z$. Тогда $\varphi(3) = \varphi(18) = \varphi(13) = T$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути (3, 4, 19, 18) вершина 20 окрашена в цвет T . Более того, $\varphi(15) = Z$ и $\varphi(25) = R$.

Если $\varphi(5) = R$, то вершины простой цепи (5, 4, 19, 23), смежные с вершинами, окрашенными в цвет T , имеют цвета: $\varphi(4) = \varphi(23) = Z$, $\varphi(19) = R$. Следовательно, $\varphi(24) = T$, $\varphi(26) = Z$, $\varphi(27) = R$ и $\varphi(28) = T$. Более того, вершины простой цепи (22, 21, 6), смежные с вершинами, окрашенными в цвет T , имеют цвета: $\varphi(22) = \varphi(6) = R$, $\varphi(21) = Z$. Очевидно, что $\varphi(31) = T$ и согласно замечанию 3.1 в силу наличия пути (31, 30, 29, 28) вершина 10 окрашена в цвет T .

(c1) Пусть $\varphi(5) = \varphi(11) = R$. Тогда вершины простой цепи (11, 12, 29, 30), смежные с вершинами, окрашенными в цвет T , имеют цвета: $\varphi(11) = \varphi(29) = R$, $\varphi(12) = \varphi(30) = Z$. Согласно лемме 3.2 имеем $\varphi(32) = \varphi(34) = x$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути (32, 9, 7, 34) вершина 8 окрашена в цвет x . Очевидно, что $T \neq x \neq R$, так как вершины 32, 34 смежны соответственно с вершинами 10, 6, окрашенными в цвета T и R . В то же время $x \neq Z$, так как вершина 8 смежна с вершиной 21 цвета Z . Противоречие.

(c2) Пусть $\varphi(5) = R$ и $\varphi(11) = Z$. Тогда вершины простой цепи (11, 12, 29, 30), смежные с вершинами, окрашенными в цвет T , имеют цвета: $\varphi(11) = \varphi(29) = Z$, $\varphi(12) = \varphi(30) = R$. Следовательно, $\varphi(8) = T$ и по

замечанию 3.1 в силу наличия пути $(8, 7, 6, 20)$ вершина 34 окрашена в цвет T . Однако $\varphi(34) \neq T$ согласно лемме 3.2. Противоречие.

Если $\varphi(5) = Z$, то вершины простой цепи $(5, 4, 19, 23)$, смежные с вершинами, окрашенными в цвет T , имеют цвета: $\varphi(4) = \varphi(23) = R$, $\varphi(19) = Z$.

Дальнейшее доказательство распадается на два подслучая.

(с3) Пусть $\varphi(5) = Z$, $\varphi(11) = R$.

Если $\varphi(34) = Z$, то вершины 34 и 19 соединены простой цепью длины 3, а вершина 21 окрашена в цвет Z . По замечанию 3.1 в силу наличия путей $(21, 8, 7, 34)$ и $(21, 22, 23, 19)$ вершины 9 и 24 окрашены в цвет Z . Вершины 24 и 15 соединены простой цепью $(24, 26, 27, 15)$ длины 3, и вершина 31 окрашена в цвет Z согласно замечанию 3.1. Аналогично, вершины 12 и 31 соединены простой цепью $(12, 29, 30, 31)$ длины 3, а по замечанию 3.1 вершина 10 окрашена в цвет Z . Противоречие, так как инцидентные ребру $(9, 10)$ вершины окрашены одним цветом.

Если $\varphi(32) = Z$, то по замечанию 3.1 в силу наличия пути $(32, 10, 29, 12)$ вершина 30 окрашена в цвет Z . Вершины 30 и 15 соединены простой цепью $(30, 31, 27, 15)$ длины 3, а по замечанию 3.1 вершина 26 окрашена в цвет Z . Аналогично по замечанию 3.1 в силу наличия пути $(26, 24, 23, 19)$ вершина 22 окрашена в цвет Z . По замечанию 3.1 в силу наличия путей $(22, 21, 20, 19)$ и $(32, 9, 8, 30)$ вершины 6 и 7 окрашены в цвет Z . Противоречие, так как вершины, инцидентные ребру $(6, 7)$, окрашены одним цветом.

(с4) Пусть $\varphi(5) = \varphi(11) = Z$. Согласно лемме 3.2 имеем $\varphi(32) = \varphi(34) = x$. По замечанию 3.1 в силу наличия пути $(32, 9, 7, 34)$ вершина 8 окрашена в цвет x . Вершина 12 окрашена в цвет R . Тогда $\varphi(28) = T$, $\varphi(27) = R$.

