

УДК 519.8

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ\*)

*А. Р. Ершов, О. В. Хамисов*

Для решения задач глобальной оптимизации предлагается использовать кусочно-линейные выпуклые и вогнутые опорные функции в комбинации с методом Пиявского. Приводятся правила построения опорных функций. Показано, что это построение может быть автоматизировано, что дает возможность разработки автоматического решения задач глобальной оптимизации. Приводятся результаты численных экспериментов.

### Введение

В данной статье исследуется возможность создания решателя задач глобальной оптимизации, не требующего от пользователя задания каких-либо дополнительных сведений кроме целевой функции и функций ограничений (равенств и неравенств). Вполне естественно, что для разработки подобного решателя функции, входящие в описание задачи, должны удовлетворять определенным требованиям. Мы будем предполагать, что и целевая функция и функции-ограничения суть явно заданные функции. Под явно заданной функцией мы понимаем следующее. Задан список элементарных функций. Явно заданная функция получается из элементарных функций при помощи (возможно многократно примененных) операций сложения, вычитания, умножения и деления двух функций, умножения функции на константу, а также операций композиции и взятия максимума или минимума из двух функций. Используемый в данной статье список элементарных функций  $E_f$  состоит из следующих функций одной переменной:

$$\begin{aligned} E_f &= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}, \\ f_1(x) &= x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = e^x, f_4(x) = \sin x, \\ f_5(x) &= \cos x, f_6(x) = \sqrt{x}, f_7(x) = \ln x, f_8(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00518).

Для функций  $f_6(x)$ ,  $f_7(x)$ ,  $f_8(x)$  предполагается, что  $x > 0$ . Тогда нетрудно видеть, что, например, функция

$$f(x) = \sin x \cos x + 0.1x^2 - e^{-x^2}$$

является явно заданной функцией относительно  $E_f$ . Поскольку на протяжении всей статьи множество  $E_f$  фиксировано, в дальнейшем вместо выражения «функция  $f(x)$  является явно заданной относительно множества  $E_f$ » мы будем говорить «функция  $f(x)$  является явно заданной». Очевидно, что задача нахождения глобального минимума явно заданных функций может оказаться достаточно сложной, поскольку такие функции в общем случае невыпуклы. Например, на отрезке  $[-4, 4]$  приведенная выше функция  $f(x)$  имеет три локальных минимума, из которых только один является глобальным. Главной задачей статьи является задача нахождения глобального минимума.

Возможности оптимизации явно заданных функций исследовались и раньше. В [18] для обозначения явно заданных функций использовался термин «факторизуемые функции». Отслеживая шаг за шагом процесс построения явно заданной функции, можно параллельно отслеживать и соответствующий глобальный минимум или хотя бы границы изменения текущей функции. Вопрос состоит в том, как это делать.

Наиболее распространенная методика глобальной оптимизации основана на использовании константы Липшица минимизируемой функции. Эта константа используется при оптимизации функций, удовлетворяющих как классическому условию Липшица, так и более общему условию Гёльдера [13]:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|^{\frac{1}{N}}, \quad N \geq 1, \quad N - \text{const.}$$

Константа Липшица является равномерной характеристикой скорости изменения функции на всем допустимом множестве. В этом состоит и ее преимущество и недостаток. Нетрудно вычислить константы Липшица для любой функции из  $E_f$  на произвольном отрезке как максимум модуля производной, а затем определить шаг за шагом оценку точной константы Липшица для произвольной явно заданной функции (см. [7]). Методы липшицевой оптимизации ([3–5, 14, 15, 19]) достаточно просто и быстро программируются. В этом заключается их несомненное достоинство. Недостаток состоит в том, что каждая операция «загрубляет» оценку точной константы Липшица, что сразу же сказывается на эффективности. Кроме того, при помощи константы Липшица одинаково оценивается скорость изменения целевой функции на всем отрезке и,

следовательно, эта константа определяется участками наиболее быстрого изменения значений функции, которые в общем случае могут и не содержать точек глобального минимума, в окрестности которых целевая функция может изменяться более плавно. Одним из выходов из такой ситуации является оценивание константы Липшица в зависимости от области поиска [20]. Известны методы оценки константы Липшица в зависимости от произведенных вычислений целевой функции [8, 22]. В этом случае существует опасность завышенной оценки константы Липшица и потери истинного глобального минимума.

Эффективность поиска глобального минимума существенно возрастает, если известно, что целевая функция дифференцируема и ее производная удовлетворяет условию Липшица ([10, 11]). Одним из самых быстрых известных алгоритмов глобальной минимизации одномерных функций на отрезке является алгоритм, предложенный в [2]. В [12] этот алгоритм адаптирован к многомерной глобальной оптимизации. Очевидно, что для данного класса функций из рассмотрения приходится исключать операции взятия максимума и минимума из двух функций, поскольку в этом случае теряется дифференцируемость целевой функции.

Наиболее плодотворно развивающейся областью глобальной оптимизации является так называемое d.c. программирование [21], [16]. D.c. функцией называется функция, представляемая в виде разности двух выпуклых непрерывных функций. Задачей d.c. программирования называется задача минимизации d.c. функции при ограничениях типа равенств и неравенств, также заданных d.c. функциями. Не останавливаясь подробно на методах решения задач d.c. программирования, отметим, что представление (если оно существует) заданной функции в виде разности двух выпуклых функций может оказаться достаточно нетривиальной задачей.

В данной статье для решения задачи глобальной минимизации явно заданной функции одной переменной предлагается метод кусочно-линейных опорных функций [9, 17], обобщающий известный метод Пиявского [6]. Показано, что для минимизации произвольной явно заданной функции на отрезке можно разработать решатель, не требующий от пользователя никакой дополнительной информации кроме задания самой функции. Приводятся результаты численных экспериментов. В настоящее время известно несколько пакетов прикладных программ, решающих задачи глобальной оптимизации. Наиболее продвинутыми с точки зрения вычислительной эффективности являются три — LGO [25],  $\alpha$ BB [23] и BARON [24]. Краткий обзор других решателей по глобальной оп-

тимизации приведен в [25]. Предлагаемый подход хотя и имеет общие черты с методами липшицевой оптимизации, тем не менее обладает новыми качественными характеристиками, что дает основания (также как и предварительные численные эксперименты) для разработки решателя, конкурентоспособного с вышеупомянутыми.

### 1. Постановка задачи

Исследуемая задача глобальной оптимизации состоит в нахождении глобального минимального значения функции  $f(x)$  одной переменной на отрезке  $[\alpha, \beta]$ :

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$x \in [\alpha, \beta], \quad (1.2)$$

где  $\alpha, \beta \in R, \alpha \leq \beta$ . Предполагается, что  $f(x)$  удовлетворяет следующему определению.

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  имеет выпуклую опорную функцию-мажоранту и вогнутую опорную функцию-миноранту, если существуют функции  $\varphi^+(x, y)$  и  $\varphi^-(x, y)$  такие, что выполняются следующие требования:

1.  $\varphi^+(x, y)$  выпукла и непрерывна по  $x$  при любом фиксированном  $y \in [\alpha, \beta]$ ;
2.  $\varphi^-(x, y)$  вогнута и непрерывна по  $x$  при любом фиксированном  $y \in [\alpha, \beta]$ ;
3.  $\varphi^-(x, y) \leq f(x) \leq \varphi^+(x, y)$  при любых  $x, y \in [\alpha, \beta]$ ;
4.  $\varphi^-(y, y) = f(y) = \varphi^+(y, y)$  при любых  $y \in [\alpha, \beta]$ .

