ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2004. Серия 2. Том 11, № 2, 69–93

УДК 519.87

О ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕЛАКСАЦИЯХ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЯДА ИЗДЕЛИЙ С ЧАСТИЧНЫМ ВНЕШНИМ ФИНАНСИРОВАНИЕМ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОБЪЕМЫ ПРОИЗВОДСТВА*)

Д. С. Иваненко, А. В. Плясунов

Рассматривается двухуровневая задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием и ограничениями на объемы производства. Для исследуемой задачи предлагается полиномиальное сведéние к семейству одноуровневых задач частично-целочисленного программирования, основанное на методе декомпозиции допустимой области. Эта сводимость используется при получении нижних и верхних оценок для оптимального значения целевой функции двухуровневой задачи.

Введение

В задаче выбора оптимального ряда изделий считаются заданными множество работ, подлежащих выполнению, и множество изделий, которые могут использоваться для этого. Требуется выполнить все работы с минимальными суммарными затратами, которые складываются из затрат на разработку, производство и эксплуатацию изделий. При этом предполагается, что возможные объемы производства изделий ограничены сверху.

Особенность предлагаемой постановки состоит в том, что рассматривается ситуация, когда для организации производства привлекаются средства инвестора. При этом процесс использования кредита явным образом не анализируется. Оценивается только влияние процесса погашения кредита на выбор ряда изделий. Также предполагается, что в счет погашения кредита инвестор может получать любые изделия из числа

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00455) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ–313.2001.1), а второго автора — при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00455).

произведенных по заранее согласованным ценам. Оставшиеся изделия могут быть использованы для выполнения работ. В таких условиях выбор ряда производимых изделий и множества изделий, используемых для погашения кредита, становятся взаимозависимыми, что приводит к двухуровневой математической модели. На верхнем уровне выбирается ряд изделий, которые будут производиться для выполнения работ, а на нижнем уровне инвестор стремится максимизировать суммарную эффективность выбранных им изделий, исходя из величины кредита.

Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием в качестве подзадачи содержит простейшую задачу размещения [1, 14]. Поэтому рассматриваемая задача является Max SNP–трудной даже в случае с неограниченными объемами производства [11]. Для задачи выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием без ограничений на мощности производства в [5] было предложено полиномиальное сведе́ние к семейству простейших задач размещения. Сведе́ние основано на декомпозиции допустимого множества двухуровневой задачи на семейство подмножеств, на каждом из которых исходная задача может быть переформулирована в виде одноуровневой задачи.

В настоящей статье рассматривается обобщение метода декомпозиции для задачи с ограничениями на мощности производства. Предлагается полиномиальное сведе́ние двухуровневой задачи к семейству одноуровневых задач частично-целочисленного программирования. Полученное сведе́ние может быть использовано для вычисления нижних и верхних оценок для оптимального значения суммарных затрат в двухуровневой задаче. При определении нижних оценок используется техника лагранжевых релаксаций. Кроме того, предлагается способ нахождения нижних оценок, который является специфическим для задач двухуровнего программирования и основан на «переносе» части ограничений верхнего уровня на нижний уровень. Полученные нижние оценки сравниваются между собой по качеству. Решения релаксированных задач, полученные в ходе вычисления нижних оценок, используются для получения верхних оценок и приближенных решений двухуровневой задачи.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 описывается математическая модель рассматриваемой задачи и даются основные определения. В разделе 2 описывается метод декомпозиции допустимой области двухуровневой задачи и сведе́ние к семейству одноуровневых задач. Способы нахождения нижних оценок приведены в разделе 3. Сравнение качества нижних оценок производится в разделе 4. Наконец, в разделе 5 приведены способы получения верхних оценок для оптимального

значения суммарных затрат.

1. Математическая модель

Пусть $X = \{1, 2, ..., m\}$ — множество типов изделий, $J = \{1, 2, ..., n\}$ — множество работ (область применения изделий). Для описания параметров модели введем следующие обозначения:
$f_i \geqslant 0$ — затраты на организацию производства изделий i-го типа;
$c_i \geqslant 0$ — затраты на производство одного изделия i-го типа;
$V_i \geqslant 0$ — максимально возможные объемы производства изделий i-го типа;
$\beta_i \geqslant 0$ — стоимость одного изделия i-го типа для инвестора;
$\alpha_i \geqslant 0$ — оценка эффективности одного изделия i-го типа инвестором;
$p_{ij} \geqslant 0$ — количество изделий i-го типа, требующихся для выполнения j-й работы;
$d_{ij} \geqslant 0$ — стоимость выполнения j-й работы изделиями i-го типа;
$B \geqslant 0$ — величина кредита.
Решение задачи описывается вектором (x, v, y, w), где
$x_i = 1$, если изделия i-го типа производятся и 0 в противном случае;
$v_i \geqslant 0$ — объем производства изделий i-го типа;
$0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1$ — доля работы j, выполняемая изделиями i-го типа;
$w_i \geqslant 0$ — число изделий i-го типа, закупаемых инвестором.

На языке введенных обозначений математическая модель рассматриваемой задачи выбора ряда изделий, обозначаемая в дальнейшем BP, записывается следующим образом: найти

$$Z = \min_{(x,v,y)} \sum_{i \in X} (f_i x_i + c_i v_i + \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij}) \tag{1.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in X} y_{ij} = 1,\ j \in J, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i,\ i \in X, \tag{1.3}$$

$$0 \leqslant y_{ij} \leqslant x_i,\ i \in X, j \in J, \tag{1.4}$$

$$0 \leqslant v_i \leqslant V_i x_i,\ i \in X, \tag{1.5}$$

$$x_i \in \{0, 1\}\,,\ i \in X, \tag{1.6}$$

где w — оптимальное решение задачи инвестора:

$$\max_{w} \sum_{i \in X} \alpha_i w_i, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i \in X} \beta_i w_i \leqslant B, \tag{1.8}$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i, \; i \in X. \tag{1.9}$$

Целевая функция (1.1) выражает суммарные затраты на разработку, производство и эксплуатацию изделий. Ограничения (1.2) требуют выполнения всех работ. Неравенства (1.3) гарантируют, что произведенных изделий достаточно как для выполнения работ, так и для погашения кредита. Из ограничений (1.4) следует, что для выполнения работ могут быть использования только те изделия, которые было решено производить. Максимально возможные объемы производства изделий каждого типа задаются ограничениями (1.5). Критерием оптимальности решения задачи инвестора является максимум суммарной эффективности изделий, выбранных для погашения кредита (1.7). Выбор инвестора ограничен величиной кредита (1.8) и количеством произведенных изделий (1.9).

При $B = 0$ задача ВР является известной задачей размещения с ограничениями на объемы производства [17]. В случае ненулевых инвестиций в формировании допустимой области задачи также участвует вектор w — решение внутренней оптимизационной задачи. Более строго, допустимая область задачи ВР определяется следующим образом.