Если $x = Z$, то по замечанию 3.1 в силу наличия пути $(8, 21, 6, 34)$ вершина 20 окрашена в цвет Z . Противоречие, так как эта вершина окрашена также в цвет T .

Если $x = T$, то по замечанию 3.1 в силу наличия пути $(8, 30, 10, 32)$ вершина 29 окрашена в цвет T . Противоречие, так как эта вершина окрашена также в цвет Z .

Если $x = R$, тогда $\varphi(30) = T$, $\varphi(21) = Z$. Противоречие, так как вершины 6 и 10 не могут быть окрашены.

Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. Если в графе G_3^k удалить произвольное ребро, то хроматическое число полученного графа будет равно 3.

Доказательство. Ранее было отмечено, что ребра графа G_3^k распада-

ются на $29 + 3k$ двухэлементных и четыре одноэлементных орбит. Оказывается, что почти 3-раскраски для четных и нечетных k существенно различаются. Поэтому мы вынуждены разделять доказывать эту лемму в зависимости от четности k . На рис. 10 и 11 приведены по три почти

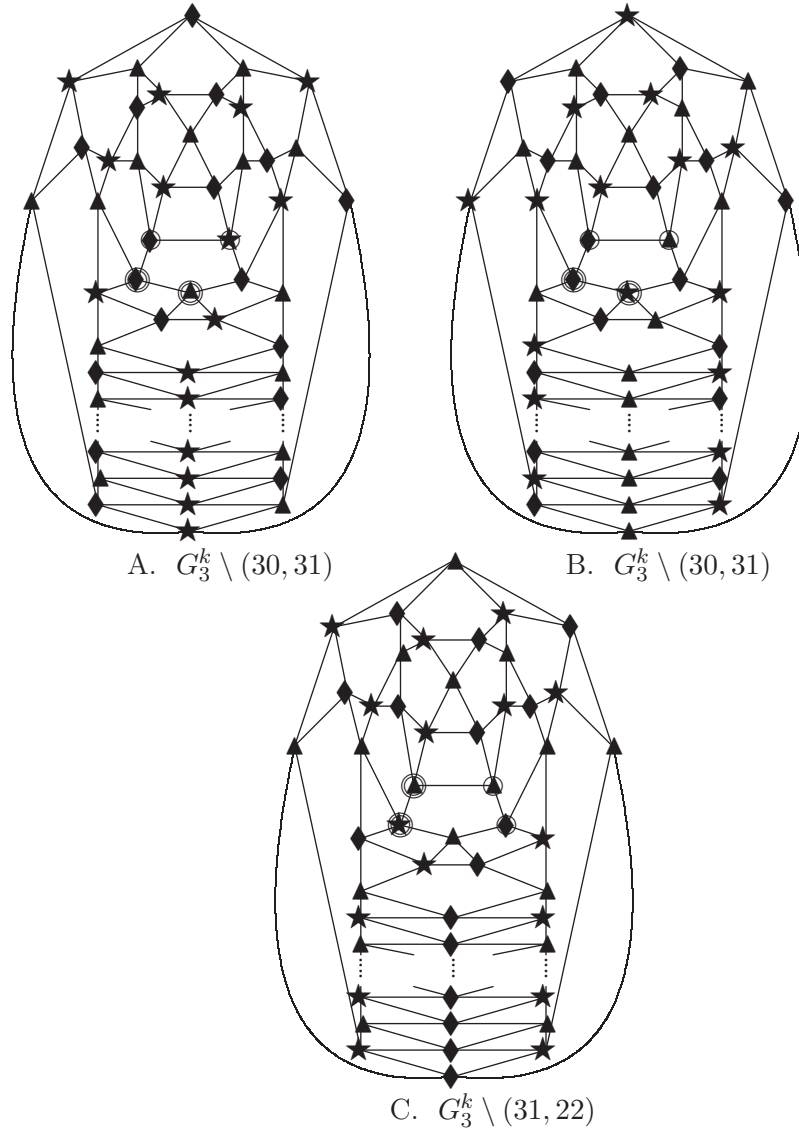


Рис. 10. Почти 3-раскраски (А–С) плоских графов G_3^k ,
случай четного k

3-раскраски А–С графа G_3^k отдельно для четных и нечетных k с исклю-

чительными ребрами $(30, 31), (30, 31), (22, 31)$, и $(8, 21), (21, 22), (22, 31)$ соответственно.

