ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2004. Серия 2. Том 11, № 2, 3–24

УДК 519.1 + 519.8

ПОСТРОЕНИЕ РЕЛАКСАЦИИ ПОЛИТОПА СИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О КОММИВОЯЖЕРЕ НА ОСНОВЕ СИЛЬНО РАЗРЕШИМОГО СЛУЧАЯ КАЛЬМАНСОНА*)

В. М. Демиденко

На основе условий Кальмансона, гарантирующих достижение минимума функционала симметрической задачи о коммивояжере на цикле заданного вида, построена релаксация ее политопа в аффинном матричном пространстве минимальной размерности, содержащем этот политоп.

Одно из наиболее интересных и важных с теоретической и практической точек зрения направлений в исследовании NP-трудной задачи о коммивояжере связано с изучением ее политопа. Это направление, относящееся к полиэдральной комбинаторике, широко представлено в монографиях [21, 25] и включает исследование отношения смежности, определенного на множестве минимальных граней (вершин) этого политопа, описание его граней максимальной размерности (фасет), построение различных его релаксаций на основе комбинаторных свойств допустимых решений (гамильтоновых циклов) и их различные алгоритмические применения. Конечной целью исследований рассматриваемого политопа в указанных направлениях является его полиэдральное описание в виде системы линейных уравнений и неравенств, т. е. линеаризация задачи коммивояжера. Получение такого описания позволило бы в полном объеме использовать достаточно хорошо развитый аппарат линейного программирования для разработки эффективных методов решения данной задачи. Однако трудности принципиального характера, возникающие на пути линеаризации задачи о коммивояжере, например, NP-полнота распознавания смежности вершин ее политопа [26] и проверки свойств, определяющих отдельные классы его фасет [19], а также сравнительно малое

*) Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований „Алгоритм“, при частичной поддержке INTAS (проект 00-217).

число комбинаторных свойств гамильтоновых циклов приводят к необходимости расширения базовой основы для построения новых релаксаций задачи и выделения новых классов фасет ее политопа. До настоящего времени, в основном, использовались лишь отдельные свойства гамильтоновых циклов, которые позволили установить, что политопы задач о минимальном 1-дереве [22, 23] и совершенном 2-сочетании [17], задачи о назначениях [18], а также политопы, порождаемые ограничениями устранения подциклов [12] и неравенствами, соответствующими деревьям клик [20], являются приемлемыми с вычислительной точки зрения релаксациями политопа рассматриваемой задачи.

В работах [1, 4, 15] отмечалось, что для построения релаксаций задачи о коммивояжере можно использовать ее специальные случаи, для которых гарантировано достижение оптимума на заранее заданном цикле, так называемые сильно разрешимые случаи [9, 11]. Эти случаи, как правило, определяются избыточными однородными системами линейных неравенств, которые в матричном пространстве задают конусы специального вида, связанные с вершинами политопа задачи о коммивояжере. Описание в явном виде множеств образующих таких конусов позволяет строить различные релаксации исходной задачи. В данной статье на основе сильно разрешимого случая симметрической задачи о коммивояжере, определяемого матрицами Кальмансона [2, 13, 24], построена релаксация ее политопа в минимальном аффинном пространстве, содержащем этот политоп. При построении релаксационного политопа использовалось множество образующих конуса матриц Кальмансона, описание которого в явном виде приведено в [4]. Отметим, что аддитивная характеризация матриц Кальмансона приведена в [16], а обобщение условий Кальмансона на случай несимметрической задачи о коммивояжере приведено в [1, 10].

1. Предварительные сведения, основные понятия и обозначения

Пусть $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{R}^{n\times n}$ — пространство вещественных квадратных матриц порядка n, S_n — симметрическая группа подстановок, действующая на множестве $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, T_n — множество всех циклов длины n из S_n. Произвольная подстановка σ из S_n трактуется как взаимно однозначное (биективное) отображение множества $\mathbb{N}_n$ в себя, переводящее i из $\mathbb{N}_n$ в $\sigma(i)$. Для обозначения произвольного цикла из T_n в дальнейшем используется запись $\tau = (i_1, i_2, \ldots, i_\ell, i_{\ell+1}, \ldots, i_n)$, в которой $i_{\ell+1} = \tau(i_\ell)$, $\tau(i_n) = i_1$. С помощью введенных обозначений известная задача о коммивояжере (ЗК) в терминах подстановок формулируется как задача нахождения в T_n такого цикла τ_0, что $f_A(\tau_0) \leqslant f_A(\tau)$ для произвольного τ из T_n, где $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $f_A(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)}$. В случае, когда матрица A принадлежит $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ — подпространству симметрических матриц пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ — имеем симметрическую задачу о коммивояжере (СЗК).

В 1975 г. К. Кальмансоном [24] были получены условия сильной разрешимости СЗК, гарантирующие достижение минимума функционала $f_A(\tau)$ на цикле $\tau_0 = (1, 2, \ldots, n)$. Эти условия, накладываемые на элементы матрицы $X = [x_{ij}]$ из $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$, записываются в виде однородной системы линейных неравенств

$$x_{ij}+x_{kl}-x_{ik}-x_{j\ell} \leqslant 0, \quad x_{i\ell}+x_{jk}-x_{ik}-x_{j\ell} \leqslant 0, \quad i<j<k<l \in \mathbb{N}_n, \quad (1)$$

которая в $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ задает конус $\boldsymbol{K}$ специального вида . В дальнейшем этот конус называется *конусом Кальмансона.* Согласно [7, с. 155], любой конус, в частности и конус $\boldsymbol{K}$, представим в виде прямой суммы $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{K}^{\perp}$, в которой через $\boldsymbol{L}$ обозначено пространство линейности конуса $\boldsymbol{K}$ (максимальное подпространство пространства $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$, содержащееся в $\boldsymbol{K}$), а через $\boldsymbol{K}^{\perp}$ — ортогональная проекция конуса $\boldsymbol{K}$ на пространство $\boldsymbol{L}^{\perp}$ — ортогональное дополнение $\boldsymbol{L}$ в $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$. Таким образом, по определению имеет место равенство $\boldsymbol{K}^{\perp} = \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}^{\perp}$.

Введем в рассмотрение бинарные матрицы E_{ij}, где $i,\, j \in \mathbb{N}_n$, каждая из которых имеет единственный ненулевой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Далее, для p и q, $1 \leqslant p < q \leqslant n$, положим $F_{pq} = E_{pq} + E_{qp}$ и определим множество $\boldsymbol{B}$, состоящее из матриц вида

$$B'_{ijk\ell} = F_{ij} + F_{k\ell} - F_{ik} - F_{j\ell}, \quad B''_{ijk\ell} = F_{i\ell} + F_{jk} - F_{ik} - F_{j\ell},$$
$$i<j<k<\ell \in \mathbb{N}_n. \quad (2)$$

Очевидно, что множество матриц $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ порождает однородную систему линейных неравенств вида $\operatorname{slu}\boldsymbol{B} = \big\{(B,\, X) \leqslant 0 \,|\, B \in \boldsymbol{B}\big\}$, где $(B,\, X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij}$ — скалярное произведение матриц $B = [b_{ij}]$ и $X = [x_{ij}]$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в случае симметричности матрицы $X = [x_{ij}]$ система (1) эквивалентна введенной системе неравенств $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}$. Далее выделим в $\boldsymbol{B}$ подмножество $\boldsymbol{B}_1$, состоящее из матриц $B'_{1i+1i+2n}$ и $B''_{ii+1jj+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant j-2 \leqslant n-3$, которые в дальнейшем для упрощения изложения обозначаются соответственно через B_{i+1} и B_{ij}. Подмножество матриц $\boldsymbol{B}_1$, очевидно, порождает подсистему системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}$ вида $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}_1 = \big\{(B,\, X) \leqslant 0 \,|\, B \in \boldsymbol{B}_1\big\}$. Эквивалентность системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}$ своей подсистеме $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}_1$, установленная в [2, 13], позволила полностью описать пространства $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^{\perp}$ [2, 16] и указать в явном виде минимальные грани конусов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}^{\perp}$ [4]. Сформулируем в виде отдельных утверждений результаты из указанных выше работ, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Справедливы следующие предложения*:

(a) конус Кальмансона $\boldsymbol{K}$ совпадает с множеством решений системы неравенств $\operatorname{slu}\boldsymbol{B}_1$;

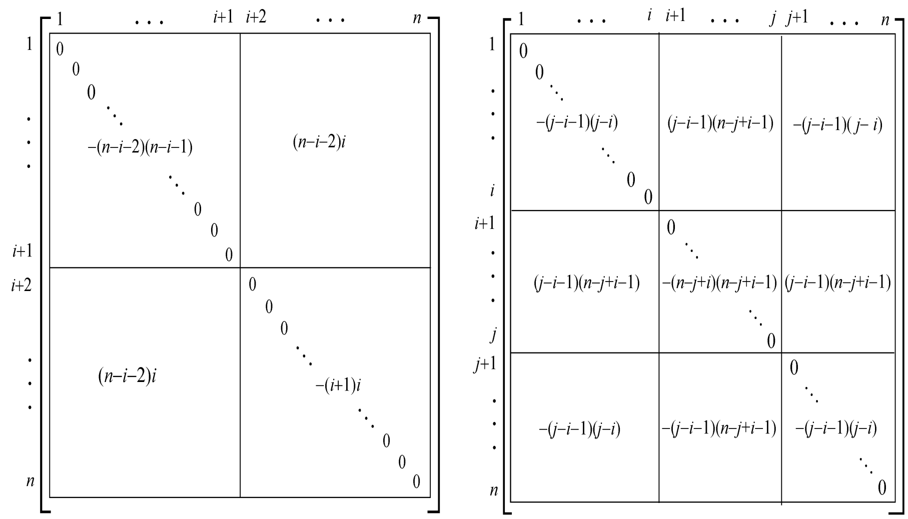
(b) множество матриц $\boldsymbol{E} = \Big\{E_{ii},\, E_i = \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} (\,E_{ij} + E_{ji}) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{s}} \;|\; i \in \mathbb{N}_n\Big\}$ образует базис пространства линейности $\boldsymbol{L}$ конуса Кальмансона $\boldsymbol{K}$.