Определение 1. Вектор (x, v, y, w) называется *допустимым решением* задачи ВР, если переменные x_i, v_i, y_{ij} $(i \in X,\ j \in J)$ удовлетворяют ограничениям (1.2)–(1.6), а вектор w оптимален в задаче (1.7)–(1.9).

Отметим, что для некоторых значений вектора v задача инвестора может иметь неединственное решение. В этом случае, выбирая различные решения внутренней задачи, будем получать разные значения целевой функции (1.1). Более того, полученное решение может оказаться недопустимым. В силу такой неоднозначности вычисления целевой функции понятие наилучшего решения также требует уточнения. Существуют разные способы определения наилучшего решения в задачах двухуровнего программирования. Наиболее распространенные подходы — кооперативный и антикооперативный [4]. В данной статье рассматривается кооперативная задача, т. е. задача, в которой для некоторых заданных значений x, v из множества оптимальных решений задачи нижнего уровня выбирается то решение, на котором целевая функция двухуровневой задачи имеет наименьшее значение. В этом случае понятие

наилучшего решения может быть определено следующим образом.

Определение 2.Допустимое решение (x, v, y, w) называется *оптимальным,* если на нем достигается минимум целевой функции (1.1).

2. Декомпозиция допустимой области

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\alpha_1/\beta_1 \geqslant \alpha_2/\beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{m-1}/\beta_{m-1} \geqslant \alpha_m/\beta_m.$$

Рассмотрим разбиение $\{X_t\}_{t=1}^T$ множества X, обладающее следующими свойствами:

1. $\alpha_i/\beta_i = \alpha_j/\beta_j$ при каждом $t = 1, \ldots, T$ и любых $i, j \in X_t$;
2. для любых $t, t' = 1, \ldots, T$ из условия $t < t'$ следует, что

$$\alpha_i/\beta_i > \alpha_j/\beta_j,\ i \in X_t,\ j \in X_{t'}.$$

Другими словами, семейство $\{X_t\}_{k=1}^T$ задает разбиение множества изделий на такие группы, что изделия, принадлежащие одной группе, эквивалентны с точки зрения инвестора, причем наиболее предпочтительными для него являются изделия из группы с меньшим номером. Очевидно, что если множество X непусто, то каждое из подмножеств X_t непусто и $T \leqslant m$.

Предложенное упорядочение изделий позволяет легко описать вид оптимального решения задачи нижнего уровня. Предположим, что задача ВР разрешима. Рассмотрим ее допустимое решение (x, v, y, w). Тогда имеет место следующее очевидное свойство.

Утверждение 1. *Найдется номер $t \in \{1, \ldots, T\}$ и соответствующее ему множество $X_t = \{s, s+1, \ldots, r-1, r\}$ такие, что*

$$\begin{cases} w_i = v_i, & i < s, \\ w_i \leqslant v_i, & s \leqslant i \leqslant r, \\ w_i = 0, & i > r, \end{cases}$$

причем ограничения (1.8) *выполняются как равенства, т. е.*

$$\sum_{i \in X} \beta_i w_i = B.$$

Справедливость утверждения непосредственно следует из теорем двойственности для задач линейного программирования. Утверждение 1 помогает установить некоторые простые свойства допустимых решений

задачи BP.

Утверждение 2. *Если* (x, v, y, w) — *допустимое решение задачи* BP, *то* $y_{ij} = 0,\ i < s,\ j \in J$.

Утверждение 2 является следствием утверждения 1 и ограничений (1.3). Так как в задаче BP требуется отыскать минимум суммарных затрат, то справедливо

Утверждение 3. *Существует оптимальное решение задачи BP, которое удовлетворяет ограничениям* (1.3) *как равенствам. Более того, если* $c_i > 0,\ i \in X$, *то любое оптимальное решение задачи* BP *удовлетворяет ограничениям* (1.3) *как равенствам.*

В терминах задачи BP утверждения 1–3 имеют простой смысл. Если двухуровневая задача разрешима, то в оптимальном решении изделия с номерами, меньшими s, закупаются инвестором в том объеме, в котором они были произведены и не используются для выполнения работ. Изделия с номерами, большими r, используются только для выполнения работ. Наконец, оставшиеся изделия используются как для выполнения работ, так и для погашения кредита.

Описанные выше свойства допустимых решений задачи BP позволяют произвести декомпозицию допустимого множества задачи на подмножества таким образом, что на каждом таком подмножестве исходная задача может быть преобразована в одноуровневую задачу. Рассмотрим последовательно элементы разбиения $X_t = \{s(t), \ldots, r(t)\},\ t = 1, \ldots, T$.

Теорема 1. *Оптимальное решение задачи* BP *может быть найдено при помощи решения семейства* $\{BP_t\}_{t=1}^{T}$ *задач частично-целочисленного программирования следующего вида: найти*

$$Z(t) = \min_{(x,w,y)} \sum_{i \in X} (f_i x_i + c_i w_i + \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij})$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in X} y_{ij} = 1,\ j \in J, \tag{D}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} + w_i \leqslant V_i x_i,\ i \in X, \tag{C}$$

$$\sum_{i \in X} \beta_i w_i = B, \tag{K}$$

$$y_{ij} \leqslant x_i,\ i \in X, j \in J, \tag{B}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1,\ w_i \geqslant 0,\ i \in X, j \in J, \tag{N}$$

$$\begin{gathered} y_{ij} = 0,\ i < s(t), j \in J, \\ w_i = 0,\ i > r(t), \end{gathered} \tag{F$_t$}$$

$$x_i \text{ — целые},\ i \in X, \tag{I}$$

где $h_{ij} = d_{ij} + c_i p_{ij}$.

При этом семейство $\{BP_t\}_{t=1}^T$ *может быть построено за время, ограниченное полиномом от размерности задачи* BP.

Доказательство. Пусть $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{y}, \overline{w})$ — допустимое решение задачи BP. Очевидно, что это решение удовлетворяет ограничениям (D), (C), (B), (N) и (I). Из утверждений 1 и 2 следует, что найдется такой номер $t_0 \in \{1, \ldots, T\}$, что выполняются ограничения (K) и (F$_t$). В силу утверждения 3 можно считать, что

$$\overline{v}_i = \overline{w}_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \overline{y}_{ij},\ i \in X.$$

Тогда нетрудно убедиться, что значения целевых функций задач BP и BP$_{t_0}$ на решениях $(\overline{x}, \overline{v}, \overline{y}, \overline{w})$ и $(\overline{x}, \overline{w}, \overline{y})$ совпадают.

