ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2005. Серия 1. Том 12, № 1, 101–118

УДК 519.716

КОНЕЧНАЯ ПОРОЖДАЕМОСТЬ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*)

С. С. Марченков

Предложено новое доказательство конечной порождаемости всех замкнутых классов булевых функций. Отличительный момент доказательства состоит в построении стандартных мажоритарных функций в замкнутых классах из бесконечных цепочек и использовании свойства мажоритарности в определении всех замкнутых классов этого вида.

Э. Посту [9, 10] принадлежит замечательный результат в теории булевых функций. Он описал все замкнутые (относительно суперпозиции) классы булевых функций и доказал, что каждый из этих классов порождается конечной системой функций.

Начиная с середины 1960-х годов результаты Поста неоднократно переизлагались [8, 6, 1, 4, 11, 3] (в книге [3] приведено развернутое изложение доказательства из [4]). Из сравнения имеющихся доказательств видно, что ключевой момент доказательств состоит в описании и анализе всех замкнутых классов из бесконечных цепочек. В работе [2] конечная порождаемость этих (а также некоторых других) замкнутых классов выводится из принадлежности классам мажоритарных функций с использованием интерполяционной теоремы Бейкера–Пиксли [7]. Вместе с тем следует отметить, что непосредственное применение теоремы Бейкера–Пиксли не позволяет, например, описывать все замкнутые классы, содержащие мажоритарные функции.

В настоящей статье мы доводим основную идею из [2] до построения всех замкнутых классов из бесконечных цепочек, содержащих можоритарные функции, и в этих замкнутых классах определяем конечные порождающие системы функций. При этом мы не пользуемся теоремой Бейкера–Пиксли, а в качестве стандартных мажоритарных функций выбираем хорошо известные функции $d_m(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} x_i x_j$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00783).

Центральными в статье являются леммы 6 и 7. Именно они обеспечивают конечную порождаемость всех замкнутых классов из бесконечных цепочек. Оставшаяся конечная часть замкнутых классов может быть рассмотрена различными способами. Для полноты изложения мы приводим для них доказательства, которые в той или иной степени использовались другими авторами.

1. Предварительные сведения

Мы предполагаем известными основные понятия, относящиеся к булевым функциям (см., например, гл. I книги [5]). Часть сведений из [5] будет приведена ниже.

Обозначим через P_2 множество всех булевых функций. Так же, как в [5], любая булева функция рассматривается с точностью до несущественных переменных. Если $Q \subseteq P_2$, то пусть $[Q]$ есть замыкание (относительно суперпозиции) множества Q. Если $Q = [Q]$, то Q называется *замкнутым множеством* (*классом*). Пусть Q — замкнутый класс и $R \subseteq Q$. Множество R называется *полным* в Q, если $[R] = Q$. В этом случае принято также говорить, что множество R порождает класс Q. Замкнутый класс Q называется *конечно порождаемым,* если он порождается конечным множеством функций. Вместо $[\{f_1, \ldots, f_r\}]$ далее пишем $[f_1, \ldots, f_r]$.

Пусть T_0, T_1, S, L, M суть соответственно замкнутые классы всех функций, сохраняющих 0, сохраняющих 1, самодвойственных, линейных и монотонных. Имеет место следующий критерий полноты в классе P_2.

Теорема П1. *Система булевых функций полна в классе P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, L, M.*

Из теоремы П1 следует, что произвольный замкнутый класс, отличный от P_2, целиком входит в один из классов T_0, T_1, S, L, M.

Одним из этапов в доказательстве критерия полноты является доказательство леммы о нелинейной функции [5]. Мы ее приведем в следующей форме (см. [3]).

Лемма П1. *Из нелинейной функции путем подстановки константы 0 и переменных x, y можно получить нелинейную функцию от переменных x, y.*

Положим (обозначения взяты из [4, 3])

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, M_0 = M \cap T_0, M_1 = M \cap T_1, M_{01} = M \cap T_{01}, S_{01} = S \cap T_{01},$$
$$SM = S \cap M, L_0 = L \cap T_0, L_1 = L \cap T_1, SL = S \cap L, L_{01} = L \cap T_{01}.$$

Известная теорема о разложении булевой функции по переменной [5] для монотонных функций имеет следующий вид.