Рассмотрим симметричные матрицы $U_{i+1} = \big[u^{(i+1)}_{pq}\big]$, $U_{ij} = \big[u^{(ij)}_{pq}\big]$, $1 \leqslant i \leqslant j-2 \leqslant n-3$, в которых верхние треугольники определяются соотношениями:

$$u^{(i+1)}_{pq} = \begin{cases} \;\;0, \quad \text{если } 1 \leqslant p = q \leqslant n, \\ -(n-i-2)(n-i-1), \quad \text{если } 1 \leqslant p < q \leqslant i+1, \\ \;\;(n-i-2)i, \quad \text{если } 1 \leqslant p \leqslant i+1, \quad i+2 \leqslant q \leqslant n, \\ -(i+1)i, \quad \text{если } i+2 \leqslant p < q \leqslant n, \end{cases} \tag{3}$$

$$u^{(ij)}_{pq} = \begin{cases} \;\;0, \quad \text{если } 1 \leqslant p = q \leqslant n, \\ -(j-i-1)(j-i), \quad \text{если } 1 \leqslant p < q \leqslant i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{либо } j+1 \leqslant p < q \leqslant n, \\ -(j-i-1)(j-i), \quad \text{если } 1 \leqslant p \leqslant i,\; j+1 \leqslant q \leqslant n, \\ \;\;(j-i-1)(n-j+i-1), \quad \text{если } 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i+1 \leqslant q \leqslant j, \\ \;\;(j-i-1)(n-j+i-1), \quad \text{если } i+1 \leqslant p \leqslant j, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j+1 \leqslant q \leqslant n, \\ -(n-j+i)(n-j+i-1), \quad \text{если } i+1 \leqslant p < q \leqslant j. \end{cases} \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что матрицы U_{i+1}, U_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant j-2 \leqslant n-3$, принадлежат пространству $\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{s}}$, имеют клеточную структуру и соответственно состоят из четырех и девяти клеток. Схематичное изображение матриц U_{i+1} и U_{ij} приведено на рис., на котором показано, что матрица U_{i+1} разбивается на клетки $(i+1)$-й строкой и $(i+1)$-м столбцом, а матрица U_{ij} — i-й строкой и j-м столбцом; при этом все элементы каждой клетки введенных матриц, исключая диагональные, отличны от нуля и равны между собой. Значения элементов клеток обозначены числами, стоящими в центре прямоугольников, изображающих соответствующие клетки. В дальнейшем введенное множество матриц обозначается через $\boldsymbol{U}$.



Теорема 1. *Матрицы U_{i+1} и U_{ij} из $\boldsymbol{L}^{\perp}$, $1 \leqslant i \leqslant j-2 \leqslant n-3$, с точностью до умножения на положительные множители из $\mathbb{R}$ образуют единственную систему направляющих крайних лучей конуса $\boldsymbol{K}^{\perp}$ (множество образующих конуса), для которой справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &(B_{i+1}, U_{i+1}) = -(n-1)(n-2), \quad (B, U_{i+1}) = 0 \quad \text{при } B \neq B_{i+1}, \\ &(B_{ij}, U_{ij}) = -(n-1)(n-2), \qquad (B, U_{ij}) = 0 \qquad \text{при } B \neq B_{ij}, \end{aligned} \tag{5}$$

где B — произвольная матрица из $\boldsymbol{B}_1$.

Далее понадобятся матрицы подстановок и так называемые перенумерованные матрицы. Определим эти матрицы и перечислим их основные свойства, которые неоднократно будут использоваться при доказательстве вспомогательных и основных утверждений. Под матрицей, соответствующей подстановке σ из S_n, понимается бинарная матрица $\overline{\sigma} = [s_{ij}]$ с ненулевыми элементами $s_{i\sigma(i)}$, где $i \in \mathbb{N}_n$. В дальнейшем такие матрицы будем называть *матрицами подстановок.* При заданной подстановке σ через $A^{\sigma} = [a'_{ij}]$ обозначается матрица $\overline{\sigma}^{\,-1} A \,\overline{\sigma}$, подобная матрице $A = [a_{ij}]$, где $\overline{\sigma}^{\,-1}$ — матрица, обратная к $\overline{\sigma}$. Простая проверка показывает, что для элементов матрицы A^{σ} выполняются равенства $a'_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$, $i, j \in \mathbb{N}_n$. Поэтому матрица A^{σ} называется перенумерованной посредством σ матрицей A. Для перенумерованных матриц имеют место соотношения

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i\right)^{\sigma}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i^{\sigma},\quad (A_i^{\sigma})^{\rho}=A_i^{\rho\sigma},\quad (A_i,\,A_j)=(A_i^{\sigma},\,A_j^{\sigma}),\tag{6}$$

где $A_1,\dots,A_k\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ и $\sigma\rho$ — произведение подстановок σ, и ρ из S_n, которое определяется равенствами $\sigma\rho(i)=\sigma(\rho(i))$, где $i\in\mathbb{N}_n$. Для перенумерованных матриц подстановок и матриц E_{ij}, кроме (6), дополнительно выполняются соотношения

$$\overline{\tau}^{\,\sigma}=\overline{\tau^{\sigma}},\overline{\tau}^{\,-1}=\overline{\tau^{-1}},\left(\overline{\tau^{-1}}\right)^{\sigma}=(\,\overline{\tau^{\sigma}}\,)^{-1},E_{ij}^{\sigma}=E_{\sigma(i)\sigma(j)},\tag{7}$$
$$\tau,\,\sigma\in S_n, i,\,j\in\mathbb{N}_n.$$

Для любых подмножеств $\boldsymbol{A}\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$ и $S\subseteq S_n$ полагаем

$$\boldsymbol{A}^S=\left\{A^{\sigma}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,|\,A\in\boldsymbol{A},\ \sigma\in S\right\}.$$

В случае $\boldsymbol{A}^S=\boldsymbol{A}$ множество матриц $\boldsymbol{A}$ называется *инвариантным* относительно S. Выделим в S_n стабилизатор элемента 1, т. е. группу подстановок $S_n^1=\{\sigma\in S_n\,|\,\sigma(1)=1\}$. Если для произвольного цикла τ из T_n использовать запись $\tau=(1,i_2,\dots,i_n)$, то согласно [6, с. 17] $T_n=\left\{\tau_0^{\sigma}\,|\,\sigma\in S_n^1\right\}$, где $\tau_0=(1,2,\dots,n)$, $\tau_0^{\sigma}=\sigma\tau\sigma^{-1}$ и σ^{-1} — подстановка, обратная к σ. Введенное представление для T_n позволяет сформулировать ЗК в теоретико-групповой постановке как задачу поиска в группе S_n^1 такой подстановки ρ, что $f_A(\tau_0^{\rho})\leqslant f_A(\tau_0^{\sigma})$ для произвольной σ из S_n^1 при условии $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

Нетрудно проверить, что для произвольной матрицы A из $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ и произвольной подстановки σ из S_n^1 выполняется равенство $f_A(\tau_0^{\sigma})=f_A\left((\tau_0^{\sigma})^{-1}\right)$, из которого, ввиду $(\tau_0^{\sigma})^{-1}\in T_n$, следует, что минимум функционала СЗК всегда достигается на паре различных циклов τ_0^{ρ} и $(\tau_0^{\rho})^{-1}$. Для устранения неоднозначности в определении минимума СЗК используется ее матричная постановка. Введем бинарную матрицу $T_0=\overline{\tau_0}+\overline{\tau_0}^{\,-1}$ и положим $\boldsymbol{T}=\left\{T_0^{\sigma}\in\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}\,|\,\sigma\in S_n^1\right\}$. Тогда с учетом введенных соглашений в матричной постановке СЗК формулируется как задача нахождения в $\boldsymbol{T}$ такой матрицы T_0^{ρ}, что $(A,\,T_0^{\rho})\leqslant(A,\,T_0^{\sigma})$ для произвольной матрицы T_0^{σ} из $\boldsymbol{T}$ при условии, что $A\in\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$. Равносильность теоретико-групповой, матричной, а следовательно, и исходной постановок СЗК, вытекает из равенства $(A,\,T_0^{\sigma})=2f_A(\tau_0^{\sigma})$, справедливость которого для произвольных $A\in\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ и $\sigma\in S_n^1$ доказывается с помощью соотношений (6) и (7). Для СЗК в матричной постановке естественным образом определяется ее политоп

$$\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{s}} \,|\, X = \sum_{\sigma\in S_n^1} \lambda_\sigma T_0^\sigma,\ \sum_{\sigma\in S_n^1} \lambda_\sigma = 1,\ 0 \leqslant \lambda_\sigma \in \mathbb{R} \right\},$$

представляющий собой линейную выпуклую оболочку множества матриц $\boldsymbol{T}$. Для обозначения вершин политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и его аффинной оболочки (аффинного пространства минимальной размерности, содержащего $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$), используются соответственно стандартные обозначения $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и $\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$. При доказательстве утверждений следующего раздела понадобится описание $\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, приведенное в [12], [25, с. 259].