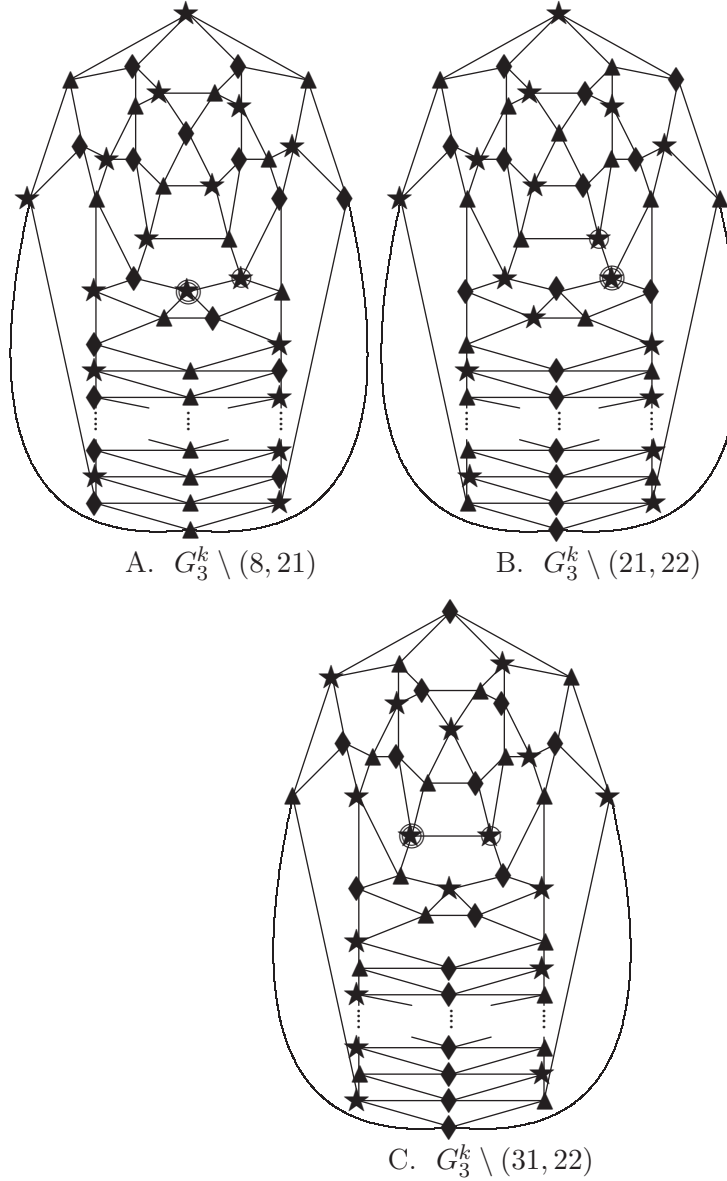


Рис. 11. Почти 3-раскраски (А–С) плоских графов G_3^k ,
случай нечетного k

Случай четных k . В следующем списке (приведенных максимальных однозначных двуцветных (с цветами c_i, c_j) путей $P_{c_i}^{c_j}(v, w)$) содержится

шесть таких путей, ни один из которых не является контуром:

1. (A) $P_R^Z(31, 22) = (31, 30, 10, 9, 7, 34, 33, 37, 36, 40, \dots, v-10, v-6, v-7, v-3, v-4, v, v-1, 5, 3, 1, 13, 12, 28, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22)$;
2. (A) $P_R^T(30, 8) = (30, 31, 27, 15, 14, 1, 2, 17, 25, 24, 23, 19, 4, 5, v-2, v-3, v-8, \dots, 40, 35, 34, 6, 21, 8)$;
3. (B) $P_R^T(31, 22) = (31, 30, 10, 9, 7, 34, 33, 37, 36, 40, \dots, v-10, v-6, v-7, v-3, v-4, v, v-1, 5, 3, 2, 18, 19, 20, 22)$;
4. (B) $P_R^Z(30, 8) = (30, 31, 26, 24, 23, 19, 4, 5, v-2, v-3, v-8, \dots, 40, 35, 34, 6, 21, 8)$;
5. (C) $P_T^R(22, 21) = (22, 31, 27, 15, 14, 1, 3, 5, v-1, 11, 12, 29, 10, 32, 33, 34, 7, 8, 21)$;
6. (C) $P_T^Z(31, 30) = (31, 22, 23, 18, 2, 1, 13, 11, v, v-5, v-6, \dots, 38, 37, 32, 9, 8, 30)$.