Теорема П2. *Если* $f(x_1,\ldots,x_n) \in M$ *и* $1 \leqslant i \leqslant n$, *то*

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = x_i \cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) \vee f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

В качестве следствия из нее легко выводится, что

$$M = [0,1,x\vee y,xy],\ M_0 = [0,x\vee y,xy],\ M_1 = [1,x\vee y,xy],\ M_{01} = [x\vee y,xy].$$

Через f^* обозначается функция, двойственная к функции f.

Теорема П3 (принцип двойственности). *Если формула* $\Phi(f_1,\ldots,f_s)$, *содержащая только функции* $f_1,\ldots,f_s$, *реализует функцию* f, *то формула* $\Phi(f_1^*,\ldots,f_s^*)$, *полученная из формулы* $\Phi(f_1,\ldots,f_s)$ *заменой функций* $f_1,\ldots,f_s$ *соответственно функциями* $f_1^*,\ldots,f_s^*$, *реализует функцию* f^*.

У любой функции из класса T_0 свободный член в полиноме Жегалкина равен 0. Поэтому $T_0 = [x+y,xy]$, где $+$ есть сложение по модулю 2. Из соотношений

$$x+y = x\bar{y} \vee \bar{x}y, \quad xy = \overline{\bar{x}\bar{y}}y$$

следует также, что $T_0 = [x \vee y, x\bar{y}]$. В силу принципа двойственности получаем аналогичные соотношения для класса T_1:

$$T_1 = [x+y+1, x\vee y] = [x \vee \bar{y}, xy].$$

Покажем, что

$$T_{01} = [x \vee y\bar{z}, xy].$$

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in T_{01}$. Из соотношений $T_{01} \subset T_1$ и $(x \vee \bar{y}) \in [1, x \vee y\bar{z}]$ следует, что найдется формула над множеством функций $\{1, x\vee y\bar{z}, xy\}$, которая реализует функцию f. В этой формуле константу 1 всюду заменим функцией $x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Получим формулу Φ над множеством функций $\{x \vee y\bar{z}, xy\}$ (очевидно, что $x \vee y = x \vee y\bar{x}$). Пользуясь тем, что каждая из функций $f, x\vee y\bar{z}, xy$ сохраняет 0, заключаем, что формула Φ реализует функцию f. Таким образом, $f \in [x \vee y\bar{z}, xy]$.

Обозначим через U множество всех булевых функций, которые существенно зависят не более чем от одной переменной, а через C множество всех функций, которые не имеют существенных переменных (константы). Легко видеть, что U, C суть замкнутые классы. Положим

$$U_0 = U \cap T_0, \quad U_1 = U \cap T_1, \quad MU = M \cap U, \quad SU = S \cap U,$$

$$U_{01} = U \cap T_{01}, \quad C_0 = C \cap T_0, \quad C_1 = C \cap T_1.$$

Следующая теорема легко доказывается рассмотрением всех функций от одной переменной.

Теорема П4. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе U, совпадает с одним из следующих классов*:

$$U = [0, \bar{x}], \quad U_0 = [0, x], \quad U_1 = [1, x], \quad MU = [0, 1, x], \quad SU = [\bar{x}],$$
$$U_{01} = [x], \quad C = [0, 1], \quad C_0 = [0], \quad C_1 = [1].$$

Обозначим через D множество всех дизъюнкций, т. е. множество всех функций f, представимых в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \vee a_1 x_1 \vee \dots \vee a_n x_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ и $n \geqslant 1$. Двойственным образом определяется множество K всех конъюнкций. Легко видеть, что множества D и K являются замкнутыми классами.

Положим

$$D_0 = D \cap T_0, \quad D_1 = D \cap T_1, \quad D_{01} = D \cap T_{01},$$
$$K_0 = K \cap T_0, \quad K_1 = K \cap T_1, \quad K_{01} = K \cap T_{01}.$$

Теорема П5. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в одном из классов D, K и не содержащийся в классе U, совпадает с одним из следующих классов*:

$$D = [0, 1, x \vee y], \quad D_0 = [0, x \vee y], \quad D_1 = [1, x \vee y], \quad D_{01} = [x \vee y],$$
$$K = [0, 1, xy], \quad K_0 = [0, xy], \quad K_1 = [1, xy], \quad K_{01} = [xy].$$

Доказательство теоремы П5 нетрудно получить из определений классов D и K.