Теорема 2. *Пространство* $\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ *совпадает с множеством решений системы уравнений*

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} = 2,\ x_{ii} = 0,\ i \in \mathbb{N}_n, \tag{8}$$

при этом $\dim\big(\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}\big) = \dim \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} = n(n-3)/2$.

Наконец, используя матричную постановку СЗК, сформулируем основной результат работы К. Кальмансона [24], который понадобится при доказательстве леммы 6.

Теорема 3. *Для любой матрицы C из конуса $\boldsymbol{K}$ и любой подстановки σ из S_n^1 выполняется неравенство* $(C,\, T_0^\sigma) \geqslant (C,\, T_0)$.

При доказательстве основных утверждений данной статьи понадобятся леммы 2–4, которые приводятся в следующем разделе.

2. Вспомогательные утверждения

В работах [2, 16] показано, что множество матриц $\boldsymbol{B}_1$ образует базис пространства $\boldsymbol{L}^\perp$. Явный вид разложений матриц вида (2) по базису $\boldsymbol{B}_1$ устанавливает

Лемма 2. *Для матриц $B'_{ijk\ell}$ и $B''_{ijk\ell}$, из множества $\boldsymbol{B}$ выполняются равенства*:

$$B''_{ijk\ell} = \sum_{r=i}^{j-1} \sum_{s=k}^{\ell-1} B_{rs} \quad \text{для всех } 1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant n, \tag{9}$$

$$B'_{ijk\ell} = B'_{1jkn} + B''_{1ijk} + B''_{jk\ell n} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant n, \tag{10}$$

$$B'_{1jkn} = \sum_{r=j}^{k-1} B_r \quad \text{для всех} \quad 2 \leqslant j < k \leqslant n-1. \tag{11}$$

Доказательство. Справедливость (9) неоднократно отмечалась в работах [2, 13, 15], [25, с. 100]. Поэтому докажем (10). Подставив в сумму $B^{'}_{1jkn} + B^{''}_{1ijk} + B^{''}_{jk\ell n}$ вместо слагаемых их выражения из (2) и проведя несложные преобразования, получим $B^{'}_{1jkn} + B^{''}_{1ijk} + B^{''}_{jk\ell n} = (F_{1j} + F_{kn} - F_{1k} - F_{jn}) + (F_{1k} + F_{ij} - F_{1j} - F_{ik}) + (F_{jn} + F_{k\ell} - F_{j\ell} - F_{kn}) = F_{ij} + F_{k\ell} - F_{ik} - F_{j\ell} = B^{'}_{ijk\ell}$, что доказывает справедливость (10). Аналогичной подстановкой убеждаемся в справедливости равенств $B^{'}_{1pkn} = B_p + B^{'}_{1p+1kn}$ для всех p, где $j \leqslant p \leqslant k-1$. Просуммировав по $p = j, j+1, \ldots, k-1$ полученные равенства и удалив одинаковые слагаемые из левой и правой частей результирующего равенства, получим (11). Лемма 2 доказана.

При доказательстве леммы 7 используются следующие два важных свойства множества матриц $\boldsymbol{T}$.

Лемма 3. *Множество матриц* $\boldsymbol{T}$ *инвариантно относительно* S^1_n *и совпадает с* $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{сзк}}$.

Доказательство. Чтобы убедиться в инвариантности $\boldsymbol{T}$ относительно S^1_n, достаточно установить справедливость равенства $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{S^1_n}$. Как уже отмечалось выше, S^1_n является группой. Пусть ε — тождественная подстановка. Тогда $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\varepsilon} \subseteq \boldsymbol{T}^{S^1_n}$, так как $\varepsilon \in S^1_n$. Далее, произвольная матрица из $\boldsymbol{T}^{S^1_n}$ имеет вид $\left(T^{\sigma}_{0}\right)^{\rho}$, где $\sigma, \rho \in S^1_n$. Отсюда с учетом (6) и $\rho\sigma \in S^1_n$ следует, что $\left(T^{\sigma}_{0}\right)^{\rho} = T^{\rho\sigma}_{0} \in \boldsymbol{T}$. Таким образом $\boldsymbol{T}^{S^1_n} \subseteq \boldsymbol{T}$ и с учетом доказанного обратного включения имеем $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{S^1_n}$.

Равенство $\boldsymbol{T} = \operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{сзк}}$ справедливо, если $\boldsymbol{T}$ является выпукло независимым множеством в $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{s}}$. Действительно, в этом случае $\boldsymbol{T}$ является множеством крайних точек политопа $\boldsymbol{P}_{\text{сзк}}$, которое согласно [5, с. 19] совпадает с множеством $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{сзк}}$. Очевидно, что для доказательства выпуклой независимости $\boldsymbol{T}$ достаточно убедится в конической независимости $\boldsymbol{T}$. В связи с этим напомним, что произвольное подмножество из $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{s}}$, состоящее не менее чем из двух матриц, является конически независимым, если любая матрица из этого множества не выражается в виде линейной комбинации остальных матриц, в которой коэффициенты неотрицательны и не все равны нулю. Предположим, что $\boldsymbol{T}$ — конически зависимо в $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{s}}$. Тогда в $\boldsymbol{T}$ должна существовать такая матрица T^{ρ}_{0}, что $T^{\rho}_{0} = \sum\limits_{\sigma \in S} \lambda_\sigma T^{\sigma}_{0}$, где $0 < \lambda_\sigma \in \mathbb{R}$, $S \subseteq S^1_n \backslash \{\rho\}$ и $\mid S \mid \geqslant 2$. Следовательно, для произвольной матрицы X из $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{s}}$ должно выполняться равенство

$$\left(T^{\rho}_{0}, X\right) = \left(\sum_{\sigma \in S} \lambda_\sigma T^{\sigma}_{0}, X\right) = \sum_{\sigma \in S} \lambda_\sigma \left(T^{\sigma}_{0}, X\right). \tag{12}$$

Так как множество S не пусто и состоит из подстановок, отличных от

ρ, то в S найдется такая подстановка θ, что для некоторого i из $\mathbb{N}_n$ будет выполняться неравенство $\tau_0^\rho(i) \neq \tau_0^\theta(i)$. Из полученного соотношения следует, что элемент матрицы T_0^ρ, находящийся на пересечении i-й строки и $\tau_0^\theta(i)$-го столбца, и симметричный ему элемент равны 0, а соответствующие им элементы матрицы T_0^θ равны 1. Следовательно, для матриц $X_0 = E_{i\tau_0^\theta(i)} + E_{\tau_0^\theta(i)i}$ и T_0^ρ справедливы равенства $\big(T_0^\rho,\, X_0\big) = \Big(T_0^\rho,\, E_{i\tau_0^\theta(i)}\Big) + \Big(T_0^\rho,\, E_{\tau_0^\theta(i)i}\Big) = 0$. В то же время

$$\Big(\sum_{\sigma\in S} \lambda_\sigma T_0^\sigma,\, X_0\Big) = \sum_{\sigma\in S\setminus\{\theta\}} \lambda_\sigma\big(T_0^\sigma,\, X_0\big) + \Big(T_0^\theta,\, E_{i\tau_0^\theta(i)}\Big) + \Big(T_0^\theta,\, E_{\tau_0^\theta(i)i}\Big)$$
$$= \sum_{\sigma\in S\setminus\{\theta\}} \lambda_\sigma\big(T_0^\sigma,\, X_0\big) + 2 > 0,$$

так как $\sum\limits_{\sigma\in S\setminus\{\theta\}} \lambda_\sigma\big(T_0^\sigma,\, X_0\big) \geqslant 0$, ввиду $0 < \lambda_\sigma \in \mathbb{R}$ и неотрицательности элементов матриц T_0^σ и X_0. Таким образом, установлено, что для матрицы $X_0 = E_{i\tau_0^\theta(i)} + E_{\tau_0^\theta(i)i}$ не выполняется равенство (12). Полученное противоречие доказывает коническую, а следовательно и выпуклую независимость множества матриц $\boldsymbol{T}$. Леммы 2 доказана.