Функция  $\varphi^+(x, y)$  называется *опорной функцией-мажорантой*, а функция  $\varphi^-(x, y)$  — *опорной функцией-минорантой*.

В [9] показано, что любая функция, удовлетворяющая определению 1, является непрерывной, но не всякая непрерывная функция имеет опорные функции в смысле этого определения. Нетрудно видеть, что любая локально липшицева функция удовлетворяет этому определению. Напомним, что функция является локально липшицевой, если при любых  $x, y \in [\alpha, \beta]$  справедливы неравенства

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

или в эквивалентном виде

$$f(y) - L|x - y| \leq f(x) \leq f(y) + L|x - y| \quad \text{при любых } x, y \in [\alpha, \beta], \quad (1.3)$$

где  $L > 0$  — константа Липшица. Из (1.3) следует, что локально липшицева функция имеет опорную миноранту и опорную мажоранту:

$$\varphi^-(x, y) = f(y) - L|x - y|, \quad \varphi^+(x, y) = f(y) + L|x - y|.$$

В силу определения функции  $\varphi^-(x, y)$  и  $\varphi^+(x, y)$  удовлетворяют условию Липшица на  $[\alpha, \beta]$  при каждом фиксированном  $y$ . Если дополнительно предположить, что эти функции равномерно ограничены, что означает существование константы  $M$  такой, что

$$|\varphi^+(x, y)| \leq M, |\varphi^-(x, y)| \leq M, x, y \in [\alpha, \beta],$$

то нетрудно убедиться, что функции, имеющие вогнутую опорную миноранту и выпуклую опорную мажоранту, также удовлетворяют условию Липшица. Следовательно, в этом случае задача (1.1)–(1.2) есть задача липшицевой оптимизации, только вместо константы Липшица главную роль в дальнейшем играют введенные выше опорные функции. Далее будет показано, что определенные во введении явно заданные функции удовлетворяют определению 1.

## 2. Кусочно-линейные опорные функции

Для разработки какого-либо метода решения задачи (1.1)–(1.2) требуется уточнение способа определения опорных функций  $\varphi^-(x, y)$  и  $\varphi^+(x, y)$ . Эти функции можно задавать различными способами. Например, можно считать, что они являются квадратичными функциями или непрерывно дифференцируемыми вогнутыми функциями и т. д. Предлагается формировать  $\varphi^+(x, y)$  и  $\varphi^-(x, y)$  в виде кусочно-линейных функций.

**Определение 2.** Выпуклой кусочно-линейной опорной функцией-мажорантой функции  $f(x)$  и вогнутой кусочно-линейной опорной функцией-минорантой функции  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  в опорной точке  $y$  будем называть функции  $\varphi^+(x, y)$  и  $\varphi^-(x, y)$ , удовлетворяющие определению 1 и имеющие вид:

$$\varphi^+(x, y) = \max \{k_1^+(y)x + b_1^+(y), k_2^+(y)x + b_2^+(y)\}, \quad (2.1)$$

$$\varphi^-(x, y) = \min \{k_1^-(y)x + b_1^-(y), k_2^-(y)x + b_2^-(y)\}, \quad (2.1)$$

где  $k_1^+(y)$ ,  $b_1^+(y)$ ,  $k_2^+(y)$ ,  $b_2^+(y)$ ,  $k_1^-(y)$ ,  $b_1^-(y)$ ,  $k_2^-(y)$ ,  $b_2^-(y)$  — некоторые числа.

После выбора вида опорных функций остается неоднозначность в их построении. Ниже описаны процедуры построения кусочно-линейных

опорных функций сначала для каждой элементарной функции из множества  $E_f$ , а затем и для произвольной явно заданной функции. Построение предлагаемых опорных функций (2.1)–(2.2) основано на несложных геометрических идеях. Мы приводим один из вариантов такого построения. Для каждой процедуры мы имеем на входе три числа —  $\alpha, \beta$  и  $y$ , на выходе восемь чисел, участвующих в описании опорных функций (2.1)–(2.2.)

**2.1.**  $f(x)$  — линейная (аффинная) функция:  $f(x) = cx + d$ .

Очевидно, что в этом случае  $\varphi^+(x, y) = \varphi^-(x, y) = f(x)$  и

$$k_1^+(y) = k_2^+(y) = k_1^-(y) = k_2^-(y) = c, \quad b_1^+(y) = b_2^+(y) = b_1^-(y) = b_2^-(y) = d.$$

**2.2.**  $f(x)$  — выпуклая дифференцируемая функция одной переменной.

В силу выпуклости имеем

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y) \quad \text{при любых } x, y \in [\alpha, \beta].$$

Поэтому полагаем

$$\varphi^-(x, y) = f(y) + f'(y)(x - y) = f'(y)x + f(y) - f'(y)y.$$

Следовательно,

$$k_1^-(y) = k_2^-(y) = f'(y), \quad b_1^-(y) = b_2^-(y) = f(y) - f'(y)y. \quad (2.3)$$

Если  $\alpha < y < \beta$ , то на отрезке  $[\alpha, y]$  график функции  $f(x)$  лежит ниже прямой

$$l_1^+(x, y) = k_1^+(y)x + b_1^+(y),$$

где

$$k_1^+(y) = \frac{f(\alpha) - f(y)}{\alpha - y}, \quad b_1^+(y) = f(\alpha) - k_1^+(y)\alpha. \quad (2.4)$$

Аналогично, в силу выпуклости функции  $f(x)$  на отрезке  $[y, \beta]$  справедливо неравенство  $f(x) \leq l_2^+(x, y)$ , где

$$l_2^+(x, y) = k_2^+(y)x + b_2^+(y),$$

$$k_2^+(y) = \frac{f(\beta) - f(y)}{\beta - y}, \quad b_2^+(y) = f(\beta) - k_2^+(y)\beta. \quad (2.5)$$

Если  $y = \alpha$  или  $y = \beta$ , то из (2.5) и (2.4) следует, что

$$k_1^+(y) = k_2^+(y) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad (2.6)$$

$$b_1^+(y) = b_2^+(y) = f(\beta) - k_2^+(y)\beta. \quad (2.7)$$

Используя равенства (2.3)–(2.7), нетрудно построить выпуклые и вогнутые опорные мажоранты и миноранты для функций  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = e^x$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{x}$  (в предположении, что  $x > 0$ ). Заметим, что для построения выпуклой опорной мажоранты требование дифференцируемости функции  $f(x)$  несущественно (достаточно лишь выпуклости и непрерывности).

### 2.3. Функция $f(x) = \sin x$ .

Первоначально опишем правило построения кусочно-линейной вогнутой опорной функции на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ . Рассматриваются следующие четыре случая.

I. Опорная точка  $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ . На отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, y]$  функция  $\sin x$  выпукла. Поэтому

$$\sin x \geq \sin y + (x - y) \cos y, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, y]$$

и, следовательно,  $k_1^- = \cos y$ ,  $b_1^- = \sin y - k_1^- y$ . На отрезке  $[0, \frac{3}{2}\pi]$  график функции  $\sin x$  находится выше касательной, проходящей через начало координат (см. рис 1.).