С другой стороны, если для некоторого номера $t_0 \in \{1, \ldots, T\}$ задача BP$_{t_0}$ разрешима, то любое ее допустимое решение $(\widetilde{x}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$ может быть преобразовано в допустимое решение задачи BP. Для этого надо положить

$$\widetilde{v}_i = \widetilde{w}_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \widetilde{y}_{ij},\ i \in X.$$

По утверждению 1 построенное решение $(\widetilde{x}, \widetilde{v}, \widetilde{y}, \widetilde{w})$ допустимо в задаче BP и, более того, значения целевых функций задач BP и BP$_t$ на решениях $(\widetilde{x}, \widetilde{v}, \widetilde{y}, \widetilde{w})$ и $(\widetilde{x}, \widetilde{w}, \widetilde{y})$ совпадают. Таким образом, $Z = \min\limits_{t=1,\ldots,T} Z(t)$. Отметим, что некоторые из задач BP$_t$, $t = 1, \ldots, T$, могут быть неразрешимы. Это возможно, например, если t таково, что $\sum\limits_{i \leqslant r(t)} \beta_i V_i < B$. Поэтому в случае, когда для некоторого t задача BP$_t$ неразрешима, будем полагать, что $Z(t) = +\infty$. Если же ни одна из задач BP$_t$ не имеет допустимых решений, то задача BP также не имеет допустимых решений. Наконец, поскольку $T \leqslant m$, семейство задач $\{\mathrm{BP}_t\}_{t=1}^T$ может быть построено за время, ограниченное полиномом от длины записи входных данных задачи BP. Теорема 1 доказана.

Следует особо выделить случай, когда все множества из семейства $\{X_t\}_{t=1}^T$ являются одноэлементными. По определению это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\beta_2 > \ldots > \alpha_{m-1}/\beta_{m-1} > \alpha_m/\beta_m$. В

этом случае $T = m$ и задача нижнего уровня имеет единственное решение для любых допустимых значений вектора v. Следовательно, задача ВР является невырожденной, а стратегия поведения инвестора — однозначной и полностью определенной.

Если $f_i = 0, i \in X$, то каждая из задач $\{\text{BP}_t\}_{t=1}^T$ может быть преобразована в задачу линейного программирования [2] и, следовательно, задача ВР полиномиально разрешима.

3. Нижние оценки

По аналогии с [9] введем следующие обозначения. Пусть a, b — векторы одинаковой размерности. Под выражением ab будем понимать скалярное произведение векторов a и b. Пусть также $S_1, \ldots, S_k$ — символические обозначения некоторых ограничений (равенств или неравенств). Через $P(S_1, \ldots, S_k)$ обозначим множество всех решений при ограничениях $(S_1), \ldots, (S_k)$.

В новых обозначениях каждая из задач $\text{BP}_t,\ t = 1, \ldots, T$, может быть представлена в виде: найти

$$Z(t) = \min\{fx + cw + hy\}$$

при условии, что $(x, w, y) \in P(\text{D,C,K,B,N,F}_t\text{,I})$.

При получении нижних оценок для оптимального значения целевой функции задачи ВР воспользуемся подходом, основанным на релаксации допустимого множества задачи. Прежде всего отметим, что если для некоторой величины $\Omega(t)$ верно неравенство

$$\Omega(t) \leqslant Z(t),\ t = 1, \ldots, T,$$

то значение $\Omega = \min\limits_{t=1,\ldots,T} \Omega(t)$ является нижней оценкой для оптимального значения Z целевой функции задачи ВР.

Рассмотрим семейство задач $\{\text{BP}_t\}_{t=1}^T$. Пусть S — некоторое из ограничений (D), (C), (K), (B), (N), (F_t), (I), и пусть $Z^S = \min\limits_{t=1,\ldots,T} Z^S(t)$, где величины $Z^S(t),\ t = 1, \ldots, T$, являются оптимальными значениями целевой функции (1.1) на множестве решений, которое получается исключением ограничения S из задачи BP_t.

Наиболее известными релаксациями такого сорта для задач размещения являются следующие линейные релаксации. Сильная линейная релаксация: найти

$$Z^I(t) = \min\{fx + cw + hy\}$$

при условии, что $(x, w, y) \in P(\mathrm{D,C,K,B,N,F}_t)$, и слабая линейная релаксация: найти

$$Z^{BI}(t) = \min\{fx + cw + hy\}$$

при условии, что $(x, w, y) \in P(\mathrm{D,C,K,N,F}_t)$.

Пусть R — одно из ограничений (D), (C), (K), (B), (N), (F_t). Введем обозначение

$$Z_R = \min_{t=1,\dots,T} Z_R(t),$$

где $Z_R(t),\ t = 1, \dots, T,$ — оптимальное значение целевой функции лагранжевой двойственной задачи [10, 15], полученной из задачи BP_t релаксацией ограничения R. Например, если релаксировать ограничение D, то

$$Z_D(t) = \max_{\lambda} Z_D(t, \lambda), \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ j \in J,$$

где

$$Z_D(t, \lambda) = \min_{(x,w,y)} \sum_{i \in X} \left(f_i x_i + c_i w_i + \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij} \right) + \sum_{j \in J} \lambda_j \left(1 - \sum_{i \in X} y_{ij} \right),$$
$$(x, w, y) \in P(\mathrm{C,K,B,N,F}_t\mathrm{,I}).$$

Известно [10], что такая лагранжева двойственная задача может быть записана в виде: найти

$$Z_D(t) = \min\{fx + cw + hy\}$$

при условии, что $(x, w, y) \in \mathrm{P(D)} \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{C,K,B,N,F}_t\mathrm{,I})$, где $\mathrm{Conv}(\mathrm{C,K,B,N,F}_t\mathrm{,I})$ — выпуклая оболочка точек, удовлетворяющих ограничениям (C), (K), (B), (N), (F_t), (I).

Рассмотрим еще один способ получения нижних оценок. В задаче BP для выполнения работ используются изделия, оставшиеся после погашения кредита. Если рассматривать обратную ситуацию, в которой сначала выполняются все работы, а затем погашается кредит, то легко проверить, что оптимальное значение целевой функции (1.1) для такой задачи не превосходит Z. Такая задача может быть получена из задачи BP «переносом» ограничений (1.3) с верхнего уровня на нижний. Результатом такого преобразования будет следующая задача BP′: найти

$$Z' = \min_{(x,v,y)} \{fx + cv + dy\}$$

при ограничениях (1.2),(1.4)–(1.6), где w — оптимальное решение задачи: найти

$$\max_{w} \alpha w \tag{3.1}$$

при ограничениях:

$$\beta w = B, \tag{3.2}$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i - \sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij},\ i \in X. \tag{3.3}$$

Заметим, что переменные w не входят явно в целевую функцию (1.1) и ограничения (1.2), (1.4)–(1.6), но участвуют в формировании допустимой области задачи BP$'$.

Определение 3. Решение (x, v, y, w) называется *допустимым* для задачи BP$'$, если переменные x_i, v_i, y_{ij}, $i \in X$, $j \in J$ удовлетворяют ограничениям (1.2), (1.4)–(1.6), а вектор w оптимален в задаче (3.1)–(3.3).