Нижеследующее утверждение показывает, что направляющее векторное пространство аффинной оболочки политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ совпадает с $\boldsymbol{L}^\perp$.

Лемма 4. *Пространство* $\boldsymbol{L}^\perp$ *инвариантно относительно* S_n^1 *и для произвольной подстановки* σ *из* S_n^1 *имеет место равенство* $\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} = T_0^\sigma + \boldsymbol{L}^\perp$.

Доказательство. Убедимся в инвариантности пространства $\boldsymbol{L}^\perp$ относительно S_n^1, т. е. в справедливости равенства $(\boldsymbol{L}^\perp)^{S_n^1} = \boldsymbol{L}^\perp$. Включение $\boldsymbol{L}^\perp \subseteq (\boldsymbol{L}^\perp)^{S_n^1}$ очевидно, поскольку $\varepsilon \in S_n^1$ (напомним, что S_n^1 — группа и ее единичный элемент — тождественная подстановка ε). Докажем справедливость обратного включения $(\boldsymbol{L}^\perp)^{S_n^1} \subseteq \boldsymbol{L}^\perp$. По определению $\boldsymbol{L}^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathbb{R}_{\mathrm{s}}^{n\times n}$ пространства линейности $\boldsymbol{L}$ конуса $\boldsymbol{K}$. Следовательно, в силу предложения (b) леммы 1, пространство $\boldsymbol{L}^\perp$ совпадает с множеством решений системы линейных уравнений вида $\operatorname{slg} \boldsymbol{E} = \{(E_{ii},\, Y) = 0,\ (E_i,\, Y) = 0,\ \mid i \in \mathbb{N}_n\}$. Для произвольных подстановки σ из S_n^1 и матрицы E_{ii} из $\boldsymbol{E}$ в силу (7) справедливо равенство $(E_{ii})^\sigma = E_{\sigma(i)\sigma(i)}$. Следовательно, $E_{\sigma(i)\sigma(i)} \in \boldsymbol{E}$, поскольку $\sigma(i) \in \mathbb{N}_n$. Далее из (6), (7), биективности подстановок и коммутативности операции сложения матриц для произвольной матрицы E_i из $\boldsymbol{E}$ следует справедливость цепочки равенств

$$E_i^\sigma = \Big(\sum_{i\neq j=1}^{n} (E_{ij}+E_{ji})\Big)^\sigma = \sum_{i\neq j=1}^{n} (E_{ij}+E_{ji})^\sigma$$
$$= \sum_{i\neq j=1}^{n} \big(E_{\sigma(i)\sigma(j)}+E_{\sigma(j)\sigma(i)}\big) = \sum_{\sigma(i)\neq q=\sigma(1)}^{\sigma(n)} \big(E_{\sigma(i)q}+E_{q\sigma(i)}\big)$$
$$= \sum_{\sigma(i)\neq q=1}^{n} \big(E_{\sigma(i)q}+E_{q\sigma(i)}\big) = E_{\sigma(i)},$$

из которой, поскольку $\sigma(i)\in\mathbb{N}_n$, следует $(E_i)^\sigma = E_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{E}$. Выберем в $(\boldsymbol{L}^\perp)^{S_n^1}$ произвольную матрицу X. Так как S_n^1 — группа, то можно считать, что $X = Y^{\sigma^{-1}}$, где $Y\in\boldsymbol{L}^\perp$ и $\sigma\in S_n^1$. Покажем, что $X = Y^{\sigma^{-1}}$ — решение системы $\operatorname{slg}\boldsymbol{E}$, откуда будет следовать справедливость включения $(\boldsymbol{L}^\perp)^{S_n^1}\subseteq\boldsymbol{L}^\perp$ и, следовательно, инвариантность $\boldsymbol{L}^\perp$ относительно S_n^1. В силу (6) имеем $\Big(E_{ii}, Y^{\sigma^{-1}}\Big) = \Big(E_{ii}^\sigma, \big(Y^{\sigma^{-1}}\big)^\sigma\Big) = (E_{ii}^\sigma, Y) = \big(E_{\sigma(i)\sigma(i)}, Y\big) = 0$ для любого i из $\mathbb{N}_n$, воскольку $E_{\sigma(i)\sigma(i)}\in\boldsymbol{E}$ и $Y\in\boldsymbol{L}^\perp$. Учитывая, что $E_{\sigma(i)}\in\boldsymbol{E}$, по аналогии убеждаемся в справедливости равенств $\Big(E_i, Y^{\sigma^{-1}}\Big) = (E_i^\sigma, Y) = \big(E_{\sigma(i)}, Y\big) = 0$ для $Y^{\sigma^{-1}}$ и всех i из $\mathbb{N}_n$. Таким образом установлено, что любая матрица $Y^{\sigma^{-1}}$ из $\boldsymbol{L}^\perp$ является решением системы $\operatorname{slg}\boldsymbol{E}$ и, следовательно, пространство $\boldsymbol{L}^\perp$ является инвариантным относительно группы подстановок S_n^1.

Теперь убедимся в справедливости равенства $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} = T_0^\sigma + \boldsymbol{L}^\perp$. Пусть σ — произвольная фиксированная подстановка из S_n^1, а $X=[x_{ij}]$ — произвольная матрица из $T_0^\sigma+\boldsymbol{L}^\perp$. Тогда $X = T_0^\sigma + Y$, где $Y\in\boldsymbol{L}^\perp$, и для матрицы $Y = X - T_0^\sigma$ должны выполняться равенства

$$(E_i, X-T_0^\sigma) = \sum_{i\neq j=1}^{n} (E_{ij}+E_{ji}, X-T_0^\sigma) = 0,\ (E_{ii}, X-T_0^\sigma) = 0,\ i\in\mathbb{N}_n,$$

которые в силу симметричности матрицы X и $(E_{ii}, T_0^\sigma) = 0$ при $i\in\mathbb{N}_n$ равносильны равенствам $2\Big(\sum_{j=1}^{i-1}(E_{ji}, X) + \sum_{j=i+1}^{n}(E_{ij}, X)\Big) = 4$, $(E_{ii}, X) = 0$, где $i\in\mathbb{N}_n$. Таким образом, систему линейных уравнений, определяющую в $\mathbb{R}_{\text{s}}^{n\times n}$ аффинное пространство $T_0^\sigma+\boldsymbol{L}^\perp$, образуют равенства $\sum_{j=1}^{i-1}(E_{ji}, X) + \sum_{j=i+1}^{n}(E_{ij}, X) = 2$ и $(E_{ii}, X) = 0$, где $i\in\mathbb{N}_n$. В силу

$(E_{ji},\,X)=x_{ji}$, $(E_{ij},\,X)=x_{ij}$, $(E_{ii},\,X)=x_{ii}$, приведенная система уравнений совпадает с системой (8), которая в силу теоремы 2 определяет $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$. Таким образом доказано, что $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и $T_0^\sigma+\boldsymbol{L}^\perp$ являются множествами решений одной и той же системы линейных уравнений. Следовательно, $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}=T_0^\sigma+\boldsymbol{L}^\perp$. Лемма 4 доказана.

3. Релаксация политопа $\mathbf{P}_{\text{СЗК}}$

Методы решения NP-трудных задач комбинаторной оптимизации типа ветвей и границ обычно используют релаксации решаемой задачи, которые позволяют эффективно вычислять нижние границы ее оптимума. Под релаксацией, как правило, понимается некоторая другая комбинаторно-оптимизационная задача, в множество допустимых решений которой инъективно вкладывается множество допустимых решений исходной задачи [25], т. е. между указанными множествами устанавливается инъективное соответствие. Политоп релаксационной задачи принято называть релаксационным политопом исходной задачи или просто его релаксацией. В данном разделе, используя свойства симметрии политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, строится его релаксация $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ на основе конуса $\boldsymbol{K}^\perp$. Предлагаемая релаксация помимо основного требования — инъективности вложения множества вершин политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ в множество вершин $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ — обладает еще двумя свойствами: $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ принадлежит $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, а размерности $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ и $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ совпадают, т. е. для $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ выполняются следующие соотношения:

$$\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}\subseteq\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}},\quad \dim\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}=\dim\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}},\quad \operatorname{vert}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}\subseteq\operatorname{vert}\boldsymbol{P}_{\text{KAL}},\quad(13)$$

где через $\operatorname{vert}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и $\operatorname{vert}\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ обозначены множества вершин соответствующих политопов.