Теорема П6. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе L и не содержащийся в классе U, совпадает с одним из следующих классов*:

$$L = [1, x + y], \quad L_0 = [x + y], \quad L_1 = [x + y + 1],$$
$$SL = [x + y + z + 1], \quad L_{01} = [x + y + z].$$

Доказательство теоремы П6 можно получить, руководствуясь следующими соображениями. Из любой линейной функции, существенно

зависящей не менее чем от двух переменных, отождествлением переменных можно получить одну из функций вида $x+y+a$, $x+y+z+a$, где $a \in \{0,1\}$. Линейная функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда она существенно зависит от нечетного числа переменных. Всякая функция из класса L_{01} представима в виде суммы нечетного числа (существенных) переменных.

2. Замкнутые классы, лежащие в классах S, O^∞ и I^∞

Положим $m(x,y,z) = xy \vee xz \vee yz$. Функция $m(x,y,z)$ самодвойственна, монотонна и нелинейна.

Лемма 1. *Пусть $f \in S \setminus L$. Тогда отождествлением и перестановкой переменных из функции f можно получить одну из функций*

$$m(x,y,z), \quad m(x,y,\bar{z}), \quad m(x,\bar{y},\bar{z}), \quad m(\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

Доказательство. Согласно лемме П1 подстановкой константы 0 и переменных y, z из функции f можно получить нелинейную функцию от двух переменных. Если вместо константы 0 в функцию f всюду подставить переменную x, то получим самодвойственную нелинейную функцию $g(x,y,z)$. Все нелинейные функции $g(0,y,z)$ суть

$$yz,\ yz+1,\ yz+y,\ yz+y+1,\ yz+z,\ yz+z+1,\ yz+y+z,\ yz+y+z+1.$$

Им отвечают соответствующие функции $g(x,y,z)$:

$$m(x,y,z), \quad m(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \quad m(x,y,\bar{z}), \quad m(\bar{x},\bar{y},z), \quad m(x,\bar{y},z),$$
$$m(\bar{x},y,\bar{z}), \quad m(\bar{x},y,z), \quad m(x,\bar{y},\bar{z}).$$

Лемма 1 доказана.

Назовем *x_i-компонентой* функции $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ функцию $f(x_1,\ldots,\ x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$ и *$\bar{x}_i$-компонентой* — функцию $f(x_1,\ldots,$ $x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Доказательство леммы 2 близко к доказательствам аналогичных утверждений из [6].

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$S = [m(x,\bar{y},\bar{z})] = [m(\bar{x},\bar{y},\bar{z})], \quad S_{01} = [m(x,y,\bar{z})], \quad SM = [m(x,y,z)].$$

Доказательство. Так как $m(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = m(x,\bar{x},\bar{x}) = \bar{x}$, то ограничимся доказательством равенства $S = [m(x,\bar{y},\bar{z})]$. Заметим, что $\bar{x}$-компонента

функции $m(x,\bar{y},\bar{z})$ есть $\bar{y}\bar{z}$ (стрелка Пирса), которая образует полную в P_2 систему. Следовательно, если $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция из S, то суперпозициями функции $m(0,\bar{y},\bar{z})$ можно получить $\bar{x}_1$-компоненту функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. Заменяя в этих суперпозициях константу 0 всюду переменной x_1, в силу включения $f\in S$ получаем функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Для доказательства равенства $S_{01}=[m(x,y,\bar{z})]$ заметим, что $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компоненты функции $m(x,y,\bar{z})$ суть соответственно $y\bar{z}$ и $x\vee y$. Как отмечалось в разд. 1, система $\{y\bar{z},x\vee y\}$ порождает класс T_0. Следовательно, $\bar{x}_1$-компоненту произвольной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из класса S_{01} можно получить суперпозициями $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компонент функции $m(x,y,\bar{z})$. Далее, заменяя в этих суперпозициях константу 0 всюду переменной x_1, получаем функцию f.