Понятие оптимального решения для задачи BP$'$ определяется также, как и для задачи BP. Более того, проводя рассуждения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Оптимальное решение задачи BP$'$ может быть найдено из решения семейства $\left\{BP'_t\right\}_{t=1}^{T}$ задач частично-целочисленного программирования следующего вида: найти*

$$Z'(t) = \min_{(x,w,y)} (fx + cw + hy)$$

при ограничениях (D),(C),(K),(B),(N),(I) и

$$w_i = 0,\ i > r(t). \tag{F$'_t$}$$

При этом семейство $\left\{BP'_t\right\}_{t=1}^{T}$ может быть найдено за время, ограниченное сверху полиномом от размерности задачи BP.

Легко видеть, что при любом $t = 1, \ldots, T$ допустимая область задачи BP$'_t$ содержит допустимую область задачи BP$_t$. Очевидно, что величина

$$Z' = \min_{t=1,\ldots,T} \{Z'(t)\}$$

является нижней оценкой для оптимального значениея целевой функции задачи BP.

4. Сравнение нижних оценок

При исследовании качества нижних оценок наиболее интересным является вопрос о совпадении или несовпадении их значений на всем множестве входов рассматриваемой задачи. Для одноуровневой задачи выбора ряда изделий этот вопрос достаточно подробно исследован (см., например, [9]). Поскольку при $B = 0$ задача BP эквивалентна задаче размещения с ограничениями на объемы производства, то установленные в [9] соотношения справедливы в данном частном случае. Однако, как будет показано ниже, при ненулевых значениях B картина несколько меняется. Кроме того, в данном разделе исследуется взаимосвязь между оценками, построенными при помощи релаксаций и оценкой Z'.

Два следующих утверждения устанавливают соотношения между величиной Z и оценками Z^I и Z'.

Теорема 3. *Для любых $n > 1$ и $0 \leqslant \gamma < 1$ существуют такие входные данные задачи BP, на которых $Z = Z'$ и $\dfrac{Z - Z^I}{Z} = \gamma$.*

Доказательство. Пусть $m = n$. Рассмотрим задачу BP на следующих входных данных:

$$f = (n, 0, \ldots, 0), \quad c = (0, \ldots, 0), \quad V = (1, \ldots, 1, n + 1 + \gamma),$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = (n, n-1, \ldots, 2, 1), \quad \beta = (1, \ldots, 1), \quad B = n.$$

Заметим, что $\alpha_i/\beta_i = n - i + 1$. Таким образом, $T = n$ и $X_t = \{t\}$, $t = 1, \ldots, T$. Поскольку $\sum\limits_{i<n} \beta_i V_i < B$, любая задача BP_t неразрешима при $t < n$. Рассмотрим задачу BP_n. Заметим, что любое допустимое решение является в этой задаче оптимальным. Действительно, из ограничений (D), (B) и (F_t) следует, что $x_n = 1$ и $y_{nj} = 1$, $j \in J$. Тогда из условия $\gamma < 1$ и ограничений (C), (K) и (I) получаем, что $x_i = 1$, $i < n$, $i \in X$. Таким образом, оптимальное значение целевой функции задачи BP равно $Z = Z(n) = n$.

Рассмотрим сильную линейную релаксацию задачи BP_n. Легко проверить, что релаксированная задача имеет единственное оптимальное решение. Действительно, $f_1 > 1$ при любом $n > 1$. Следовательно, реше-

ние $(\overline{x}, \overline{w}, \overline{y})$ вида

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = (1-\gamma, 1, \ldots, 1), & \\ \overline{w} = (1-\gamma, 1, \ldots, 1, 1+\gamma) & \end{array} \qquad \overline{y}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < n,\ j \in J, \\ 1, & \text{если } i = n,\ j \in J \end{cases}$$

имеет наименьшее значение целевой функции. Таким образом, $Z^I = Z^I(n) = n(1-\gamma)$. Следовательно, $\dfrac{Z - Z^I}{Z} = \gamma$. Для завершения доказательства заметим, что любая задача BP'_t неразрешима при $t < n$. Оптимальные решения задач BP_n и BP'_n совпадают, поскольку

$$d_{nj} < d_{ij},\ i < n,\ j \in J.$$

Следовательно, $Z = Z'$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для любого* $n > 1$ *и* $0 \leqslant \gamma < 1$ *существуют такие входные данные задачи* BP, *что* $Z - Z^I = \gamma(n-1)$ и $\dfrac{Z^I}{Z'} = n$.

Доказательство. Рассмотрим задачу BP на следующих входных данных:

$$\begin{gathered} m = n, \quad f = (n-1, 0, \ldots, 0), \quad c = (0, \ldots, 0), \\ p_{ij} = 1,\ i \in X,\ j \in J, \quad V = (1, \ldots, 1, n+1+\gamma), \\ d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j,\ i \in X,\ j \in J, \\ n-1+\gamma, & \text{если } i \neq j,\ i \in X,\ j \in J, \end{cases} \\ \alpha = (n, n-1, \ldots, 2, 1), \quad \beta = (1, \ldots, 1), \quad B = n. \end{gathered}$$

Аналогично предыдущему случаю $T = n$ и $X_t = \{t\}$, $t = 1, \ldots, T$. Кроме того, $\sum\limits_{i<n} \beta_i V_i < B$. Следовательно, задачи BP_t и BP'_t неразрешимы при $t < n$. Как и в предыдущем случае любое допустимое решение задачи BP_n является оптимальным в задаче BP. Оптимальное значение целевой функции (1.1) равно

$$Z = Z(n) = (n-1) + (n-1+\gamma)(n-1) = (n+\gamma)(n-1).$$

Рассмотрим сильную линейную релаксацию задачи BP_n. Аналогично примеру из теоремы 3 релаксированная задача имеет единственное оптимальное решение:

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = (1-\gamma, 1, \ldots, 1), & \\ \overline{w} = (1-\gamma, 1, \ldots, 1, 1+\gamma), & \end{array} \qquad \overline{y}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < n,\ j \in J, \\ 1, & \text{если } i = n,\ j \in J. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Z^I = Z^I(n) = (n-1)(1-\gamma)+(n-1+\gamma)(n-1) = n(n-1) \text{ и } Z-Z^I = \gamma(n-1).$$

Рассмотрим задачу BP'_n. Из ограничений (D) и (K) следует, что $x_i = 1$, $i \in X$. Нетрудно проверить, что в оптимальном решении задачи BP'_n

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j,\ i \in X, j \in J, \\ 0, & \text{если } i \neq j,\ i \in X, j \in J, \end{cases} \qquad w_i = 0,\ i < n, \quad w_n = n.$$

Следовательно, $Z' = Z'(n) = (n-1)$. Таким образом, $Z^I = nZ'$. Теорема 4 доказана.