Перейдем к построению релаксации $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$. Пусть $-\boldsymbol{K}^\perp=\{-Y\in\boldsymbol{L}^\perp\ Y\in\boldsymbol{K}^\perp\}$ — конус, противоположный конусу $\boldsymbol{K}^\perp$. По теореме 1 множество $\boldsymbol{U}=\{U_i,\ U_{ij}\in\boldsymbol{L}^\perp\,|\,1\leqslant i\leqslant j-2\leqslant n-3\}$ совпадает с множеством образующих конуса $\boldsymbol{K}^\perp$. Следовательно, $-\boldsymbol{U}=\{-U\in\boldsymbol{L}^\perp\,|\,U\in\boldsymbol{U}\}$ является множеством образующих противоположного конуса $-\boldsymbol{K}^\perp$. Обозначим через $\widetilde{\boldsymbol{K}}^\perp$ поляру конуса $-\boldsymbol{K}^\perp$. Согласно [8, с. 161, 162] поляра $\widetilde{\boldsymbol{K}}^\perp=\{X\in\boldsymbol{L}^\perp\,|\,(Y,X)\leqslant 0,\ Y\in-\boldsymbol{K}^\perp\}$ является острым конусом в $\boldsymbol{L}^\perp$, который описывается неизбыточной однородной системой неравенств, порождаемой множеством матриц $-\boldsymbol{U}$ и имеющей вид $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}=\{(U,X)\geqslant 0\,|\,U\in\boldsymbol{U}\}$. Рассмотрим сдвиг поляры $\widetilde{\boldsymbol{K}}^\perp$ в вершину T_0 политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, который согласно [5, с. 13] совпадает с множеством матриц

$T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}=\left\{T_0+Y\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{s}}\,|\,Y\in\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right\}$. Далее, для произвольной подстановки σ из S^1_n определим множество

$$\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}=\left\{T_0^{\sigma}+Y^{\sigma}\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{s}}\,|\,Y\in\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right\}$$

всех перенумерованных посредством σ матриц из $T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$ и введем в рассмотрение полиэдр $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, являющийся пересечением множеств матриц $\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$ по всем σ из S^1_n, т. е. по определению полагаем $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}=\bigcap\limits_{\sigma\in S^1_n}\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$.

Основная цель данной работы состоит в доказательстве того, что полиэдр $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$ — релаксация политопа $\boldsymbol{P}_{\mathrm{СЗК}}$, обладающая свойствами (13). Чтобы убедиться в этом, понадобятся еще четыре вспомогательных утверждения.

Лемма 5. *Полиэдр $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$ содержится в* aff $\boldsymbol{P}_{\mathrm{СЗК}}$ *и совпадает с множеством решений системы*

$$\operatorname{slu}\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}=\bigcup_{\sigma\in S^1_n}\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^{\sigma},\quad \textit{где}\ \ \operatorname{slu}\boldsymbol{U}^{\sigma}=\left\{(U^{\sigma},\,X)\geqslant(U,\,T_0)\,|\,U\in\boldsymbol{U}\right\}.$$

Доказательство. В силу леммы 4 должны выполняться равенства $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\mathrm{СЗК}}=T_0^{\sigma}+\boldsymbol{L}^{\perp}$ и $\left(\boldsymbol{L}^{\perp}\right)^{\sigma}=\boldsymbol{L}^{\perp}$ для произвольной σ из S^1_n. Для каждого из перенумерованных сдвигов $\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$, пересечением которых является $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, в силу (6) имеем $\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}=T_0^{\sigma}+\left(\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$. Следовательно, для доказательства включения $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}\subseteq\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\mathrm{СЗК}}$ в силу леммы 4 достаточно убедиться в справедливости включения $\left(\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}\subseteq\boldsymbol{L}^{\perp}$. По определению имеем $\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\subseteq\boldsymbol{L}^{\perp}$. Отсюда с учетом инвариантности $\boldsymbol{L}^{\perp}$ относительно S^1_n следует справедливость $\left(\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}\subseteq\left(\boldsymbol{L}^{\perp}\right)^{\sigma}\subseteq\boldsymbol{L}^{\perp}$ для произвольной σ из S^1_n. Таким образом включение $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}\subseteq\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\mathrm{СЗК}}$ доказано.

Теперь покажем, что полиэдр $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$ является множеством решений системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$. В начале убедимся в том, что множество решений ее подсистемы $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^{\sigma}$ совпадает с $\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$, где $\sigma\in S^1_n$. Пусть $X\in\left(T_0+\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma}$. Тогда в силу (6) имеем $X=T_0^{\sigma}+Y^{\sigma}$, где $Y\in\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$. Следовательно,

$$(U^\sigma,\, X) = (U^\sigma,\, T_0^\sigma + Y^\sigma) = \Big(\big(U^\sigma\big)^{\sigma^{-1}},\, \big(T_0^\sigma\big)^{\sigma^{-1}}\Big) + \Big(\big(U^\sigma\big)^{\sigma^{-1}},\, \big(Y^\sigma\big)^{\sigma^{-1}}\Big)$$
$$= (U,\, T_0) + (U,\, Y)\,.$$

Отсюда и из неравенства $(U,\, Y) \geqslant 0$ следуют неравенства $(U^\sigma,\, X) \geqslant (U,\, T_0)$ при всех U из $\boldsymbol{U}$. Следовательно, X — решение системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^\sigma$.

Обратно, пусть X — решение системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^\sigma$. Тогда для произвольной U из $\boldsymbol{U}$ имеем

$$0 \leqslant (U^\sigma,\, X) - (U,\, T_0) = (U^\sigma,\, X) - (U^\sigma,\, T_0^\sigma) = (U^\sigma,\, X - T_0^\sigma)$$
$$= \big(U,\, X^{\sigma^{-1}} - T_0\big),$$

т. е. матрица $Y = X^{\sigma^{-1}} - T_0$ принадлежит $\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$. Отсюда и из (6) следует, что $X = (T_0 + Y)^\sigma \in \Big(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\Big)^\sigma$. Далее, так как $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ по определению является пересечением конусов $\Big(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\Big)^\sigma$, где σ пробегает все S_n^1, то система $\operatorname{slu}\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, определяющая $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ в $\operatorname{aff}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, очевидно, совпадает с объединением систем $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^\sigma$ по всем σ из S_n^1, т. е. $\operatorname{slu}\boldsymbol{P}_{\text{KAL}} = \bigcup\limits_{\sigma\in S_n^1} \operatorname{slu}\boldsymbol{U}_\sigma$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для произвольной* σ *из* S_n^1 *ранг системы* $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}^\sigma$ *равен* $n(n-3)/2$.

Доказательство. Из первого равенства, приведенного в (6), следует, что свойство линейной независимости сохраняется для перенумерованных матриц. Таким образом, для доказательства леммы 6, ввиду справедливости равенств $\big|\boldsymbol{U}\big| = \big|\boldsymbol{U}^\sigma\big| = n(n-3)/2$ для всех σ из S_n^1, достаточно убедиться в линейной независимости матриц из $\boldsymbol{U}$. Предположив противное, т. е. наличие представления нулевой матрицы O в виде линейной комбинации матриц из $\boldsymbol{U}$, т. е. справедливость матричного равенства

$$\sum_{i=2}^{n-2} \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^{n-3} \sum_{k=j+2}^{n-1} \lambda_{jk} U_{jk} = O,$$

в котором для некоторых $2 \leqslant r \leqslant n-2$, либо $1 \leqslant p \leqslant q-2 \leqslant n-3$, соответствующие коэффициенты λ_r, либо λ_{pq} не равны нулю. Из данного матричного равенства следует, что для произвольной матрицы X из $\mathbb{R}_{\text{s}}^{n\times n}$ должно выполняться равенство

$$\left(\sum_{i=2}^{n-2} \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^{n-3} \sum_{k=j+2}^{n-1} \lambda_{jk} U_{jk},\, X\right) = 0.$$

Однако при $X = B_r$, либо при $X = B_{pq}$ в силу (5) и справедливы соотношения

$$\left(\sum_{i=2}^{n-2}\lambda_i U_i + \sum_{j=1}^{n-3}\sum_{k=j+2}^{n-1}\lambda_{jk}U_{jk},\, X\right)$$
$$= \begin{cases} \lambda_r\bigl(U_r,\, B_r\bigr) = -\lambda_r(n-1)(n-2) \neq 0 \quad \text{при } X = B_r, \\ \lambda_{pq}\bigl(U_{pq},\, B_{pq}\bigr) = -\lambda_{pq}(n-1)(n-2) \neq 0 \quad \text{при } X = B_{pq}. \end{cases}$$

Из полученного противоречия следует линейная независимость матриц из $\boldsymbol{U}$. Лемма 6 доказана.