Т а б л и ц а 2

Орбиты ребер графа G_3^k (k — четно) и соответствующие им почти 3-раскраски

(1,2) (1,14)	AC	(1,3) (1,13)	AC	(2,3) (13,14)	B	(2,17) (14,16)	A	(2,18) (14,15)	ABC
(3,4) (12,13)	A	(3,5) (13,11)	BC	(4,5) (12,11)	ABC	(4,19) (12,28)	AB	(4,20) (12,29)	C
(6,7) (10,9)	AB	(6,20) (10,29)	C	(6,21) (10,30)	AB	(7,8) (9,8)	C	(7,9)	AB
(7,34) (9,32)	ABC	(8,21) (8,30)	ABC	(16,17)	A	(17,18) (16,15)	A	(17,25) (16,25)	A
(18,19) (15,28)	AB	(18,23) (15,27)	AC	(19,20) (28,29)	AB	(19,23) (28,27)	AB	(20,21) (29,30)	AB
(21,22) (30,31)	AB	(22,23) (31,27)	AC	(22,24) (31,26)	B	(22,31)	C	(23,24) (27,26)	AB
(24,25) (26,25)	A	(24,26)	B	(6,34) (10,32)	ABC	(32,33) (34,33)	ABC	(32,37) (34,35)	ABC
(33,35) (33,37)	AB	(35,36) (37,36)	AB	(35,40) (37,38)	ABC	(36,40) (36,38)	AB	(5,v-2) (11,v)	ABC
(v-6,v-10) (v-8,v-10)	AB	(v-6,v-7) (v-8,v-7)	AB	(v-6,v-5) (v-8,v-3)	ABC	(v-5,v-7) (v-3,v-7)	AB	(v-5,v-4) (v-3,v-4)	AB
(v-5,v) (v-3,v-2)	ABC	(v,v-4) (v-2,v-4)	AB	(v,v-1) (v-2,v-1)	AB	(5,v-1) (11,v-1)	ABC		

Из таблицы 2 следует, что для любого ребра $(v, w) \in E(G_3^k)$ можно получить почти 3-раскраску графа G_3^k (случай четного k) с исключительным ребром (v, w) . Для этого в таблице 2 достаточно выбрать соответствующую почти 3-раскраску A, B или C (например, A). Используя

список приведенных максимальных однозначных двуцветных путей, выбираем тот (первый или второй), в котором содержится ребро (v, w) , и перекрашиваем его внутренние вершины до ближайшей из вершин v или w . В результате получаем почти 3-раскраску графа G_3^k (k чётно) с любым исключительным ребром (v, w) .

Случай нечетных k . В следующем списке (приведенных максимальных однозначных двуцветных (с цветами c_i, c_j) путей $P_{c_i}^{c_j}(v, w)$) содержится шесть таких путей (все эти пути являются контурами):

1. $(A) P_Z^T(21, 21) = (21, 8, 9, 10, 29, 28, 15, 16, 17, 18, 19, 4, 3, 1, 13, 11, v - 1, v, v - 4, v - 5, v - 7, v - 8, \dots, 40, 36, 37, 33, 34, 6, 21);$
2. $(A) P_Z^R(8, 8) = (8, 21, 20, 4, 5, v, v - 5, v - 6, \dots, 40, 35, 34, 7, 8);$
3. $(B) P_Z^T(22, 22) = (22, 21, 20, 4, 5, v, v - 5, v - 6, \dots, 40, 35, 34, 7, 9, 32, 37, 38, \dots, v - 8, v - 3, v - 2, 11, 13, 1, 2, 18, 23, 22);$
4. $(B) P_Z^R(21, 21) = (21, 22, 24, 26, 27, 28, 12, 11, v - 1, v, v - 4, v - 5, v - 7, v - 8, v - 10, \dots, 40, 36, 37, 33, 34, 6, 21);$
5. $(C) P_Z^R(22, 22) = (22, 31, 27, 15, 16, 25, 24, 22);$
6. $(C) P_Z^T(31, 31) = (31, 22, 23, 19, 20, 6, 34, 35, 40, \dots, v - 6, v - 5, v, 5, 3, 2, 17, 25, 26, 31).$