Рассмотренные примеры показывают, что оценки Z' и Z^I несравнимы между собой в том смысле, что невозможно установить соотношения между значениями Z' и Z^I, которые выполнялись бы на всем множестве входов задачи BP.

Далее будут рассмотрены взаимосвязи между различными оценками, основанными на лагранжевых релаксациях. Для этого потребуются некоторые простые свойства многогранников, возникающих в результате релаксации тех или ограничений.

Пусть $S_1, \ldots, S_k$ — некоторые из ограничений (D), (C), (K), (B), (N), (F_t). Тогда справедливы следующие свойства [9]:

Свойство 1. $P(S_1, \ldots, S_k) = P(S_1) \cap \cdots \cap P(S_k)$.

Свойство 2. $\mathrm{Conv}(S_1, S_2, \mathrm{I}) \subseteq P(S_1) \cap \mathrm{Conv}(S_2, \mathrm{I}) \subseteq P(S_1, S_2)$.

Покажем, что выполняются следующие соотношения между многогранниками.

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\mathrm{P(C,B,N,I)} = \mathrm{P(C,N,I)}, \quad \mathrm{Conv(B,N,F}_t\mathrm{,I)} = \mathrm{P(B,N,F}_t), \\ \mathrm{Conv(N,F}_t\mathrm{,I)} = \mathrm{P(N,F}_t).$$

Доказательство. Первое равенство следует из того, что ограничение (B) является избыточным. Действительно, в силу ограничений (N) и (I) переменные x_i, $i \in X$, принимают значения только из множества $\{0, 1\}$. При $x_i = 1$ справедливость ограничений (B) следует из того, что $y_{ij} \leqslant 1$, $j \in J$. При $x_i = 0$ из ограничений (C) следуют равенства $y_{ij} = 0$, $j \in J$.

Для доказательства второго равенства рассмотрим проекцию P_{xy}(B, N, F_t) многогранника P(B,N,F_t) на пространство переменных (x, y). Полученная проекция — многомерный куб, крайние точки которого имеют только целочисленные компоненты x_i, y_{ij}, $i \in X$. В силу ограниченности

многогранник $P_{xy}(\mathrm{B,N,F}_t)$ совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин. Третье равенство доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает очевидное следствие. Пусть $S_1,\ldots,S_k$ — некоторые из ограничений (D), (K), (F_t).

Следствие 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$\mathrm{Conv(C,B,N,I)} = \mathrm{Conv(C,N,I)}$$

$$\mathrm{Conv}(S_1,\ldots,S_k,\mathrm{C,B,N,I}) = \mathrm{Conv}(S_1,\ldots,S_k,\mathrm{C,N,I})$$

$$\mathrm{Conv(C,B,N,I)} = \mathrm{P(B)}\cap \mathrm{Conv(C,N,I)}.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{C,B,N,F}_t,\mathrm{I}) = \mathrm{P(C)}\cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I}),$$

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{K,B,N,F}_t,\mathrm{I}) = \mathrm{P(K)}\cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I}),$$

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{D,K,N,F}_t,\mathrm{I}) = \mathrm{P(D,K)}\cap \mathrm{Conv}(\mathrm{N,F}_t,\mathrm{I}).$$

Доказательство. Покажем, что выполняется первое равенство. По свойству 2 имеем

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{C,B,N,F}_t,\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{P(C)}\cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I}).$$

Чтобы доказать обратное включение, достаточно показать, что любая крайняя точка многогранника $P(\mathrm{C}) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I})$ имеет только целочисленные компоненты x_i, $i \in X$. Предположим, что это не так. Рассмотрим некоторую крайнюю точку $(\overline{x},\overline{w},\overline{y}) \in P(\mathrm{C}) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I})$. Пусть $\overline{x}$ имеет хотя бы одну дробную компоненту. Обозначим через $\mathrm{Conv}_x(\mathrm{B, N, F}_t, \mathrm{I})$ проекцию многогранника $\mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I})$ на пространство переменных x. Поскольку $\mathrm{Conv}_x(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I})$ имеет только целочисленные вершины, точка $\overline{x}$ не является его вершиной. Тогда найдутся $x^1, x^2 \in \mathrm{Conv}_x(\mathrm{B,N,F}_t,\mathrm{I})$ такие, что $x^1 \neq x^2$ и $\overline{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$. Далее при $\overline{x}_i = 0$ положим

$$y^1_{ij} = y^2_{ij} = w^1_i = w^2_i = 0,\ i \in X, j \in J.$$

В противном случае положим

$$y^k_{ij} = \overline{y}_{ij}(x^k_i/\overline{x}_i),\ w^k_i = \overline{w}_i(x^k_i/\overline{x}_i),\ i \in X, j \in J, k = 1,2.$$

Нетрудно проверить, что $(x^k, w^k, y^k) \in P(\mathrm{C}) \cap \mathrm{Conv}\ (\mathrm{B,N,F}_t\mathrm{,I}),\ k = 1, 2,$ и точка $(\overline{x}, \overline{w}, \overline{y})$ является их выпуклой комбинацией

$$(\overline{x}, \overline{w}, \overline{y}) = \frac{1}{2}(x^1, w^1, y^1) + \frac{1}{2}(x^2, w^2, y^2).$$

Это противоречит предположению о том, что $(\overline{x}, \overline{w}, \overline{y})$ является крайней точкой многогранника $P(\mathrm{C}) \cap$ Conv (B,N,F$_t$,I). Таким образом, Conv(C, B, N, F$_t$, I) $= P(\mathrm{C}) \cap$ Conv(B, N, F$_t$, I).

Остальные равенства доказываются аналогично за исключением того, что для доказательства второго равенства при $\overline{x}_i > 0$ полагаем

$$w_i^1 = w_i^2 = \overline{w}_i,\ i \in X,$$

а для доказательства третьего полагаем

$$y_{ij}^1 = y_{ij}^2 = \overline{y}_{ij},\ w_i^1 = w_i^2 = \overline{w}_i,\ i \in X,\ j \in J.$$

Лемма 2 доказана.

Далее заметим, что любая задача BP$_t$, $t = 1, \ldots, T$, в качестве подзадачи содержит простейшую задачу размещения [14]. Поэтому справедливо следующее

Утверждение 4. *Если* $\min\{m, n\} < 3$, *то* $Z_C = Z^I$.