Введем в рассмотрение конус

$$\boldsymbol{K}_0 = \Bigl\{\lambda\,(Y - T_0) \in \boldsymbol{L}^{\perp}\,|\,Y \in \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}},\ 0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}\Bigr\},$$

который совпадает со сдвигом граничного конуса политопа $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, соответствующего вершине T_0, в нулевую матрицу O. Для введенного конуса справедлива следующая

Лемма 7. *Для произвольной подстановки σ из S_n^1 выполняется следующая цепочка включений $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq (T_0 + \boldsymbol{K}_0)^{\sigma} \subseteq \Bigl(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\Bigr)^{\sigma}$.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости включения $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq (T_0 + \boldsymbol{K}_0)^{\sigma}$, достаточно показать, что для произвольных матрицы Y из $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и подстановки σ из S_n^1 матрица $Y^{\sigma^{-1}} - T_0$ принадлежит конусу $\boldsymbol{K}_0$. Действительно, если $X = Y^{\sigma^{-1}} - T_0 \in \boldsymbol{K}_0$, то в силу (6) будем иметь $X^{\sigma} = \bigl(Y^{\sigma^{-1}} - T_0\bigr)^{\sigma} = Y - T_0^{\sigma}$. Отсюда следует, что $Y = X^{\sigma} + T_0^{\sigma} = (T_0 + X)^{\sigma} \in (T_0 + \boldsymbol{K}_0)^{\sigma}$. Теперь покажем, что $Y^{\sigma^{-1}} - T_0 \in \boldsymbol{K}_0$, если $Y \in \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$. Согласно лемме 3 множество $\operatorname{vert}\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ инвариантно относительно S_n^1. Следовательно, в силу (6) политоп $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ инвариантен относительно S_n^1, т. е. для произвольных Y из $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ и σ из S_n^1 имеем $Y^{\sigma^{-1}} \in \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$. Отсюда и из определения конуса $\boldsymbol{K}_0$ следует, что $Y^{\sigma^{-1}} - T_0 \in \boldsymbol{K}_0$.

Убедимся в справедливости второго включения

$$(T_0 + \boldsymbol{K}_0)^{\sigma} \subseteq \Bigl(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\Bigr)^{\sigma},$$

которое в силу (6) равносильно включению $\boldsymbol{K}_0 \subseteq \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$. Докажем справедливость последнего включения. Ранее отмечалось, что $\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$ совпадает с множеством решений системы $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}$. Следовательно, нужно показать, что произвольная матрица C из $\boldsymbol{K}_0$ является решением $\operatorname{slu}\boldsymbol{U}$, т. е.

для всех U из $\boldsymbol{U}$ выполняются неравенства $(U, C) \geqslant 0$. Из определения $\boldsymbol{K}_0$ следует, что $C = \lambda(Y - T_0)$, где $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ и $Y \in \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$. Так как по лемме 3 множество $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ совпадает с множеством матриц $\boldsymbol{T}$, то $Y = \sum\limits_{\sigma \in S_n^1} \mu_\sigma T_0^\sigma$, где $0 \leqslant \mu_\sigma \in \mathbb{R}$ и $\sum\limits_{\sigma \in S_n^1} \mu_\sigma = 1$. Следовательно,

$$C = \lambda\left(\sum_{\sigma \in S_n^1} \mu_\sigma T_0^\sigma - T_0\right) = \lambda\left(\sum_{\sigma \in S_n^1} \mu_\sigma T_0^\sigma - \sum_{\sigma \in S_n^1} \mu_\sigma T_0\right) = \sum_{\sigma \in S_n^1} \nu_\sigma \big(T_0^\sigma - T_0\big),$$

где $\nu_\sigma = \lambda \mu_\sigma \geqslant 0$, $\sigma \in S_n^1$, и для скалярного произведения матриц C из $\boldsymbol{K}_0$ и U из $\boldsymbol{U}$ имеем $\big(U, C\big) = \Big(U, \sum\limits_{\sigma \in S_n^1} \nu_\sigma \big(T_0^\sigma - T_0\big)\Big) = \sum\limits_{\sigma \in S_n^1} \nu_\sigma \big(U, T_0^\sigma - T_0\big)$. Ввиду неотрицательности коэффициентов ν_σ для всех σ из S_n^1 требуемые неравенства $\big(U, C\big) \geqslant 0$ при всех U из $\boldsymbol{U}$, очевидно, будут выполняться, если справедливы неравенства $\big(U, T_0^\sigma - T_0\big) \geqslant 0$ для всех U из $\boldsymbol{U}$ и σ из S_n^1, которые равносильны неравенствам $\big(U, T_0^\sigma\big) \geqslant \big(U, T_0\big)$. По теореме 3 последние неравенства справедливы, так как матрицы U из $\boldsymbol{U}$ являются направляющими крайних лучей $\boldsymbol{K}^\perp$ и, следовательно, принадлежат конусу Кальмансона $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{K}^\perp$. Лемма 7 доказана.

Введем в рассмотрение транспозиции $\sigma = (i, k)$, где $i = 2, \ldots, n-2$, $k = i+1, \ldots, n-1$. Напомним, что транспозицией σ называется подстановка, в которой перемещаются только два элемента.

Лемма 8.

(a) *Если* $B \in \boldsymbol{B}_1 \backslash \big\{B_{i-1}, B_{k-1}, B_k, B_{i-1k-1}, B_{i-1k}\big\}$, $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $1 \leqslant i \leqslant k-1 \leqslant n-2$, *то в разложение матрицы* $B^{(i,k)}$ *по базису* $\mathbf{B}_1$ *не входит матрица* B_i;

(b) *матрицы* $B_{i-1}^{(i,k)}$, $B_{k-1},^{(i,k)}$ $B_k^{(i,k)}$, $B_{i-1k-1}^{(i,k)}$, $B_{i-1k}^{(i,k)}$, $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $1 \leqslant i \leqslant k-1 \leqslant n-2$, *имеют следующие разложения по базису* $\boldsymbol{B}_1$:

$$B_{i-1}^{(i,k)} = B_{i-1} + B_i + \sum_{s=i+1}^{k-1} B_s, \quad B_{k-1}^{(i,k)} = -B_i - \sum_{s=i+1}^{k-2} B_s,$$

$$B_k^{(i,k)} = B_i + \sum_{s=i+1}^{k} B_s,$$

$$B_{i-1k-1}^{(i,k)} = B_i + \sum_{s=i+1}^{k-1} B_s + \sum_{u=1}^{i-2} \sum_{v=i}^{k-2} B_{uv} + \sum_{u=i}^{n-2} \sum_{v=k}^{n-1} B_{uv},$$

$$B_{i-1k}^{(i,k)} = -B_i + B_{i-1k} - \sum_{s=i+1}^{k-1} B_s - \sum_{u=1}^{i-2} \sum_{v=i}^{k-1} B_{uv} - \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=k+1}^{n-1} B_{uv}.$$

Доказательство. Для матриц B_r при $r \neq i-1,\, i,\, k-1,\, k$ с учетом (2), свойств перенумерованных матриц (6), (7) и свойств транспозиции $\sigma = (i,\, k)$ следуют равенства

$$B_r^{\sigma} = F_{\sigma(1)\sigma(r)} + F_{\sigma(r+1)\sigma(n)} - F_{\sigma(1)\sigma(r+1)} - F_{\sigma(r)\sigma(n)} \\ = F_{1r} + F_{r+1n} - F_{1r+1} - F_{rn} = B_r.$$

По аналогии устанавливается справедливость равенств $B_{pq}^{\sigma} = B_{pq}$ при $p \neq i-1,\, i$ и $q \neq k-1,\, k$. Из соотношений (2), (6), (7), (11) и свойств транспозиции $\sigma = (i,\, k)$ для матрицы B_i следует, что

$$B_i^{\sigma} = F_{\sigma(1)\sigma(i)} + F_{\sigma(i+1)\sigma(n)} - F_{\sigma(1)\sigma(i+1)} - F_{\sigma(i)\sigma(n)} = F_{1k} + F_{i+1n} - F_{1i+1} - F_{kn} \\ = -B'_{1i+1kn} = -\sum_{s=i+1}^{k-1} B_s.$$

Для матриц B_{pq}, где $p = i$ и $q = k-1,\, k$, учитывая свойства транспозиции $\sigma = (i,\, k)$, соотношения (2), (6), (7), (9)–(11) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}
B_{ik-1}^{\sigma} &= F_{\sigma(i)\sigma(k)} + F_{\sigma(i+1)\sigma(k-1)} - F_{\sigma(i)\sigma(k-1)} - F_{\sigma(i+1)\sigma(k)} \\
&= F_{ki} + F_{i+1k-1} - F_{kk-1} - F_{i+1i} = B_{ik-1} - B'_{ii+1k-1k} \\
&= B_{ik-1} - \sum_{s=i+1}^{k-2} B_s - \sum_{u=1}^{i-1} \sum_{v=i+1}^{k-2} B_{uv} - \sum_{u=i+1}^{k-2} \sum_{v=k}^{n-1} B_{uv}, \\
B_{ik}^{\sigma} &= F_{\sigma(i)\sigma(k+1)} + F_{\sigma(i+1)\sigma(k)} - F_{\sigma(i)\sigma(k)} - F_{\sigma(i+1)\sigma(k+1)} \\
&= F_{kk+1} + F_{i+1i} - F_{ki} - F_{i+1k+1} = \\
B'_{ii+1kk+1} &= B'_{1i+1kn} + B''_{1ii+1k} + B''_{i+1kk+1n} \\
&= \sum_{s=i+1}^{k-1} B_s + \sum_{u=1}^{i-1} \sum_{v=i+1}^{k-1} B_{uv} + \sum_{u=i+1}^{k-1} \sum_{v=k+1}^{n-1} B_{uv}.
\end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует справедливость предложения (a). Предложение (b) леммы 8 доказывается аналогичным образом с помощью леммы 2 и соотношений (2), (6), (7). Лемма 8 доказана.