Т а б л и ц а 3

Орбиты ребер графа G_3^k (k — нечетно) и соответствующие им почти 3-раскраски

(1,2) (1,14)	B	(1,3) (1,13)	AB	(2,3) (13,14)	C	(2,17) (14,16)	C	(2,18) (14,15)	B
(3,4) (12,13)	A	(3,5) (13,11)	ABC	(4,5) (12,11)	AB	(4,19) (12,28)	AB	(4,20) (12,29)	AB
(6,7) (10,9)	A	(6,20) (10,29)	C	(6,21) (10,30)	AB	(7,8) (9,8)	A	(7,9)	B
(7,34) (9,32)	AB	(8,21) (8,30)	A	(16,17)	A	(17,18) (16,15)	AC	(17,25) (16,25)	C
(18,19) (15,28)	A	(18,23) (15,27)	BC	(19,20) (28,29)	AC	(19,23) (28,27)	CB	(20,21) (29,30)	AB
(21,22) (30,31)	B	(22,23) (31,27)	BC	(22,24) (31,26)	BC	(22,31)	C	(23,24) (27,26)	B
(24,25) (26,25)	C	(24,26)	B	(6,34) (10,32)	ACB	(32,33) (34,33)	AB	(32,37) (34,35)	ABC
(33,35) (33,37)	AB	(35,36) (37,36)	AB	(35,40) (37,38)	ABC	(36,40) (36,38)	AB	(5,v) (11,v-2)	ABC
(v-6,v-10) (v-8,v-10)	AB	(v-6,v-7) (v-8,v-7)	AB	(v-6,v-5) (v-8,v-3)	ABC	(v-5,v-7) (v-3,v-7)	AB	(v-5,v-4) (v-3,v-4)	AB
(v-5,v) (v-3,v-2)	ABC	(v,v-4) (v-2,v-4)	AB	(v,v-1) (v-2,v-1)	AB	(5,v-1) (11,v-1)	AB		

Из таблицы 3 следует, что для любого ребра $(v, w) \in E(G_3^k)$ можно получить почти 3-раскраску графа G_3^k с исключительным ребром (v, w) . Для этого в таблице 3 достаточно выбрать соответствующую почти

3-раскраску А, В или С (например, С). Используя список приведенных максимальных однозначных двуцветных (ориентированных) путей, выбираем тот (пятый или шестой), в котором содержится ребро (v, w) , и перекрашиваем его внутренние вершины до ближайшей из вершин v или w . В результате получаем почти 3-раскраску графа G_3^k (k нечетно) с любым исключительным ребром (v, w) . Лемма 4.4 доказана.

Из лемм 4.3 и 4.4 следует, что граф G_3^k является 4-критическим. Теорема 4.2 доказана.

Очевидно, что пределы отношения числа вершин к максимальному числу треугольников и отношения числа вершин к максимальной степени грани в классе плоских 4-критических 4-однородных 4-связных графов не превосходят $3/2$ и 3 соответственно. Обозначим через \mathcal{G}_4 семейство плоских 4-критических 4-однородных 4-связных графов. Тогда конструкция, использованная в тереме 4.2, позволяет убедиться в справедливости следующих фактов.

Следствие 4.3. В любом графе G из семейства \mathcal{G}_4 максимальное число треугольников удовлетворяет неравенству

$$\max_{G \in \mathcal{G}_4} f_3(G) \geq 2v/3 - 5/3,$$

а максимальная степень грани удовлетворяет неравенству

$$\max_{G \in \mathcal{G}_4} \Delta^*(G) \geq v/3 - 19/3.$$

5. Заключение и нерешенные проблемы

Обозначим через v_*^i ($i \in \{1, 2, 0\}$) наименьшее число вершин в таком плоском 4-критическом 4-однородном 4-связном графе G (т. е. $G \in \mathcal{G}_4$), что $v(G) \equiv i \pmod{3}$. Из теоремы 4.2 следует, что $v_*^1 \leq 31$. Мы предполагаем, что существуют графы $G \in \mathcal{G}_4$ с числом вершин $v \equiv 0, 2 \pmod{3}$. Более того, предстоит убедиться в справедливости следующей гипотезы.

Гипотеза 5.1. Если граф $G \in \mathcal{G}_4$, то $v_*^1(G) = 25$, $v_*^2(G) = 23$ или 26 , $v_*^0(G) = 18$ или 21 , $v_*(G) = 18$ или 21 , а $v^*(G) = 23, 24$ или $24, 25$.