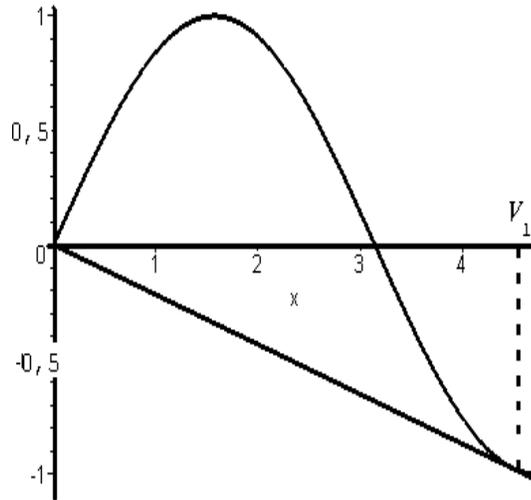


Рис. 1

Значение  $v_1 = 4,493409458$  находится из решения трансцендентного уравнения

$$\sin v - v \cos v = 0.$$

Далее, решая линейное уравнение

$$\sin v_1 + (z - v_1) \cos v_1 = -1$$

относительно  $z$ , находим корень  $z_1 = 4,603338848$ . Тогда на отрезке  $[y, \frac{3}{2}\pi]$  график функции  $\sin x$  будет лежать выше прямой, проходящей через точки  $(y, \sin y)$  и  $(z_1, -1)$ :

$$\sin x \geq k_2^- x + b_2^-, x \in [y, \frac{3}{2}\pi],$$

$$k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_1}, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

II. Опорная точка  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . На отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, y]$  график функции  $\sin x$  находится выше прямой, проходящей через точки  $(-1, 1)$  и  $(y, \sin y)$ :

$$\sin x \geq k_1^- x + b_1^-, x \in [-\frac{\pi}{2}, y],$$

$$k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y + 1}, b_1^- = \sin y - k_1^- y.$$

На отрезке  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$  график функции  $\sin x$  находится выше касательной к прямой, проходящей через точку  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  (см. рис 2.).

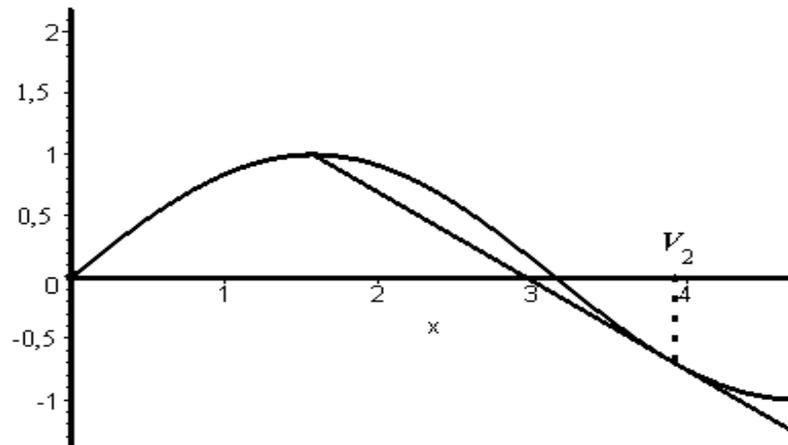


Рис. 2

Значение  $v_2 = 3,901918697$  есть корень трансцендентного уравнения

$$\sin v + \left(\frac{\pi}{2} - v\right) \cos v = 1,$$

принадлежащий отрезку  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ . Находим значение  $z_2 = 4,330896607$ , решая относительно  $z$  линейное уравнение

$$\sin v_2 + (z - v_2) \cos v_2 = -1.$$

Нетрудно видеть, что на отрезке  $[y, \frac{3}{2}\pi]$  график функции  $\sin x$  будет расположен выше прямой проходящей через точки  $(y, \sin y)$  и  $(-1, 1)$ :

$$\sin x \geq k_2^- x + b_2^-, x \in [y, \frac{3}{2}\pi],$$

$$k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_2}, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

III. Опорная точка  $y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ . На отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  график функции  $\sin x$  находится выше касательной, проходящей через точку  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  (см. рис 3.).

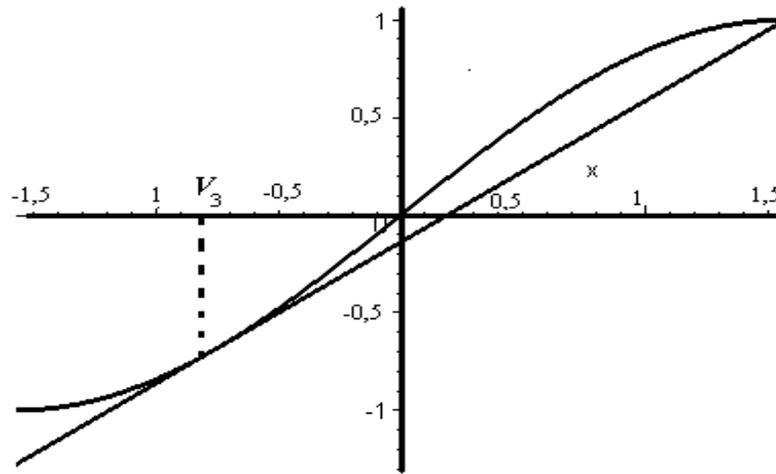


Рис. 3.

Значение  $v_3 = -0,7603260437$  есть корень трансцендентного уравнения

$$\sin v + \left(\frac{\pi}{2} - v\right) \cos v = 1,$$

принадлежащий отрезку  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Находим значение  $z_3 = -1,189303953$ , решая относительно  $z$  линейное уравнение

$$\sin v_3 + (z - v_3) \cos v_3 = -1.$$

Нетрудно видеть, что на отрезке  $[\frac{\pi}{2}, y]$  график функции  $\sin x$  будет расположен выше прямой, проходящей через точки  $(z_3, -1)$  и  $(y, \sin y)$ :

$$\sin x \geq k_1^- x + b_1^-, x \in [-\frac{\pi}{2}, y],$$

$$k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_3}, b_1^- = \sin y - k_1^- y.$$

Далее, на отрезке  $[y, \frac{3}{2}\pi]$  график функции  $\sin x$  находится выше прямой, проходящей через точки  $(y, \sin y)$  и  $(\pi + 1, -1)$ :

$$\sin x \geq k_2^- x + b_2^-, x \in [y, \frac{3}{2}\pi],$$

$$k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - \pi - 1}, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

IV. Опорная точка  $y \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ . На отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$  график функции лежит выше касательной, проходящей через точку  $(\pi, 0)$  (см. рис. 4).