Доказательство. Рассмотрим следующее семейство релаксаций задач BP$_t$: найти

$$Z_C^I(t, \lambda) = \min_{(x,w,y)} \sum_{i \in X} \left(f_i x_i + c_i w_i + \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij} \right) \\ + \sum_{i \in X} \lambda_i \left(\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} + w_i - V_i x_i \right)$$

при условии, что

$$(x, w, y) \in P(\mathrm{D,K,B,N,F}_t), \quad \lambda_i \geqslant 0,\ i \in X, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Каждая такая релаксация может быть представлена в эквивалентном виде

$$Z_C^I(t, \lambda) = \min_{\lambda} \{L_1(\lambda) + L_2(t, \lambda)\}$$
$$\lambda_i \geqslant 0,\ i \in X,\ t = 1, \ldots, T,$$

где $L_1(\lambda)$ — оптимальное значение целевой функции задачи о ранце, т. е.

$$L_1(\lambda) = \min_w \{(c + \lambda)w\}$$
$$w \in P(\mathrm{K}),\ w_i \geqslant 0,\ i \in X,$$

а $L_2(t, \lambda)$ — оптимальное значение целевой функции задачи $\Pi(t, \lambda)$, т. е.

$$L_2(t, \lambda) = \min_{x,y} \sum_{i \in X} \left(f_i x_i + \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij} \right) + \sum_{i \in X} \lambda_i \left(\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} - V_i x_i \right)$$
$$(x, y) \in P(\mathrm{D,B,F}_t),\ x_i \geqslant 0,\ y_{ij} \geqslant 0,\ i \in X, j \in J.$$

Покажем, что такое представление справедливо. Из ограничений $y_{ij} \geqslant 0$, $i \in X, j \in J$, и (D) следует, что

$$y_{ij} \leqslant 1,\ i \in X, j \in J.$$

Покажем, что ограничение $x_i \leqslant 1$, $i \in X$ можно исключить. Поскольку при фиксированном λ задача $\Pi(t, \lambda)$ является задачей линейного программирования, достаточно показать, что любое ее допустимое решение, содержащее хотя бы одну компоненту $x_i > 1$, не может быть вершиной многогранника

$$M = \{(x, y) \mid (x, y) \in P(\mathrm{D,B,F}_t),\ x_i \geqslant 0,\ y_{ij} \geqslant 0,\ i \in X, j \in J\}.$$

Рассмотрим точку $(\overline{x}, \overline{y})$ такую, что $(\overline{x}, \overline{y}) \in M$ и $\overline{x}_{i_0} > 1$. Пусть точки (x^1, y^1) и (x^2, y^2) таковы, что

$$x_i^1 = x_i^2 = \overline{x}_i, i \neq i_0, \quad y_{ij}^1 = y_{ij}^2 = \overline{y}_{ij}, i \in X,\ j \in J, \quad x_{i_0}^1 = 1,\ x_{i_0}^2 = 2\overline{x}_{i_0} - 1.$$

Нетрудно убедиться, что (x^1, y^1), $(x^2, y^2) \in M$ и $(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}(x^1, y^1) + \frac{1}{2}(x^2, y^2)$. Таким образом, точка $(\overline{x}, \overline{y})$ не является вершиной многогранника M.

Известно, что матрица ограничений многогранника M при $\min\{m, n\} < 3$ является вполне унимодулярной [14]. Следовательно, для любого фиксированного λ существует решение (x, y) с целочисленными компонентами x_i, на котором достигается значение $L_2(t, \lambda)$. Таким образом, для любого $t = 1, \ldots, T$ справедливо равенство $Z_C^I(t) = Z_C(t)$. С другой стороны, $Z_C^I(t) = Z^I(t)$ [10]. Следовательно, $Z_C = Z^I$. Утверждение 4 доказано.

Теорема 5. *Для задачи* BP *выполняются соотношения*:

$$Z = Z^B = Z_B, \tag{4.1}$$
$$Z_D = Z^B_D = Z_{BD}, \tag{4.2}$$
$$Z_D = Z^B_{DK} = Z_{DKB}, \tag{4.3}$$
$$Z^I = Z_{DCK} = Z_{DC} = Z_{DK}, \tag{4.4}$$
$$Z^I = Z_{CB} = Z_{DCB} = Z_{CKB} = Z_{DCKB}, \tag{4.5}$$
$$Z^B_C = Z^{BI}. \tag{4.6}$$

Неравенства

$$Z^{BI} \leqslant Z^I, \tag{4.7}$$
$$Z^I \leqslant Z_C, \tag{4.8}$$
$$Z^I \leqslant Z_D, \tag{4.9}$$
$$Z_C \leqslant Z_D, \tag{4.10}$$
$$Z_D \leqslant Z_C \tag{4.11}$$

являются строгими хотя бы для одного входа задачи BP.

Доказательство. Равенства (4.1)–(4.3) непосредственно следуют из избыточности ограничений (B) и доказываются с помощью леммы 1 и следствия 1. Равенства (4.4)–(4.6) следуют из лемм 1 и 2. В качестве примера покажем, что выполняется равенство $Z^I = Z_{DK}$. Рассмотрим соответствующие релаксации:

$$Z^I(t) = \min\{fx + cw + hy\}, \quad (x, w, y) \in P(\mathrm{D,C,K,B,N,F}_t),$$

$$Z_{DK}(t) = \min\{fx + cw + hy\}, \quad (x, w, y) \in P(\mathrm{D,K}) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{C,B,N,F}_t\mathrm{,I}).$$

По лемме 2

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{C,B,N,F}_t\mathrm{,I}) = P(\mathrm{C}) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t\mathrm{,I}).$$

По лемме 1

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{B,N,F}_t\mathrm{,I}) = P(\mathrm{B,N,F}_t).$$

Тогда $P(\mathrm{D,K}) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{C,B,N,F}_t\mathrm{,I}) = P(\mathrm{D,C,K,B,N,F}_t)$ и, следовательно, $Z^I = Z_{DK}$. Остальные равенства доказываются аналогично непосредственной проверкой совпадения соответствующих релаксациям многогранников.

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Рассмотрим задачу ВР на следующих входных данных:

$$f=(2,1),\quad c=(1,1),\quad V=(1,3),\quad d=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$
$$\alpha=(2,1),\quad \beta=(2,2),\quad B=3.$$

Тогда $T=2$, $X_1=\{1\}$, $X_2=\{2\}$. Так как $\beta_1 V_1 = 2 < 3$, задача ВР$_1$ неразрешима. Следовательно, $Z=Z(T)$. Проводя рассуждения, аналогичные тем, что использовались в доказательстве теоремы 3, получаем, что для указанных входных данных любое решение вида

$$x_1=x_2=1,\quad y_{11}=y_{12}=0,\quad y_{21}=y_{22}=1,\quad \frac{1}{2}\leqslant w_1\leqslant 1,\quad \frac{1}{2}\leqslant w_2\leqslant 1,$$

для которого выполнено равенство $w_1+w_2=\frac{3}{2}$, является оптимальным в задаче ВР$_2$. Таким образом, $Z=\frac{13}{2}$.