Необходимо отметить, что попытки построения контрпримеров к гипотезе Галлаи–Дирака в классе графов, допускающих циклические разложения в классы непересекающихся простых замкнутых кривых без

касаний, связанные с гипотезой 2.4, были непродуктивны. Можно предположить, что каждый минимальный по числу вершин контрпример G , удовлетворяющий условию $v(G) \equiv i \pmod{3}$, представляется в циклическом разложении в виде одного сложного узла.

Уже было высказано предположение о существовании константы C_1 такой, что минимальное число треугольников

$$\min_{G \in \mathcal{G}_4} f_3(G) = C_1, \quad (10 \leq C_1 \leq 20).$$

Относительно максимальных значений числа треугольников и степени грани сформулируем следующие две гипотезы.

Гипотеза 5.2. Существуют константы C_2 и C_3 такие, что

$$\max_{G \in \mathcal{G}_4} f_3(G) = C_2 \cdot v(G) - C_3.$$

Гипотеза 5.3. Существуют константы C_4 и C_5 такие, что

$$\max_{G \in \mathcal{G}_4} \Delta^*(G) = C_4 \cdot v(G) - C_5.$$

Более того, следствие 4.3 позволяет предположить, что для указанных констант справедливы следующие соотношения: $C_2 = 2/3$, $C_4 = 1/3$, $C_3 \leq 5/3$ и $C_5 \leq 19/3$.

Относительно «бедной» группы автоморфизмов плоских 4-критических 4-однородных 4-связных графов G следует заметить, что мощность групп автоморфизмов графов G_1 , G_2 и G_3^0 равна двум. Используя 31-вершинные графы G_1 , G_2 , G_3^0 и теорему 4.1, можно построить минимальные 34-вершинные 3-связные графы с тривиальной группой автоморфизмов. Что касается графов G из \mathcal{G}_4 с «богатой» группой автоморфизмов мы предполагаем следующую гипотезу.

Гипотеза 5.4. Каково бы не было натуральное нечетное число k , существуют графы $G \in \mathcal{G}_4$ с «богатой» группой автоморфизмов, содержащей диэдральную группу D_k мощности $2k$.

В заключение автор благодарит А. А. Добрынина и А. В. Косточку за полезные обсуждения результатов работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксёнов В. А. О продолжении 3-раскраски на плоских графах // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 26. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. С. 3–19.

2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. Добрынин А. А., Мельников Л. С., Пяткин А. В. 4-хроматические реберно-критические регулярные графы с высокой связностью // Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конференции. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. С. 25–30.
4. Добрынин А. А., Мельников Л. С., Пяткин А. В. Критические графы Эрдеша и Дирака четной степени // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т 10, № 3. С. 12–22.
5. Дойбер В. А., Косточка А. В., Закс Х. Более короткое доказательство теоремы Дирака о числе ребер в хроматически критических графах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1996. Т 3, № 4. С. 28–34.
6. Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании // Новосибирск: Наука, 1999.
7. Евстигнеев В. А., Мельников Л. С. Задачи и упражнения по теории графов и комбинаторике. Новосибирск: НГУ, 1981.
8. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
9. Abbott H. L., Zhou B. On a conjecture of Gallai concerning complete subgraphs of k -critical graphs // Discrete Math. 1992. V. 100, N 1–3. P. 223–228.
10. Aksionov V. A., Mel'nikov L. S. Essay on the theme: the three-color problem // Combinatorics. Amsterdam: North-Holland, 1978. P. 23–34. (Colloquia Math. Soc. János Bolyai. V. 18.)
11. Brinkmann G., Meringer M. The smallest 4-regular 4-chromatic graphs with girth 5 // Graph Theory Notes N. Y. 1997. V. 32. P. 40–41.
12. Brooks R. L. On coloring the nodes of a network // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.
13. Brown W. G., Moon J. W. Sur les ensembles de sommets indépendants dans les graphes chromatiques minimaux // Canad. J. Math. 1969. V. 21, N 2. P. 274–278.
14. de Bruijn N. G., Erdős P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1951 V. 54. P. 369–373. (Indag. Math. V. 13).