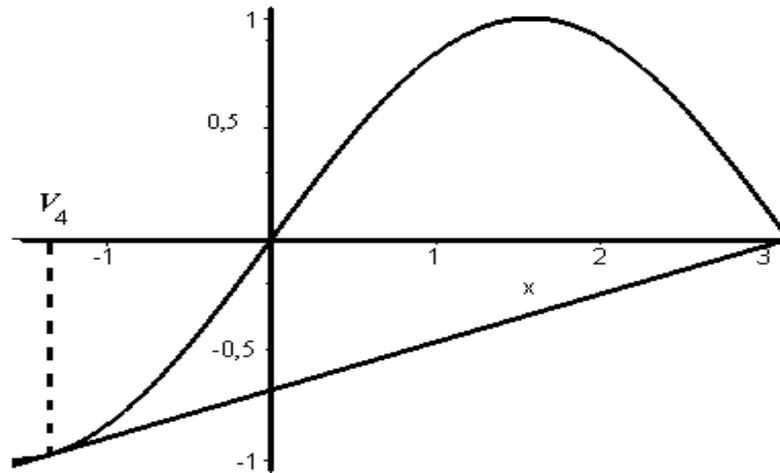


Рис. 4

Значение  $v_4 = -1,351816804$  есть корень трансцендентного уравнения

$$\sin v + (\pi - v) \cos v = 0,$$

принадлежащий отрезку  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ . Снова находим значение  $z_4 = -1,461746193$ , решая относительно  $z$  линейное уравнение

$$\sin v_4 + (z - v_4) \cos v_4 = -1.$$

На отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, y]$  график функции  $\sin x$  будет расположен выше прямой, проходящей через точки  $(z_4, -1)$  и  $(y, \sin y)$ :

$$\sin x \geq k_1^- x + b_1^-, x \in [-\frac{\pi}{2}, y],$$

$$k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_4}, b_1^- = \sin y - k_1^- y.$$

На отрезке  $[y, \frac{3}{2}\pi]$  функция  $\sin x$  выпукла. Поэтому

$$k_2^- = \cos y, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

Подводя итог, можно сформулировать следующее правило построения вогнутой кусочно-линейной миноранты функции  $\sin x$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ .

**Входные данные:** функция  $f(x) = \sin x$  и точка  $y$ , в которой нужно построить опорную функцию  $\varphi^-(x, y)$ .

**Шаг 1.**

$$\text{Если } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0, \text{ то } k_1^- = \cos y, k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_1}.$$

$$\text{Если } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то } k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y + 1}, k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_2}.$$

$$\text{Если } \frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi, \text{ то } k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_3}, k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - \pi - 1}.$$

$$\text{Если } \pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ то } k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_4}, k_2^- = \cos y.$$

$$\text{Шаг 2. } b_1^- = \sin y - k_1^- y, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

**Шаг 3.** Стоп.

**Пример 2.1.** Задана опорная точка  $y = 1,2$ . Применим изложенное выше правило для построения вогнутой миноранты функции  $\sin x$ .

**Шаг 1.** Так как  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , то

$$k_1^- = \frac{\sin y + 1}{y + 1} = 0,8781995845, k_2^- = \frac{\sin y + 1}{y - z_2} = -0,6170881152$$

**Шаг 2.**  $b_1^- = -0,1218004150, b_2^- = 1,672544824$ .

Получившаяся миноранта изображена на рис. 5.

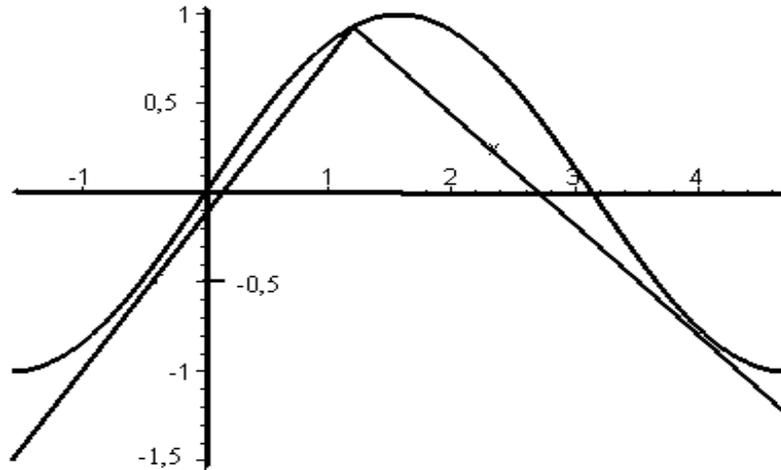


Рис. 5

Перейдем к построению вогнутой миноранты на отрезке  $[\alpha, \beta]$  при условии, что  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha$  и  $\beta \leq \frac{3\pi}{2}$ . С учетом конкретных значений  $\alpha$  и  $\beta$  в этом случае может быть построена более точная миноранта. Исходя из простых геометрических соображений, в дополнение к выше приведенному правилу добавляются следующие условия.

Если  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$  и  $\beta \leq 0$ , то на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция  $\sin x$  выпукла. Поэтому

$$k_1^- = k_2^- = \cos y, b_1^- = b_2^- = \sin y - k_1^- y.$$

Если  $0 \leq y \leq \pi$  и  $\alpha \geq 0$ , то на отрезке  $[\alpha, y]$  функция  $\sin x$  вогнута. Поэтому если  $y - \alpha > \varepsilon \geq 0$ , то

$$k_1^- = \frac{\sin y - \sin \alpha}{y - \alpha}, b_1^- = \sin y - k_1^- y.$$

Аналогично, если  $0 \leq y \leq \pi$  и  $\beta \leq \pi$ , то при условии  $\beta - y \geq \varepsilon$

$$k_2^- = \frac{\sin \beta - \sin y}{\beta - y}, b_2^- = \sin y - k_2^- y.$$

Если  $0 \leq y \leq \pi$  и либо  $y - \alpha \leq \varepsilon$ , либо  $\beta - y \leq \varepsilon$ , то

$$k_1^- = k_2^- = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha}, b_1^- = b_2^- = \sin y - k_1^- y.$$

Если  $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$  и  $\alpha \geq \pi$ , то то на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция  $\sin x$  выпукла. Следовательно

$$k_1^- = k_2^- = \cos y, b_1^- = b_2^- = \sin y - k_1^- y.$$

Если отрезок  $[\alpha, \beta]$  — произвольный и  $y \in [\alpha, \beta]$ , то в силу периодичности функции  $\sin x$  нужно произвести следующие действия. Определить величину

$$l = \left\lfloor \frac{1}{2\pi} \left( y + \frac{\pi}{2} \right) \right\rfloor.$$

Тогда будут справедливы неравенства

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi l \leq y \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi l.$$

Затем перейти к переменной  $u = x - 2\pi l$  и построить вогнутую миноранту функции  $\sin u$  на отрезке  $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ ,  $\hat{\alpha} = \alpha - 2\pi l$ ,  $\hat{\beta} = \beta - 2\pi l$  в точке  $\hat{y} = y - 2\pi l$ :

$$\hat{\varphi}^-(u, \hat{y}) = \min \left\{ \hat{k}_1^- u + \hat{b}_1^-, \hat{k}_2^- u + \hat{b}_2^- \right\}.$$

После этого надо вернуться к переменной  $x$  и пересчитать миноранту для  $x$

$$\varphi^-(x, y) = \min \left\{ k_1^- x + b_1^-, k_2^- x + b_2^- \right\},$$

$$k_1^- = \hat{k}_1^-, k_2^- = \hat{k}_2^-, b_1^- = -\hat{k}_1^- \cdot 2\pi l + \hat{b}_1^-, b_2^- = -\hat{k}_2^- \cdot 2\pi l + \hat{b}_2^-.$$