Поскольку $f_1>f_2$, оптимальное значение целевой функции в сильной линейной релаксации задачи ВР$_2$ равно $Z^I=\frac{11}{2}$ и достигается при

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=1,\quad w_1=\frac{1}{2},\quad w_2=1,\quad y_{11}=y_{12}=0,\quad y_{21}=y_{22}=1.$$

Рассмотрим лагранжеву релаксацию задачи ВР$_2$ относительно ограничений (D):

$$Z_D(2,\lambda)=\min_{(x,w,y)}\sum_{i\in X}\left(f_i x_i + c_i w_i + \sum_{j\in J} h_{ij} y_{ij}\right) + \sum_{j\in J}\lambda_j\left(1-\sum_{i\in X} y_{ij}\right),$$
$$(x,w,y)\in P(\text{C,K,B,N,F}_t\text{,I}),\quad \lambda_j\in\mathbb{R},\ j\in J.$$

Из ограничений (C) следует, что $x_2=1$. Ограничение (K), как и ранее, влечет равенство $w_1+w_2=\frac{3}{2}$. Положим $\lambda=(5,5)$. При таких значениях множителей Лагранжа точка

$$x_1=x_2=1,\quad y_{11}=y_{12}=0,\quad y_{21}=y_{22}=1,\quad w_1=1,\quad w_2=\frac{1}{2}$$

является одним из оптимальных решений рассматриваемой релаксации. Соответствующий данному решению субградиент равен

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1+1\cdot 1+\sum_{j\in J}\lambda_j(1-1)\right]_{\lambda=(5,5)}=(0,0).$$

Следовательно, текущие множители Лагранжа оптимальны. Таким образом, значение $Z_D(2) = \frac{13}{2}$ и неравенство (4.9) выполнено как строгое.

Покажем, что неравенство (4.10) выполняется как строгое. Так как в рассматриваемом примере $m = n = 2$, то по утверждению 4 имеем

$$Z_C = Z^I = \frac{11}{2} < \frac{13}{2} = Z_D.$$

Приведенный выше пример легко модифицировать таким образом, чтобы неравенство (4.7) выполнялось как строгое. Положим $f = (1, 4)$. Легко проверить, что такое изменение входных данных не нарушает оптимальности приведенных выше решений в задаче ВР и ее сильной линейной релаксации. Таким образом, $Z = \dfrac{17}{2}, \quad Z^I = 8$.

Рассмотрим слабую линейную релаксацию задачи ВР$_2$. По утверждению 3 существует оптимальное решение рассматриваемой релаксации, компоненты x_i которого равны $x_1 = w_1$, $x_2 = \dfrac{2 + w_2}{3}$. Непосредственной проверкой несложно убедиться, что решение

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{6}, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{1}{2}, \quad y_{11} = y_{12} = 0, \quad y_{21} = y_{22} = 1$$

является оптимальным в слабой линейной релаксации задачи ВР$_2$. Следовательно, $Z^{BI} = \dfrac{47}{6} < 8$. Таким образом, неравенство (4.7) выполняется как строгое.

Для завершения доказательства покажем, что утверждение теоремы справедливо для соотношения (4.11). Напомним, что при $B = 0$ задача ВР эквивалентна обычной задаче размещения с ограничениями на объемы производства и, следовательно, существуют такие входные данные задачи ВР, что неравенство (4.11) выполняется как строгое [9]. Покажем, что при $B > 0$ также существует пример задачи ВР, обладающий указанным свойством. Рассмотрим следующие входные данные:

$$f = (1, 1, 1), \quad c = (0, 0, 0), \quad V = (4, 4, 4), \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = (1, 1, 1), \quad \beta = (1, 1, 1), \quad B = 1.$$

Для данного примера $T = 1$, $X_1 = \{1, 2, 3\}$. Таким образом, $Z = Z(1)$. Заметим, что для приведенных входных данных ограничения (C) в задаче ВР$_1$ являются избыточными. Действительно, пусть для некоторого

номера i

$$w_i = 1, \quad y_{i1} = y_{i2} = y_{i3} = 1.$$

Тогда из ограничений (B) следует, что $x_i = 1$ и, следовательно, ограничения (C) выполняются. В силу избыточности ограничений (C) для рассматриваемого примера справедливы соотношения

$$Z = Z^C = Z_C, \quad Z_D = Z_D^C = Z_{DC}.$$

По ранее доказанному $Z_{DC} = Z^I$. Таким образом, достаточно показать, что $Z^I < Z$. Заметим, что для выполнения работ и погашения кредита достаточно одного типа изделий. Нетрудно проверить, что такое решение будет оптимальным в задаче BP_1. Таким образом, $Z = 2$. Исключая из задачи BP_1 условие целочисленности (I) получаем, что любое допустимое такое решение линейной релаксации, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, \quad y_{ij} = 0, \, i = j,$$

является оптимальным. Следовательно, $Z_D = \frac{3}{2} < 2 = Z_C$. Кроме того, поскольку для данного примера $Z_D = Z^I$, имеем неравенство $Z^I < Z_C$. Следовательно, неравенства (4.11) и (4.8) выполняются как строгие. Теорема 5 доказана.

5. Верхние оценки

Для построения приближенных решений задачи BP можно использовать, например, оптимальные решения линейных релаксаций семейства $\{\mathrm{BP}_t\}_{t=1}^T$. Пусть $t^* = \arg\min Z^I(t)$. Рассмотрим линейную релаксацию задачи BP_{t^*} и ее оптимальное решение (x^*, w^*, y^*). Поскольку x^* может содержать дробные компоненты, это решение может быть недопустимым для задачи BP_{t^*}. Однако оно может быть легко достроено до допустимого. Действительно, положим $\overline{x}_i = \lceil x_i^* \rceil, \ i \in X$. Тогда решение $(\overline{x}, w^*, y^*)$ является допустимым в задаче BP_{t^*} и в силу утверждений 1–3 может быть преобразовано в допустимое решение $(\overline{x}, \overline{v}, y^*, w^*)$ задачи BP, если положить

$$\overline{v}_i = \overline{w}_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \overline{y}_{ij}, \ i \in X.$$

Очевидно, что значение целевой функции (1.1) на данном решении является верхней оценкой для величины Z.

Рассмотрим другой способ получения верхних границ для задачи ВР. Зафиксируем некоторый номер $t = 1, \ldots, T$ и соответствующее ему множество $X_t = \{s, \ldots, r\}$. Перепишем задачу ВР$_t$ в следующем эквивалентном виде: найти

$$Z(t) = \min_{(x,w,y)} \sum_{i<s}(f_i x_i + c_i w_i) + \sum_{i\in X_t}\left(f_i x_i + c_i w_i + \sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij}\right) + \sum_{i>r}(f_i x_i + \sum_{j\in J} h_{ij} y_{ij}) \quad (5.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i\geqslant s} y_{ij} = 1,\ j \in J, \quad (5.2)$$

$$w_i \leqslant V_i x_i, \quad i < s \quad (5.3)$$

$$\sum_{j\in J} p_{ij} y_{ij} + w_i \leqslant V_i x_i, \quad i \in X_t, \quad (5.4)$$

$$\sum_{j\in J} p_{ij} y_{ij} \leqslant V_i x_i,\ i > r, \quad (5.5)$$

$$\sum_{i\leqslant r} \beta_i w_i = B, \quad (5.6)$$

$$y_{ij} \leqslant x_i,\ i \in X, j \in J, \quad (5.7)$$

$$y_{ij} = 0,\ i < s, j \in J, \quad (5.8)$$

$$w_i = 0,\ i > r, \quad (5.9)$$

$$y_{ij} \geqslant 0,\ w_i \geqslant 0,\ i \in X, j \in J, \quad (5.10)$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i \in X. \quad (5.11)$$