Переходим к формулировке и доказательству основного утверждения данной статьи.

Теорема 4. *Полиэдр* $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ *является релаксацией политопа* $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, *для которой выполняются свойства* (13).

Доказательство. В силу леммы 5 $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}} \subseteq \operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, что влечет

$\dim \boldsymbol{P}_{\text{KAL}} \leqslant \dim\bigl(\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}\bigr)$. Далее по лемме 7 выполняется включение $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq \left(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{P}}^{\perp}\right)^{\sigma}$ для произвольных $\sigma \in S_n^1$, из которого следует включение $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq \bigcap\limits_{\sigma \in S_n^1} \left(T_0 + \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}\right)^{\sigma} = \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$. Поэтому $\dim \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \leqslant \dim \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$. Из приведенных неравенств и теоремы 2 получаем равенства $\dim \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} = \dim \boldsymbol{P}_{\text{KAL}} = n(n-3)/2$, из которых следует, что $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ имеет в $\operatorname{aff} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ полную размерность. Таким образом, согласно [7, с. 161] каждая вершина V из $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ определяется некоторой подсистемой системы $\operatorname{slu} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ ранга $n(n-3)/2$, в которой каждое неравенство обращается матрицей V в равенство. Так как множество $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$, совпадающее по лемме 3 с множеством матриц $\boldsymbol{T}$, также содержится в $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ ввиду $\boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, то для доказательства включения $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq \operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ достаточно убедиться в существовании для матриц из $\boldsymbol{T} = \operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}}$ подсистем системы $\operatorname{slu} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ указанного выше вида.

Выберем в $\boldsymbol{T}$ произвольную матрицу T_0^{σ}, где $\sigma \in S_n^1$, и убедимся, что искомой системой является система $\operatorname{slu} \boldsymbol{U}^{\sigma}$. Действительно, по лемме 6 ранг системы $\operatorname{slu} \boldsymbol{U}^{\sigma}$ равен $n(n-3)/2$ и в силу (6) выполняются равенства $\bigl(U^{\sigma}, T_0^{\sigma}\bigr) = \left(\bigl(U^{\sigma}\bigr)^{\sigma^{-1}}, \bigl(T_0^{\sigma}\bigr)^{\sigma^{-1}}\right) = \bigl(U, T_0\bigr)$, т. е. каждое неравенство из системы $\operatorname{slu} \boldsymbol{U}^{\sigma}$ обращается матрицей T_0^{σ} в равенство. Таким образом, справедливо включение $\operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{СЗК}} \subseteq \operatorname{vert} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 4 осталось убедиться в том, что полиэдр $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ — политоп, т. е. ограничен.

Согласно [7, с. 164] полиэдр $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ представим в виде $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}} = \boldsymbol{P}^{'} + \operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, где $\boldsymbol{P}^{'}$ — некоторый политоп, $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ — характеристический конус полиэдра $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, который совпадает с множеством решений однородной системы линейных неравенств $\operatorname{slu}\bigl(\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}\bigr) = \bigl\{\bigl(U^{\sigma}, Y\bigr) \geqslant 0 \,|\, U \in \boldsymbol{U},\ \sigma \in S_n^1\bigr\}$. Из приведенного представления следует, что $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ — ограничен, если $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}} = \{O\}$. Так как $\widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp}$ совпадает с множеством решений подсистемы $\operatorname{slu} \boldsymbol{U}$ системы неравенств $\operatorname{slu}\bigl(\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}\bigr)$, то $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{K}}^{\perp} \subseteq \boldsymbol{L}^{\perp}$. Следовательно, произвольная матрица Y из $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$ представима в виде линейной комбинации матриц из множества $\boldsymbol{B}_1$, являющегося базисом $\boldsymbol{L}^{\perp}$, т. е. для матрицы Y имеет место равенство

$$Y = \sum_{r=2}^{n-2} \mu_r B_r + \sum_{p=1}^{n-3} \sum_{q=p+2}^{n-1} \mu_{pq} B_{pq}, \quad \mu_r,\, \mu_{pq} \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Покажем, что для коэффициентов из представления (14) матрицы Y

выполняются равенства

$$\mu_r = 0,\ r = 2, \ldots, n-2, \quad \mu_{pq} = 0, \quad p = 1, \ldots, n-3,$$
$$q = p+2, \ldots, n-1, \quad (15)$$

из которых следует справедливость $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}} = \{O\}$, т. е. ограниченность полиэдра $\boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$. Сначала убедимся в том, что коэффициенты из представления (14) неположительны, т. е.

$$\mu_r \leqslant 0, \quad r = 2, \ldots, n-2, \quad \mu_{pq} \leqslant 0, \quad p = 1, \ldots, n-3,$$
$$q = p+2, \ldots, n-1. \quad (16)$$

Из определения $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, (14) и соотношения (5) следует справедливость соотношений

$$0 \leqslant \big(U_r,\, Y\big) = \mu_r\big(U_r,\, B_r\big), \quad 0 \leqslant \big(U_{pq},\, Y\big) = \mu_{pq}\big(U_{pq},\, B_{pq}\big),$$

при всех $2 \leqslant r \leqslant n-2$, $1 \leqslant p \leqslant q-2 \leqslant n-3$. Отсюда в силу неравенств $\big(U_r,\, B_r\big) < 0$, $\big(U_{pq}$ и $B_{pq}\big) < 0$, следуют неравенства (16).

Теперь укажем такую однородную систему линейных неравенств, зависящую от переменных μ_r и μ_{pq}, где $2 \leqslant r \leqslant n-2$ и $1 \leqslant p \leqslant q-2 \leqslant n-3$, что ее объединение с (16) совпадает с равенствами (15). Рассмотрим транспозиции $(i,\, k)$, где $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $i+1 \leqslant k \leqslant n-1$. В силу (6) и (14) произвольная матрица $Y^{(i,\,k)}$ представима в виде линейной комбинации перенумерованных матриц из $\boldsymbol{B}_1$:

$$Y^{(i,\,k)} = \sum_{r=2}^{n-2} \mu_r B_r^{(i,\,k)} + \sum_{p=1}^{n-3} \sum_{q=p+2}^{n-1} \mu_{pq} B_{pq}^{(i,\,k)}, \quad \mu_r,\, \mu_{pq} \in \mathbb{R}. \qquad (17)$$

Так как в силу леммы 4 пространство $\boldsymbol{L}^{\perp}$ инвариантно относительно S_n^1, то матрицы $B_r^{(i,\,k)}$ и $B_{pq}^{(i,\,k)}$ из (17) принадлежат пространству $\boldsymbol{L}^{\perp}$. Следовательно они представимы в виде линейных комбинаций матриц из $\boldsymbol{B}_1$. Подставляя в (17) вместо матриц $B_r^{(i,\,k)}$ и $B_{pq}^{(i,\,k)}$, где $2 \leqslant r \leqslant n-2$ и $1 \leqslant p \leqslant q-2 \leqslant n-3$, их соответствующие представления в виде линейных комбинаций матриц из $\boldsymbol{B}_1$ и группируя коэффициенты при каждой матрице B из $\boldsymbol{B}_1$, с учетом леммы 8 получим следующие разложения матриц $Y^{(i,\,k)}$, $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $i+1 \leqslant k \leqslant n-1$, по базису $\boldsymbol{B}_1$:

$$Y^{(i,\,k)} = \sum_{B \in \boldsymbol{B}_1 \setminus \{B_i\}} \nu_{B,i,k} B$$
$$+ \big(\mu_{i-1} - \mu_{k-1} + \mu_k + \mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k}\big) B_i, \quad (18)$$

где $\nu_{B,i,k}$ — некоторые линейные функции, зависящие от коэффициентов μ_r и μ_{pq}, $2 \leqslant r \leqslant n-2$, $1 \leqslant p \leqslant q-2 \leqslant n-3$. Так как матрица $Y \in \operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\text{KAL}}$, то $\big(U_i^{(i,k)}, Y\big) \geqslant 0$ при $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $1 \leqslant i \leqslant k-1 \leqslant n-2$. Отсюда с учетом (18), (5) и (6) следует справедливость соотношений $0 \leqslant \big(U_i^{(i,k)}, Y\big) = \big(U_i, Y^{(i,k)}\big) = \big(\mu_{i-1} - \mu_{k-1} + \mu_k + \mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k}\big)\big(U_i, B_i\big)$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $1 \leqslant i \leqslant k-1 \leqslant n-2$. Полученные соотношения и неравенства $\big(U_i, B_i\big) < 0$, которые в силу теоремы 1 справедливы при всех $i = 2, \ldots, n-2$, приводят к системе неравенств

$$\begin{gathered}\mu_{i-1} - \mu_{k-1} + \mu_k + \mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k} \leqslant 0, \\ i = 2, \ldots, n-2, \quad k = i+1, \ldots, n-1.\end{gathered} \tag{19}$$

Учитывая, что матрицы B_1, B_{n-1}, B_{ii-1} не принадлежат $\boldsymbol{B}_1$ при $i = 2, \ldots, n-2$ (так как для указанных номеров они вообще не определялись), то соответствующие им коэффициенты в (16) можно считать равными нулю, т. е. $\mu_1 = \mu_{n-1} = \mu_{i-1i} = 0$ при всех $i = 2, \ldots, n-2$.