Теперь рассмотрим случай, когда на некотором отрезке  $[\alpha, \beta]$  задана функция  $\sin(cx + d)$  и требуется построить вогнутую миноранту этой функции в точке  $y \in [\alpha, \beta]$ . Снова введем новую переменную  $w = cx + d$ . Затем построим вогнутую миноранту

$$\tilde{\varphi}^-(w, \tilde{y}) = \min \left\{ \tilde{k}_1^- w + \tilde{b}_1^-, \tilde{k}_2^- w + \tilde{b}_2^- \right\},$$

функции  $\sin w$  на отрезке  $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ ,

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} c\alpha + d, & c > 0 \\ c\beta + d, & c \leq 0 \end{cases}, \tilde{\beta} = \begin{cases} c\beta + d, & c > 0 \\ c\alpha + d, & c \leq 0 \end{cases}, \quad (+1)$$

в точке  $\tilde{y} = cy + d$ . После этого вернемся к переменной  $x$  и пересчитаем вогнутую миноранту для нее:

$$\varphi^-(x, y) = \min \{k_1^- x + b_1^-, k_2^- x + b_2^-\},$$

$$k_1^- = \tilde{k}_1^- c, k_2^- = \tilde{k}_2^- c, b_1^- = \tilde{k}_1^- d + \tilde{b}_1^-, b_2^- = \tilde{k}_2^- d + \tilde{b}_2^-.$$

Теперь можно сформулировать общее правило построения вогнутой кусочно линейной миноранты функции  $\sin(cx + d)$  на произвольном отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

**Входные данные:** функция  $f(x) = \sin(cx + d)$ , числа  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\alpha < \beta$ , определяющие концы отрезка  $[\alpha, \beta]$ , точка  $y \in [\alpha, \beta]$ , в которой нужно построить опорную функцию  $\varphi^-(x, y)$ .

**Шаг 1.** Вычислить величины  $\tilde{y} = cy + d$  и  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  по формулам (+1).

**Шаг 2.** Определить  $l = \lfloor \frac{1}{2\pi}(\tilde{y} + \frac{\pi}{2}) \rfloor$  и величину  $\Delta = 2\pi l$ .

**Шаг 3.** Вычислить величины  $\hat{y} = \tilde{y} - \Delta, \hat{\alpha} = \tilde{\alpha} - \Delta, \hat{\beta} = \tilde{\beta} - \Delta$ .

**Шаг 4.**

$$\text{Если } -\frac{\pi}{2} \leq \hat{y} \leq 0, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \cos \hat{y}, \quad \hat{k}_2^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} - z_1}.$$

$$\text{Если } 0 \leq \hat{y} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} + 1}, \quad \hat{k}_2^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} - z_2}.$$

$$\text{Если } \frac{\pi}{2} \leq \hat{y} \leq \pi, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} - z_3}, \quad \hat{k}_2^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} - \pi - 1}.$$

$$\text{Если } \pi \leq \hat{y} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \frac{\sin \hat{y} + 1}{\hat{y} - z_4}, \quad \hat{k}_2^- = \cos \hat{y}.$$

**Шаг 5.** Если  $\hat{\beta} - \hat{\alpha} \leq 2\pi$ , то перейти на шаг 6, иначе на шаг 7.

**Шаг 6.**

$$\text{Если } -\frac{\pi}{2} \leq \hat{y} \leq 0 \text{ и } \hat{\beta} \leq 0, \quad \text{то } \hat{k}_2^- = \cos \hat{y}.$$

$$\text{Если } 0 \leq \hat{y} \leq \pi \text{ и } \hat{\alpha} \geq 0 \text{ и } \hat{y} - \hat{\alpha} > \varepsilon, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \frac{\sin \hat{y} - \sin \hat{\alpha}}{\hat{y} - \hat{\alpha}}.$$

$$\text{Если } 0 \leq \hat{y} \leq \pi \text{ и } \hat{\beta} \leq \pi \text{ и } \hat{\beta} - \hat{y} > \varepsilon, \quad \text{то } \hat{k}_2^- = \frac{\sin \hat{\beta} - \sin \hat{y}}{\hat{\beta} - \hat{y}}.$$

$$\text{Если } \pi \leq \hat{y} \leq \frac{3\pi}{2} \text{ и } \hat{\alpha} \geq \pi, \quad \text{то } \hat{k}_1^- = \cos \hat{y}.$$

**Шаг 7.** Вычислить

$$\hat{b}_1^- = \sin \hat{y} - \hat{k}_1^- \hat{y} - \hat{k}_1^- \Delta, \hat{b}_2^- = \sin \hat{y} - \hat{k}_2^- \hat{y} - \hat{k}_2^- \Delta.$$

**Шаг 8.** Вычислить  $k_1^- = \hat{k}_1 c, k_2^- = \hat{k}_2 c, b_1^- = \hat{k}_1 d + \hat{b}_1^-, b_2^- = \hat{k}_2 d + \hat{b}_2^-$ .

**Шаг 8.** Стоп.

**Пример 2.2.** Построить вогнутую миноранту для функции  $\sin(3x - 2)$  на отрезке  $[-47, 3; -45, 3]$  в точке  $y = -46, 9$ . Применяя выше приведенное правило получаем (см. рис. 6)

$$\varphi^-(x, y) = \min(0, 9880268016x + 47, 30920590, -2, 539264322x - 118, 1207478).$$

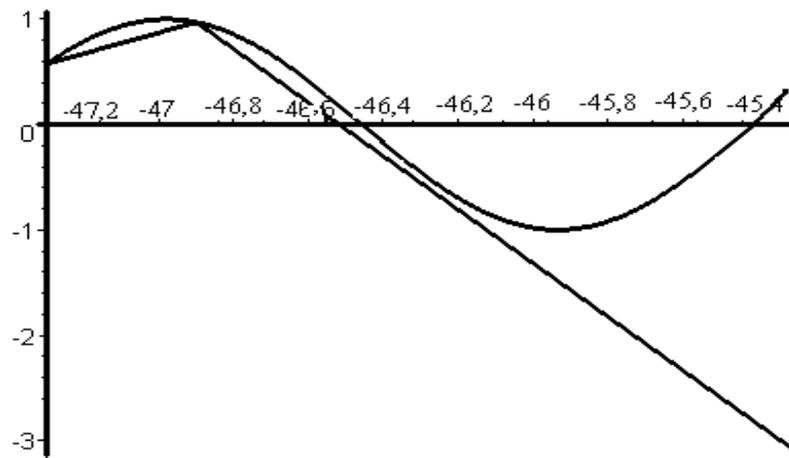


Рис. 6

Поскольку  $-\sin x = \sin(x - \pi)$ , то выпуклую кусочно-линейную мажоранту функции  $\sin x$  можно получить, сначала построив миноранту для  $\sin(x - \pi)$ , а затем умножив ее на  $-1$ . Аналогично, используя равенство  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ , можно построить опорные миноранту и мажоранту для элементарной функции  $f_5(x) = \cos x$ .