Пользуясь аддитивностью целевой функции (5.1), получим задачу минимизации выпуклой кусочно-линейной функции [2]:

$$Z(t) = \min_{w_i\geqslant 0,\, i\in X_t} \left\{Q_1(t,w) + Q_2(t,w) + \sum_{i\in X_t} c_i w_i\right\},$$

где $Q_1(t,w)$ — оптимальное значение целевой функции задачи о ранце с доплатами ЗРД$_t$ [12]: найти

$$Q_1(t,w) = \min_v \sum_{i<s}(f_i \mathrm{sign}(v_i) + c_i v_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i\leqslant r}\beta_i v_i = B, \quad 0\leqslant v_i\leqslant V_i,\, i<s, \quad v_i = w_i,\, i\in X_t,$$

а $Q_2(t,w)$ — оптимальное значение целевой функции следующей задачи размещения с ограничениями на мощности производства ОЗР$_t$ [17]: найти

$$Q_2(t,w) = \min_{x,y}\sum_{i\geqslant s}\{f_i x_i + \sum_{j\in J} h_{ij}y_{ij}\}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\geqslant s} y_{ij} = 1,\, j\in J,$$
$$\sum_{j\in J} p_{ij}y_{ij}\leqslant V_i x_i,\, i>r,$$

$$\sum_{j\in J} p_{ij}y_{ij} + w_i\leqslant V_i x_i,\, i\in X_t,$$
$$0\leqslant y_{ij}\leqslant x_i,\, i\geqslant s, j\in J,$$
$$x_i\in\{0,1\},\, i\geqslant s.$$

Таким образом, задача ВР$_t$ может быть представлена в виде задачи отыскания оптимального распределения изделий, использующихся одновременно для выполнения работ и погашения кредита. Это свойство может быть использовано для получения верхних оценок в задаче ВР. Опишем схему вычислений на примере линейных релаксаций.

Пусть t^* имеет тот же смысл, что и ранее. Рассмотрим линейную релаксацию задачи ВР$_{t^*}$ и ее оптимальное решение (x^*, w^*, y^*). Решение (x^*, w^*, y^*) удовлетворяет всем ограничениям задачи ВР$_{t^*}$ за исключением, быть может, ограничения (I). Следовательно, задачи ЗРД$_{t^*}$ и ОЗР$_{t^*}$ разрешимы. По оптимальным решениям данной пары задач, используя утверждения 1–3, достаточно просто построить допустимое решение задачи ВР. Нетрудно проверить, что

$$Q_1(t^*,w^*) + Q_2(t^*,w^*) + \sum_{i\in X_{t^*}} c_i w_i^* \geqslant Z(t^*)\geqslant Z.$$

Отметим, что задачи ЗРД$_{t^*}$ и ОЗР$_{t^*}$ являются NP–трудными [12, 8]. Поэтому с точки зрения практического использования данного метода получения верхней оценки для оптимального значения целевой функции

задачи ВР разумно применять приближенные алгоритмы. В частности, для решения задачи ОЗР$_{t^*}$ можно использовать гибридный жадный алгоритм из [6, 7]. Однако в примерах с большим разрывом двойственности [7, 13, 14] верхняя оценка, получаемая этим алгоритмом, может быть довольно грубой. Кроме того, задача ОЗР$_{t^*}$ является APX-полной [8], что является препятствием для построения решений с гарантированной оценкой точности. По этим причинам приемлемым выходом из ситуации может быть использование приближенных эвристических алгоритмов, основанных на методах локального поиска [3, 16], для которых наблюдается хорошее, в среднем, качество получаемых приближенных решений [3, 7].

6. Заключение

В работе рассматривается задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием и ограничениями на объемы производства. Эта задача формулируется в виде задачи двухуровнего программирования. Предлагается полиномиальное сведение двухуровневой задачи к семейству одноуровневых задач частично-целочисленного программирования. Данное сведение используется для нахождения нижних и верхних оценок для оптимального значения целевой функции двухуровневой задачи. Проведено сравнение качества полученных нижних оценок. Установлено, что величина относительного разрыва двойственности для двухуровневой задачи может быть сколь угодно близкой к единице. Приводится способ построения входных данных задачи с любой наперед заданной величиной разрыва двойственности. Предложен способ вычисления верхних оценок для исследуемой задачи, что позволяет построить приближенный алгоритм решения задачи с апостериорной оценкой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Иваненко Д. С., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимая задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием // Математическое программирование и приложения. Екатеринбург, 2003. С. 120–121.
3. **Кочетов Ю. А.** Вероятностные методы локального поиска для задач дискретной оптимизации // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Часть I. М: МГУ, 2001. С. 87–117.

4. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 2. С. 23–33.

5. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 78–96.

6. **Пащенко М. Г.** Лагранжевы эвристики для задачи размещения с ограничениями на мощности // Труды XI международной Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 1998. С. 175–178.

7. Электронная библиотека тестовых примеров «Дискретные задачи размещения». (http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html).

8. **Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., Kann V., Marchetti-Spaccamela A., Protasi M.** Complexity and approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

9. **Cornuejols G., Sridharan R., Thizy J. M.** A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem // European J. Oper. Res. 1991. V. 50, N 3. P. 280–297.

10. **Geoffrion A.** Lagrangean relaxation for integer programming // Math. Programming Study. 1974. V. 2. P. 82–114.

11. **Guha S., Khuller S.** Greedy strikes back: improved facility location algorithms // Proceedings of the ninth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms. New York: ACM, 1998. P. 649–657.

12. **Hirsch W. M., Dantzig G. B.** The fixed charge problem // Naval Res. Logist. Quart. 1968. V. 15, N 3. P. 413–424.

13. **Kochetov Yu., Ivanenko D.** Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem // Proceedings of the 5th Metaheuristics international conference. Kioto, 2003. P. 41.1–41.6.

14. **Krarup J., Pruzan P. M.** The Simple plant locatoin problem // European J. Oper. Res. 1983. V. 12, N 1. P. 36–81.

15. **Nemhauser G., Wolsey L.** Integer and combinatorial optimization. New York: John Wiley & Sons, 1988.

16. Essays and surveys in metaheuristics. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.

17. Sridharam R. The capacitated plant location problem // European J. Oper. Res. 1995. V. 87. P. 203–213.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия.
E-mail: ivanen@math.nsc.ru,
apljas@math.nsc.ru,

Статья поступила
5 июля 2004 г.