15. **Chao C.-Y.** A critically chromatic graph // Discrete Math. 1997. V. 172, N 1–3. P. 3–7.
16. **Dirac G. A.** Note on the colouring of graphs // Mathematische Zeitschrift 1951. V. 54, N 4. P. 347–353.
17. **Dirac G. A.** A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 85–92.
18. **Dirac G. A.** Some theorems on abstract graphs // Proc. London Math. Soc. (Third Ser.) 1952. V. 2. P. 69–81.
19. **Dirac G. A.** Map colour theorems // Canad. J. Math. 1952. V. 4, N 2. P. 480–490.
20. **Dirac G. A.** The structure of k -chromatic graphs // Fund. Math. 1953. V. 40. P. 42–55.
21. **Dirac G. A.** The coloring of maps // J. London Math. Soc. 1953. V. 28. P. 476–480.
22. **Dirac G. A.** A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger // Proc. London Math. Soc.(3) 1957. V. 7, N 26. P. 161–195.
23. **Dirac G. A.** Short proof of a map colour theorem // theorem // Canad. J. Math. 1957. V. 9, N 2. P. 225–226.
24. **Dirac G. A.** 4-chrome Graphen und vollständige 4-Graphen // Math. Nachr. 1960. V. 22, N 1–2. P. 51–60.
25. **Dirac G. A.** In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen // Math. Nachr. 1960. V. 22, N 1–2. P. 61–85.
26. **Dirac G. A.** On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs // J. reine angewandte Math. 1964. V. 214–215. P. 45–52.
27. **Dirac G. A.** The number of edges in critical graphs // J. reine angewandte Math. 1974. V. 268–269. P. 150–164.
28. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** On 4-chromatic edge-critical regular graphs of high connectivity // Discrete Math. 2003. V. 260, N 1–3. P. 315–319.
29. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** Regular 4-critical graphs of even degree // J. Graph Theory. 2004. V. 46, N 2. P. 103–130.
30. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** Computer search for regular 4-critical graphs // Discrete. Math., submitted.

-
31. **Erdős P.** On some aspects of my work with Gabriel Dirac // Graph theory in memory of G. A. Dirac. Amsterdam: North-Holland, 1989. P. 111–116 (Annals of Discrete Mathematics, V. 41.)
 32. **Fisk S.** The non-existence of colorings // J. Combin. Theory. Ser. B. 1978. V. 24, N 2. P. 247–248.
 33. **Gallai T.** Kritische Graphen I. // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8, N 1–2. P. 165–192.
 34. **Gallai T.** Kritische Graphen II. // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8, N 3–4. P. 373–395.
 35. **Gallai T.** Critical graphs // Theory of graphs and its applications (Proc. Symp. Smolenice, 1963.) Prague: Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., 1964. P. 43–45.
 36. **Garey M. R., Johnson D. S., Srockmeyer L. J.** Some simplified NP-complete graph problems // Theoret. Comput. Sci. 1976. V. 1, N 3. P. 237–267.
 37. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe. 1959. V. 8, N 1. P. 109–119.
 38. **Grünbaum B.** Grötzsch's theorem on 3-colorings // Michigan Math. J. 1963. V. 10, N 3. P. 303–310.
 39. **Grünbaum B.** A problem in graph coloring // Amer. Math. Monthly. 1970. V. 77, N 10. P. 1088–1092.
 40. **Grünbaum B.** The edge-density of 4-critical planar graphs // Combinatorica. 1988. V. 8, N 1. P. 137–139.
 41. **Hajós G.** Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe. 1961. V. 10, N 1–2. P. 116–117.
 42. **Heuberger C.** On planarity and colorability of circulant graphs // Discrete Math. 2003. V. 268, N 1–3. P. 153–169.
 43. **Jensen T. R.** Dense critical and vertex-critical graphs // Discrete Math. 2002. V. 258, N 1–3. P. 63–84.
 44. **Jensen T. R., Royle G. F.** Small graphs of chromatic number 5: a computer search // J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 1. P. 107–116.
 45. **Jensen T., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.