### 3. Правила построения кусочно-линейных опорных функций, соответствующие основным бинарным операциям

Пусть для функции  $f(x)$  известны опорная функция-мажоранта  $\varphi_f^+(x, y)$  и опорная функция-миноранта  $\varphi_f^-(x, y)$ :

$$\varphi_f^+(x, y) = \max \left\{ k_{f_1}^+(y)x + b_{f_1}^+(y), \quad k_{f_2}^+(y)x + b_{f_2}^+(y) \right\}, \quad (3.1)$$

$$\varphi_f^-(x, y) = \min \left\{ k_{f_1}^-(y)x + b_{f_1}^-(y), \quad k_{f_2}^-(y)x + b_{f_2}^-(y) \right\}. \quad (3.2)$$

Введем обозначения:

$$l_{f_1}^+(x, y) = k_{f_1}^+(y)x + b_{f_1}^+(y), \quad (3.3)$$

$$l_{f_2}^+(x, y) = k_{f_2}^+(y)x + b_{f_2}^+(y), \quad (3.4)$$

$$l_{f_1}^-(x, y) = k_{f_1}^-(y)x + b_{f_1}^-(y), \quad (3.5)$$

$$l_{f_2}^-(x, y) = k_{f_2}^-(y)x + b_{f_2}^-(y). \quad (3.6)$$

Тогда

$$\varphi_f^+(x, y) = \max\{l_{f_1}^+(x, y), l_{f_2}^+(x, y)\},$$

$$\varphi_f^-(x, y) = \min\{l_{f_1}^-(x, y), l_{f_2}^-(x, y)\}.$$

Более того, будем предполагать, что для функции  $h(x)$  также известны соответствующие опорные функции  $\varphi_h^+(x, y)$  и  $\varphi_h^-(x, y)$ .

Целью данного раздела является описание правил построения опорных функций-минорант и функций-мажорант для функций

$$F_1(x) = cf(x), F_2(x) = f(x) + h(x), F_3(x) = f(x) - h(x), F_4(x) = f^2(x),$$

$$F_5(x) = f(x) \cdot h(x), F_6(x) = \frac{1}{f(x)}, F_7(x) = \max\{f(x), h(x)\},$$

$$F_8(x) = \min\{f(x), h(x)\}, F_9(x) = f(h(x)),$$

где  $c$  — некоторая константа и для функции  $F_6(x)$  предполагается, что  $f(x) > 0$  при любых  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**3.1. Функция  $F_1(x) = cf(x)$ .** В этом случае построение обеих опорных функций элементарно. Опорная функция-мажоранта:

$$\varphi_{F_1}^+(x, y) = \begin{cases} \max\{c \cdot l_1^+(x, y), c \cdot l_2^+(x, y)\}, & \text{если } c \geq 0 \\ \max\{c \cdot l_1^-(x, y), c \cdot l_2^-(x, y)\}, & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

Опорная функция-миноранта:

$$\varphi_{F_1}^-(x, y) = \begin{cases} \min\{c \cdot l_1^-(x, y), c \cdot l_2^-(x, y)\}, & \text{если } c \geq 0 \\ \min\{c \cdot l_1^+(x, y), c \cdot l_2^+(x, y)\}, & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

**3.2. Функция  $F_2(x) = f(x) + h(x)$ .** Нетрудно видеть, что опорные функции имеют вид:

$$\varphi_{F_2}^+(x, y) = \max\{l_{f_1}^+(x, y) + l_{h_1}^+(x, y), l_{f_2}^+(x, y) + l_{h_2}^+(x, y)\}$$

$$\varphi_{F_2}^-(x, y) = \min\{l_{f_1}^-(x, y) + l_{h_1}^-(x, y), l_{f_2}^-(x, y) + l_{h_2}^-(x, y)\}$$

**3.3. Функция**  $F_3(x) = f(x) - h(x)$ . Поскольку  $F_3(x) = f(x) - h(x)$ , то сначала по правилу п. 3.1 вычисляются опорные функции для  $-h(x)$ , а затем по правилу п. 3.2 вычисляются опорные функции для  $F_3(x)$ .

**3.4. Функция**  $F_4(x) = f^2(x)$ . Поскольку  $(f(x) - f(y))^2 \geq 0$ , то  $f^2(x) \geq 2f(x)f(y) - f^2(y)$ . Для вычисления  $\varphi_{F_4}^-(x, y)$  используется правило п.3.1, в котором  $c = 2f(y)$ .

Построение опорной функции-мажоранты проводится в несколько этапов. Сначала находятся константы  $\underline{f}$  и  $\bar{f}$  такие, что

$$\underline{f} \leq f(x) \leq \bar{f} \quad \text{при любых } x \in X.$$

Как правило, константы  $\underline{f}$  и  $\bar{f}$  либо известны заранее, либо вычисляются (возможно приближенно) путем решения задач:

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

для нахождения  $\bar{f}$  и

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

для нахождения  $\underline{f}$ . Затем вычисляется величина  $\hat{z} = f(y)$ . Предположим, что  $\underline{f} < \hat{z} < \bar{f}$ . Тогда

$$z^2 \leq (\underline{f} + \hat{z})z - \underline{f}\hat{z}, \quad z \in [\underline{f}, \hat{z}],$$

$$z^2 \leq (\bar{f} + \hat{z})z - \bar{f}\hat{z}, \quad z \in [\hat{z}, \bar{f}].$$

Следовательно,

$$z^2 \leq \max \{ (\underline{f} + \hat{z})z - \underline{f}\hat{z}, (\bar{f} + \hat{z})z - \bar{f}\hat{z} \}, \quad z \in [\underline{f}, \bar{f}].$$

Сделав подстановку  $z = f(x)$ ,  $\hat{z} = f(y)$ , получим

$$f^2(x) \leq \max \{ (\underline{f} + f(y))f(x) - \underline{f}f(y), (\bar{f} + f(y))f(x) - \bar{f}f(y) \}.$$

Опорные выпуклые мажоранты для функций  $(\underline{f} + f(y))f(x) - \underline{f}f(y)$  и  $(\bar{f} + f(y))f(x) - \bar{f}f(y)$  можно построить, используя правило п. 2.1 для  $c = (\underline{f} + f(y))$  и  $c = (\bar{f} + f(y))$ .

**3.5. Функция**  $F_5(x) = f(x) \cdot h(x)$ . Так как

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{(f(x) + h(x))^2}{2} - \frac{f^2(x)}{2} - \frac{h^2(x)}{2},$$

то опорные функции для  $F_5(x)$  можно последовательно построить, используя правила пп. 3.1–3.4.

**3.6. Функция**  $F_6(x) = \frac{1}{f(x)}$ . Предполагается, что  $f(x) > 0$  при любом  $x \in [\alpha, \beta]$ ,  $F_6(x)$  есть композиция двух функций  $\varphi(z) = \frac{1}{z}$  и  $f(x)$ . Пусть  $0 < \underline{f} < f(x) < \overline{f}$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  и  $\hat{z} = f(y)$ . На отрезке  $[\underline{f}, \overline{f}]$  функция  $\varphi(z)$  выпукла. Поэтому

$$F(x) = \varphi(f(x)) \geq \frac{1}{f(y)} - \frac{f(x)}{f^2(y)}.$$

Вогнутая миноранта функции  $-\frac{f(x)}{f^2(y)}$  строится по правилу п. 3.1, в котором  $c = -\frac{1}{f^2(y)}$ . Выпуклая мажоранта строится в полной аналогии с рассуждениями п. 3.4 и заменой вспомогательной функции  $z^2$  на функцию  $\frac{1}{z}$ .