Покажем, что из (16) и (19) следует (15). Предположим, что в (14) среди μ_r, где $r = 2, \ldots, n-2$, есть ненулевые и пусть μ_i — первый из них, т. е. $\mu_2 = \ldots = \mu_{i-1} = 0$. Тогда, просуммировав по $k = i+1, \ldots, n-1$ неравенства $\mu_{i-1} - \mu_{k-1} + \mu_k + \mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k} \leqslant 0$, получим неравенство-следствие системы (19) вида $\sum\limits_{k=i+1}^{n-1} \big(\mu_{i-1} - \mu_{k-1} + \mu_k + \mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k}\big) \leqslant 0$. Несложные преобразования левой части неравенства-следствия показывают, что она равна

$$\begin{aligned}(n-i-1)\mu_{i-1} - \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_{i-1} + \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_{i-1k-1} - \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_{i-1k} \\ = -\sum_{k=i}^{n-2} \mu_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_k + \sum_{k=i}^{n-2} \mu_{i-1k} - \sum_{k=i+1}^{n-1} \mu_{i-1k} + \sum_{k=i-1}^{n-2} \big(\mu_{i-1k} - \mu_{i-1k}\big) - \mu_{i-1n-1} \\ = -\mu_i - \mu_{i-1n-1},\end{aligned}$$

так как $\mu_{i-1} = \mu_{n-1} = \mu_{i-1i} = 0$. Таким образом, полученное выше неравенство-следствие равносильно неравенству $\mu_i + \mu_{i-1n-1} \geqslant 0$, из которого с учетом неравенства $\mu_i \leqslant 0$, $\mu_{i-1n-1} \leqslant 0$ следуют равенства $\mu_i = 0$, $\mu_{i-1n-1} = 0$. Таким образом, доказано равенство нулю всех коэффициентов вида μ_i и μ_{i-1n-1} из (14) при всех $i = 2, \ldots, n-2$. Далее из равенств $\mu_i = 0$, где $i = 2, \ldots, n-2$, и (19) следует справедливость неравенства $\mu_{i-1k-1} - \mu_{i-1k} \leqslant 0$ при всех $i = 2, \ldots, n-2$, $k = i+1, \ldots, n-1$, т. е. для каждого фиксированного i, где $2 \leqslant i \leqslant n-2$, имеет место цепочка неравенств $\mu_{i-1i} \leqslant \mu_{i-1i+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{i-1n-2} \leqslant \mu_{i-1n-1}$, из которой в силу $\mu_{i-1i} = 0$ и $\mu_{i-1n-1} = 0$, следуют равенства $\mu_{i-1i+1} = \mu_{i-1i+2} = \ldots = \mu_{i-1n-3} = \mu_{i-1n-1} = 0$ при любом $i = 2, \ldots, n-2$. Таким образом, доказана справедливость равенств (15) для коэффициентов из представления вида (14) произвольной матрицы Y, принадлежащей конусу $\operatorname{char.cone} \boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$. Тем самым доказана ограниченность полиэдра $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$. Теорема 4 доказана.

4. Заключение

Теоретическая и практическая значимость построения релаксаций политопа задачи о коммивояжере обусловлена тем, что до настоящего времени не получено его полиэдрального описания. Выделены лишь некоторые достаточно представительные классы его фасет, используемые в методах отсечения, и построены отдельные его релаксации [5, 21, 25], которые позволяют применять хорошо развитый аппарат линейного программирования для вычисления нижних оценок оптимальных значений функционала ЗК [21, 25]. К настоящему времени с помощью предложенной методики, использующей сильно разрешимые случаи задачи о коммивояжере, помимо $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, построены релаксации ее политопа на основе условий Супника [28] и обобщенных условий Супника [3], которые также как и условия Кальмансона гарантируют сильную разрешимость ЗК. Система неравенств $\operatorname{slu} \boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, описывающая релаксационный политоп $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, является избыточной, в чем нетрудно убедиться. Выделение в ней неизбыточной подсистемы, эквивалентной системе $\operatorname{slu} \boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$, представляет определенный теоретический и практический интерес и является предметом дальнейших исследований. Следует отметить, что как полученные ранее [25] релаксации СЗК, так и $\boldsymbol{P}_{\mathrm{KAL}}$ могут быть использованы для выявления фасет политопа СЗК, которые играют важную роль в методах „ветвей и границ“ и методах отсечений, ориентированных на решение СЗК.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буркард Р. Е., Демиденко В. М., Рудольф Р.** Обобщенные условия Супника и Кальмансона и их применение к симметрической и несимметрической задаче о коммивояжере // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 69–74.

2. **Демиденко В. М.** Специальные случаи задачи о бродячем торговце с симметрической матрицей // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 2. С. 105–108.

3. **Демиденко В. М.** Обобщение условий Супника на несимметрический случай // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Т. 3. Минск, 1999. С. 141–148.

4. **Демиденко В. М.** Описание конуса матриц Кальмансона в пространстве минимальной размерности // Весці Нацыянальнай Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 3. С. 116–122.

5. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

6. **Супруненко Д. А.** Группы подстановок. Минск: Навука і тэхніка, 1996.

7. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования в двух томах. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1991.

8. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

9. **Burkard R. E., Deĭneko V. G., van Dal R., van der Veen J. A. A., Woeginger G. J.** Well-solvable special cases of the TSP: a survey // SIAM Rev. 1998. V. 40, N. 3. P. 496–546.

10. **Burkard R. E., Demidenko V. M., Rudolf R.** A general approach for identifying special cases of the traveling salesman problem with a fixed optimal tour // OR Transactions of China. 1997. V. 1, N. 1. P. 41–53.

11. **Burkard R. E., Klinz B., Rudolf R.** Perspectives of Monge properties in optimization // Discrete Appl. Math. 1996. V. 70, N 2. P. 95–161.

12. **Dantzig G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M.** Solution of a large-scale traveling-salesman problem // J. Operations Res. Soc. Amer. 1954. V. 2. P. 393–410.

13. **Deĭneko V. G., Rudolf R., Woeginger G. J.** Sometimes traveling is easy: the master tour problem. Graz, 1994. (Report / Institute of Mathematics. Techn. Univ. Graz; N. 15).

14. **Demidenko V. M.** An extension of Supnick conditions for the asymmetric traveling salesman problem and its application // ECCO VIII. Abstractes. Poznan, 1995. P. 26.

15. **Demidenko V. M.** Kanonische Beschreibung des Kegels von Mongeschen Matrizen // Minsk, 1996. (Preprint / Akademie der Wissenschaften von Belarus. Institut für Mathematik; № 7(519)).

16. **Demidenko V. M., Rudolf R.** A note on Kalmanson matrices // Optimization. 1997. V. 40, N 3. P. 285–294.

17. **Guy R., Hanani H., Sauer N., Schonheim J.** Combinatorial structures and their applications. New York: Gordon and Breach, 1970.

18. **Grötschel M.** The monotone 2-matching polytope on a complete graph // Oper. Res. Verfahren. 1977. V. 24. P. 77–84.

19. **Grötschel M.** On the monotone symmetric travelling salesman problem: hypohamiltonian/ hypotraceable graphs and facets // Math. Oper. Res. 1980. V. 5, N 2. P. 285–292.

20. **Grötschel M., Pulleyblank W. R.** Clique tree inequalities and the symmetric travelling salesman problem // Math. Oper. Res. 1986. V. 11, N. 4. P. 537–569.

21. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

22. **Held M., Karp R. M.** The traveling-salesman problem and minimum spanning trees // Oper. Res. 1970. V. 18, N 6. P. 1138–1162.

23. **Held M., Karp R. M.** The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II // Math. Programming. 1971. V. 1, N 1. P. 6–25.

24. **Kalmancon K.** Edgeconvex circuits and the traveling salesman problem // Canad. J. Math. 1975. V. 27, N 5. P. 1000–1010.

25. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** The traveling salesman problem. Chichester: Wiley, 1985.

26. **Papadimitriou C. H.** The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complelte // Math. Programming. 1978. V. 14, N 3. P. 312–324.

27. **Papadimitriou C. H., Yannakakis M.** The complexity of facets (and some facets of on the complexity) // J. Comput. System Sci. 1984. V. 28, N 2. P. 244–259.

28. **Supnick F.** Extreme Hamiltonian lines // Annals of Math. 1957. V. 66. P. 179–201.

Адрес автора:

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11,
220072 Минск, Беларусь.
E-mail: demidenko@im.bas-net.by

Статья поступила
20 августа 2001 г.