-
46. **Jensen T., Toft B.** 25 Pretty graph coloring problems. // Discrete Math. 2001. V. 229, N 1–3. P. 167–169.
47. **Karp R.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computation. New York–London: Plenum Press, 1972. P. 85–103. (Рус. пер.: **Карп Р. М.** Сводимость комбинаторных проблем // Кибернетический сборник (новая серия). Вып. 12. М.: Мир, 1975. С. 16–38.)
48. **Koester G.** Bemerkung zu einem Problem von H. Grötzsch // Wiss. Z. Univ. Halle. 1984. V. 33. P. 129.
49. **Koester G.** Coloring problems on a class of 4-regular planar graphs // Graphs, hypergraphs and applications. Leipzig: Teubner, 1985. P. 102–105. (Teubner–Texte Math.; V. 73.)
50. **Koester G.** Note to a problem of T. Gallai and G. A. Dirac // Combinatorica. 1985. V. 5, N 3. P. 227–228.
51. **Koester G.** 4-critical 4-valent planar graphs constructed with crowns // Math. Scand. 1990. V. 67. P. 15–22.
52. **Koester G.** On 4-critical planar graphs with high edge density // Discrete Math. 1991. V. 98, N 2. P. 147–151.
53. **Kostochka A. V., Stiebitz M.** Colour-critical graphs with few edges // Discrete Math. 1998. V. 191, N 1–3. P. 125–137.
54. **Kostochka A. V., Stiebitz M.** Excess in colour-critical graphs // Graph theory and combinatorial biology. (Balatonlelle, 1996.) Budapest: Janos Bolyai Math. Soc., 1999. P. 87–99. (Bolyai Soc. Math. Stud.; V. 7.)
55. **Kostochka A. V., Stiebitz M.** On the number of edges in colour-critical graphs and hypergraphs // Combinatorica. 2000. V. 20, N 4. P. 521–530.
56. **Kostochka A. V., Stiebitz M.** A new lower bound on the number of edges in colour-critical graphs and hypergraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 2003. V. 87, N 2. P. 374–402.
57. **Krivelevich M.** On the minimal number of edges in color-critical graphs // Combinatorica. 1997. V. 17, N 3. P. 401–426.
58. **Krivelevich M.** An improved bound on the minimal number of edges in color-critical graphs // Electron J. Combin. 1998. V. 5, N 1. P. 4.
59. **Kronk H. V., Mitchem J.** On Dirac’s generalization of Brooks’ theorem // Canad. J. Math. 1972. V. 24, N 5. P. 805–807.

- 60. **Lovász L.** Independent set in critical chromatic graphs // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1973. V. 8, N 1–2. P. 165–168.
- 61. **Melnikov L. S.** On problems of Gallai–Dirac and Grunbaum // *Discrete Math.* submitted.
- 62. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** New proof of Brook’s theorem // *J. Combin. Theory.* 1969. V. 7, N 4. P. 289–290.
- 63. **Pyatkin A. V.** 6-regular 4-critical graph // *J. Graph Theory.* 2002. V. 41, N 4. P. 286–291.
- 64. **Sachs H., Stiebitz M.** Colour-critical graphs with vertices of low valency // *Amsterdam: North-Holland*, 1989. P. 371–396. (*Annals of Discrete Math.*; V. 41.)
- 65. **Simonovits M.** On colour-critical graphs // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1972. V. 7, N 1–2. P. 67–81.
- 66. **Stiebitz M.** Beiträge zur Theorie der färbungskritischen Graphen. // *Dissertation zu Erlangung des akademischen Grades Dr. sc. nat. Technische Hochschule Ilmenau.* 1985.
- 67. **Stiebitz M.** Subgraphs of colour-critical graphs // *Combinatorica.* 1987. V. 7, N 3. P. 303–312.
- 68. **Stockmeyer L. J.** Planar 3-colorability is NP-complete // *SIGACT News.* 1973. V. 51, N 3. P. 19–25.
- 69. **Thomassen C.** Five-coloring graphs on the torus // *J. Combin. Theory. Ser. B.* 1994. V. 62, N 1. P. 11–33.
- 70. **Thomassen C.** Color-critical graphs on a fixed surface // *J. Combin. Theory. Ser. A.* 1997. V. 70, N 1. P. 67–100.
- 71. **Toft B.** On the maximal number of edges of critical k -chromatic graphs // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1970. V. 5, N 3–4. P. 461–470.
- 72. **Toft B.** Two theorems on critical 4-chromatic graphs // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1972. V. 7, N 1–2. P. 83–89.
- 73. **Toft B.** Color-critical graphs and hypergraphs // *J. Combin. Theory.* 1974. V. 16, N 2. P. 145–161.
- 74. **Toft B.** On critical sugraphs of color-critical graphs // *Discrete Math.* 1974. V. 7, N 3. P. 377–392.
- 75. **Weinstein J.** Excess in critical graphs // *J. Combin. Theory. Ser. B.* 1975. V. 18, N 1. P. 24–31.

- 76. Youngs D. A.** Gallai's problem on Dirac's construction // Discrete Math. 1992. V. 101, N 1–3. P. 343–350.

Адрес автора:

Статья поступила
24 октября 2003 г.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: omeln@math.nsc.ru