Нетрудно видеть, что построение опорных мажорант и минорант некоторой вогнутой функции  $f(x)$  сначала сводится к построению опорных мажорант и минорант для выпуклой функции  $-f(x)$  по правилу п. 2.2 с последующим умножением на  $-1$  и использованием правила п. 3.1. Именно таким образом строятся опорные мажоранты и миноранты для элементарных функций  $f_6(x) = \sqrt{x}$ ,  $f_7(x) = \ln x$ .

**3.7. Функция**  $F_7(x) = \max\{f(x), h(x)\}$ . Не теряя общности, будем предполагать, что  $\max\{f(y), h(y)\} = f(y)$ . Тогда

$$F_7(x) \geq f(x) \geq \varphi_f^-(x, y),$$

т. е.  $\varphi_f^-(x, y)$  есть вогнутая опорная миноранта функции  $F_7(x)$ . С другой стороны,

$$F_7(x) \leq \max\{\varphi_f^+(x, y), \varphi_h^+(x, y)\}.$$

Так как функции  $\varphi_f^+(x, y)$  и  $\varphi_h^+(x, y)$  выпуклы по  $x$ , то функция  $\psi(x) = \max\{\varphi_f^+(x, y), \varphi_h^+(x, y)\}$  тоже выпукла по  $x$ . Применяя к функции  $\psi(x)$  правило построения опорной мажоранты п. 2.2, получим опорную кусочно-линейную мажоранту для функции  $F_7(x)$ .

**3.8. Функция**  $F_8(x) = \min\{f(x), h(x)\}$ . Так как  $\min\{f(x), h(x)\} = -\max\{-f(x), -h(x)\}$ , то искомые опорные функции получают посредством применения правил п. 3.1 и 3.7.

**3.9. Функция**  $F_9(x) = f(h(x))$ . Из (3.1) и (3.2) следуют неравенства

$$F_7(x) \leq \varphi_f^+(h(x), h(y)) = \max \left\{ \begin{aligned} &k_{f_1}^+(h(y))h(x) + b_{f_1}^+(h(y)), \\ &k_{f_2}^+(h(y))h(x) + b_{f_2}^+(h(y)) \end{aligned} \right\}, \quad (3.7)$$

$$F_7(x) \geq \varphi_f^-(h(x), h(y)) = \min \left\{ k_{f_1}^-(h(y))h(x) + b_{f_1}^-(h(y)), \right. \\ \left. k_{f_2}^-(h(y))h(x) + b_{f_2}^-(h(y)) \right\}. \quad (3.8)$$

Выражения, стоящие в правых частях неравенств (3.7) и (3.8), кусочно-линейны относительно функции  $h(x)$ . Для построения опорных мажорант и минорант достаточно применить правила п. 3.7, п. 3.8, п. 3.1 и п. 3.2.

Приведенные выше правила построения опорных кусочно-линейных функций применимы к любой явно заданной функции. Сам процесс построения опорных функций в определенном смысле аналогичен процессу взятия производной от сложной функции; и то и другое можно автоматизировать. В этом состоит главная идея предлагаемого подхода. Довольно скрупулезную процедуру вычисления опорных функций можно поручить вычислительной машине. При этом не всегда обязательно иметь аналитический вид необходимых функций. Достаточно иметь алгоритмы вычисления их значений в любой допустимой точке. Поэтому пользователю достаточно лишь задать явный вид целевой функции, все остальное позволяют автоматизировать вышеприведенные правила.

#### 4. Модификация метода Пиявского

Предложенный метод решения задачи (1.1)–(1.2) является модификацией известного метода Пиявского [6] (иногда его называют методом ломанных [1]). Принципиальная вычислительная схема метода состоит в следующем. Пусть заданы точки  $x^1, \dots, x^k$ , а следующая точка  $x^{k+1}$  определяется как глобальный минимум в задаче

$$\psi_k(x) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\varphi^-(x, x^i)\} \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$x \in [\alpha, \beta]. \quad (4.2)$$

Далее определяется функция  $f_{k+1} = \min\{f(x^i) \mid i = 1, \dots, k+1\}$ ; если

$$f_{k+1} - \psi(x^{k+1}) \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность, то точка  $x^l, l = 1, \dots, k+1$  такая, что  $f(x^l) = f_k$  есть  $\varepsilon$ -оптимальное решение. Первоначальная точка  $x^1 \in [\alpha, \beta]$  выбирается произвольно. Если в процессе построения вогнутых опорных функций гарантировать условие равномерной ограниченности функций  $\psi_k(x)$ , то, как было указано выше, это условие эквивалентно условию Липшица; в [6] доказано, что в этом случае каждая предельная

точка последовательности  $x^k$  является глобальным минимумом в задаче (1.1)–(1.2).

На  $k$ -ой итерации точками  $x^1, \dots, x^k$  отрезок  $[\alpha, \beta]$  разбивается на  $p$  подотрезков  $[\alpha^j, \beta^j], j = 1, \dots, p - 1$  таких, что  $\alpha^1 = \alpha, \beta^p = \beta, \beta^j = \alpha^{j+1}$ . Следующая точка  $x^{k+1}$  принадлежит одному из этих подотрезков. Поэтому опорные функции достаточно строить не на всем отрезке  $[\alpha, \beta]$ , а только на том отрезке, которому принадлежит  $x^{k+1}$ . Это усиление метода Пиявского и ранее использовалось в липшицевой оптимизации [20]. Другое усиление состоит в том, что опорная функция зависит от опорной точки, за счет чего достигается более точная кусочно-линейная аппроксимация целевой функции на отрезке в отличие от [20], где точность аппроксимации определяется константой Липшица (хотя и на меньшем отрезке). Правила построения опорных функций, изложенные в предыдущем разделе, ориентированы на повышение точности кусочно-линейной аппроксимации с уменьшением длины текущего подотрезка. В общем случае, как это видно из проведенного численного эксперимента, удалось добиться существенного прогресса по сравнению с липшицевой оптимизацией. Используя методику Пиявского [6], можно доказать, что каждая предельная точка последовательности  $x^1, \dots, x^k, \dots$ , генерируемой предлагаемым методом, является точкой глобального минимума в исходной задаче.

## 5. Численный эксперимент

Численный эксперимент преследовал две цели. Во-первых, разработать такую программу, которая в качестве входных данных получала явное выражение целевой функции и концов отрезка и по ним автоматически строила нужные опорные функции. Во-вторых, требовалось проверить численную эффективность модифицированного метода Пиявского. Тестовые примеры были заимствованы из [14]. Они приведены в таблице 1. В этой же таблице приведены значения соответствующих констант Липшица в качестве меры максимальной скорости изменения значений целевой функции на допустимом отрезке. Тестовые функции 3 и 8 имеют по 20 локальных минимумов, остальные функции имеют меньше таких минимумов. Программа для решения тестовых примеров была составлена на языке Turbo Pascal и вычисления проводились на компьютере Athlon/1400MgH/512Mb. В зависимости от точности результаты тестирования приведены в таблице 2. Время решения каждой задачи было существенно меньше 1 секунды. По сравнению с методами липшицевой оптимизации на тех же тестовых примерах согласно [14] модифицированный метод Пиявского с кусочно-линейными опорными функциями

требует в несколько (от 3 до 10) раз меньше итераций для достижения той же точности. На наш взгляд выигрыш достигается за счет более гибкой процедуры кусочно-линейной аппроксимации.

Т а б л и ц а 1

## Тестовые задачи

Номер задачи	Функция	Интервал	Константа Липшица	Оптимальное значение	Оптимальные точки
1	$\frac{1}{6}x^6 - \frac{52}{25}x^5 + \frac{39}{80}x^4 + \frac{71}{10}x^3 - \frac{79}{20}x^2 - x + \frac{1}{10}$	[-1.5,11]	13870	-29763.233	10
2	$\sin x + \sin(\frac{10x}{3})$	[2.7,7.5]	4.29	-1.899599	5.145735
3	$-\sum_{k=1}^5 k \sin((k+1)x + k)$	[-10,10]	67	-12.03125	-0.49139 5.791785
4	$-(16x^2 - 24x + 5)e^{-x}$	[1.9,3.9]	3	-3.85045	2.868
5	$(3x - 1.4) \sin(18x)$	[0,1.2]	36	-1.48907	0.96609
6	$-(x + \sin x)e^{-x^2}$	[-10,10]	2.5	-0.824239	0.67956
7	$\sin x + \sin(\frac{10x}{3}) + \ln x - 0.84x - 3$	[2.7,7.5]	6	-1.6013	5.19978
8	$-\sum_{k=1}^5 k \cos((k+1)x + k)$	[-10,10]	67	-14.508 5	-0.8003 -7.0835 5.48286
9	$\sin x + \sin(\frac{2x}{3})$	[3.1,20.4]	1.7	-1.90596	17.039
10	$x \sin x$	[0,10]	11	-7.91673	7.9787
11	$2 \cos x + \cos 2x$	[-1.57,6.28]	3	-1.5	4.189 2.094
12	$\sin^3(x) + \cos^3(x)$	[0,6.26]	2.2	-1	4.712 4.142
13	$e^{-x} \sin(2\pi x)$	[0,4]	6.5	-0.788685	0.224885
14	$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$	[-5,5]	6.5	-0.03553	2.4142
15	$2(x-3)^2 - e^{\frac{x^2}{2}}$	[-3,3]	85	7.515924	1.5907
16	$(\sin x - x)e^{-x^2}$	[-10,10]	1.3	-0.0634905	1.195137

Распространение этого метода на задачи со многими переменными требует решения двух проблем. Во-первых, необходимо автоматизировать построение опорных функций в пространстве многих переменных. Эта проблема носит скорее технический характер, поскольку правила, изложенные в разделе 3 данной статьи, без особого труда переносятся и на многомерный случай. Вторая проблема серьезней. Необходимо научиться решать многомерный аналог задачи (4.1)–(4.2). Эта задача является многоэкстремальной. Тем не менее специфический вид этой задачи позволяет свести ее к решению задачи глобальной оптимизации

вогнутой функции на выпуклом множестве. Для решения последней задачи можно применять различные методы из [16]. Одним из самых простых методов является так называемый метод внешней аппроксимации, главной вычислительной процедурой которого служит перебор вершин вспомогательного многогранника.

Поскольку нахождение всех вершин многогранника приемлемо с вычислительной точки зрения в пространствах, размерность которых не превышает 10, можно ожидать, что удастся создать автоматический решатель задач глобальной оптимизации с числом переменных не больше 10. Применение более изощренной техники (например, сочетание метода ветвей и границ с отсечениями) возможно позволит увеличить число оптимизируемых переменных.

Т а б л и ц а 2

*Число итераций в зависимости от точности*

Номер задачи	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-7}$
1	61	66	75	82
2	16	22	25	91
3	128	137	140	1452
4	1027	1245	1464	1680
5	19	19	22	24
6	73	78	83	87
7	10	13	14	15
8	69	129	459	613
9	33	106	156	164
10	19	22	24	27
11	28	31	34	37
12	22	26	29	29
13	32	35	38	41
14	106	114	124	133
15	12	13	15	16
16	249	255	265	271

Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие существенному улучшению статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

2. **Гергель В. П.** Алгоритм глобального поиска, использующий производные // Динамика систем и оптимизация. Нижний Новгород: ННГУ, 1992. С.161–178.
3. **Евтушенко Ю. Г.** Численный метод поиска глобального экстремума функции (перебор на неравномерной сетке) // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1971. Т. 11, № 6. С. 1390–1403.
4. **Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г.** Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
5. **Нефедов В. Н.** Отыскание глобального максимума функции нескольких переменных на множестве, заданном ограничениями типа неравенств // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1987. Т. 27, № 1. С. 35–51.
6. **Пиявский С. А.** Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1972. Т. 12, № 4. С. 888–896.
7. **Сухарев А. Г.** Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Наука, 1989.
8. **Сухарев А. Г., Подобедов В. Е.** Алгоритм поиска глобального максимума функции нескольких переменных // Вычислительные комплексы и моделирование сложных систем. М.: МГУ, 1989. С. 124–134.
9. **Хамисов О. В.** Глобальная оптимизация функций с вогнутой минорантой // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1552–1563.
10. **Varitomp W.** Accelerations for a variety of global optimization methods // J. Global Optim. 1994. V. 4, N 1. P. 37–45.
11. **Breiman L., Cutler A.** A deterministic algorithm for global optimization // Math. Program. 1993. V. 58, N 2. P. 179–199.
12. **Gergel V. P.** A global optimization algorithm for multivariate functions with Lipschitzian first derivatives // J. Global Optim. 1997. V. 10, N 3. P. 257–281.
13. **Gourdin E., Jaumard B., Ellaia R.** Global optimization of Hölder functions // J. Global Optim. 1996. V.8, N 4. P. 323–348.
14. **Hansen P., Jaumard B.** Lipschitz optimization // Handbook of global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 407–494.
15. **Horst R., Nast M., Thoai N. V.** New LP bound in multivariate Lipschitz optimization: theory and applications // J. Optim. Theory Appl. 1995. V. 86, N 2. P. 369–388.
16. **Horst R., Tuy H.** Global optimization. Deterministic approaches. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
17. **Khamisov O.V.** On optimization properties of functions with a concave minorant // J. Global Optim. 1999. V. 14, N 1. P. 79–101.

18. **McCormick G. P.** Computability of global solutions to factorable nonconvex programs. I. Convex underestimating problems // *Math. Program.* 1976. V. 10, N 2. P.147–175.
19. **Pinter J.** *Global Optimization in action.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
20. **Sergeev Ya. D.** An one-dimensional deterministic global optimization algorithm // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 1995. Т. 35, № 5. P. 705–717.
21. **Tuy H.** D.C. optimization: theory, methods and algorithms // *Handbook of global optimization.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 149–216.
22. **Wood G. R., Zhang B. P.** Estimation of the Lipschitz constant of a function // *J. Global Optim.* 1996. V. 8, N 1. P. 91–103.
23. <http://titan.princeton.edu/>
24. <http://archimedes.me.uiuc.edu/sigma/baron.html>
25. <http://is.dal.ca/~jdpinter>

Адрес авторов:

Институт систем энергетики  
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,  
ул. Лермонтова, 130,  
664033, Иркутск, Россия.  
E-mail: khamisov@iscm.sei.irk.ru

Статья поступила  
31 августа 2004 г.