Покажем, что $SM=[m(x,y,z)]$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in SM$ и $n\geqslant 3$. Обозначим переменные $x_4,\ldots,x_n$ через $\tilde{x}$. Докажем, что справедливо тождество

$$f(x_1,x_2,x_3,\tilde{x})\equiv m(f(x_1,x_1,x_3,\tilde{x}),f(x_1,x_2,x_2,\tilde{x}),f(x_3,x_2,x_3,\tilde{x})).$$

Ввиду включения $f\in S$ тождество достаточно проверить лишь при $x_1=0$. Заметим, что в силу монотонности функции f выполняются неравенства

$$f(0,0,0,\tilde{x})\leqslant f(0,0,x_3,\tilde{x})\leqslant f(x_3,0,x_3,\tilde{x}).$$

Поэтому при $x_2=0$ получаем

$$m(f(0,0,x_3,\tilde{x}),f(0,0,0,\tilde{x}),f(x_3,0,x_3,\tilde{x}))=f(0,0,x_3,\tilde{x}).$$

Аналогично, из неравенств

$$\begin{gathered}f(0,0,x_3,\tilde{x})\leqslant f(0,1,1,\tilde{x})\leqslant f(1,1,1,\tilde{x}),\\ f(0,0,x_3,\tilde{x})\leqslant f(x_3,1,x_3,\tilde{x}),\quad f(0,1,0,\tilde{x})\leqslant f(0,1,1,\tilde{x})\end{gathered}$$

следует, что при $x_2=1$ справедливо равенство

$$m(f(0,0,x_3,\tilde{x}),f(0,1,1,\tilde{x}),f(x_3,1,x_3,\tilde{x}))=f(0,1,x_3,\tilde{x}).$$

Остается заметить, что в классе S нет функций, существенно зависящих от двух переменных. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе S и не содержащийся в классе L, совпадает с одним из классов*

S, S_{01}, SM.

Доказательство. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq S$ и $F \nsubseteq L$. Из включений $SM \subset S_{01} \subset S$ и лемм 1, 2 следует, что $SM \subseteq F$. Поэтому если $F \subseteq M$, то $F = SM$.

Предположим, что F содержит немонотонную функцию f. Согласно известной лемме о немонотонной функции [5] подстановкой констант 0, 1 и переменной z из f можно получить немонотонную функцию $\bar{z}$. Если вместо констант 0,1 всюду подставить соответственно переменные x, y, то получим немонотонную (по переменной z) функцию $g(x, y, z)$ из класса S. Все такие функции $g(x, y, z)$ суть

$$m(x,y,\bar{z}),\ m(x,\bar{y},\bar{z}),\ m(\bar{x},y,\bar{z}),\ m(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\ \bar{z},\ x+y+z+1,\ x+y+z.$$

Во всех случаях в классе F легко определяется функция $m(x, y, \bar{z})$ (в последнем случае имеем $m(x, y, \bar{z}) = m(x, y, z) + y + z$). Значит, в силу леммы 2 получаем $S_{01} \subseteq F$. Если при этом $F \subseteq T_{01}$, то $F = S_{01}$. В противном случае в классе F содержится функция, не сохраняющая 0. Из нее отождествлением переменных можно получить функцию $\bar{x}$. Остается заметить, что согласно лемме 2 $[\bar{x}, m(x, y, z)] = S$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через O^∞ множество всех булевых функций, которые обладают следующим свойством: все наборы, на которых функция принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту. Двойственным образом (с заменой 0 на 1) определяется множество I^∞. Несложно проверить, что O^∞, I^∞ — замкнутые классы.

Из определения множества O^∞ следует, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству O^∞ тогда и только тогда, когда для некоторого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется соотношение

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = x_i \vee f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n). \tag{1}$$

Лемма 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in O^\infty \setminus D$. Тогда в зависимости от того, какое из соотношений*

$$f \notin T_0, \quad f \in T_0 \setminus M \text{ или } f \in M \tag{2}$$

выполняется, множество $[f]$ содержит либо функцию $x \vee \bar{y}$, либо $x \vee y\bar{z}$, либо $x \vee yz$.

Доказательство. Пусть, например, для функции f справедливо представление (1) при $i = 1$. Положим

$$g(x_2,\ldots,x_n) = f(0,x_2,\ldots,x_n).$$

Из $f \notin D$ следует, что $g \notin D$.

Пусть $g \notin M$ и, например, $g(x_2, \ldots, x_n)$ немонотонна по переменной x_n. Тогда найдется такой набор $(a_2, \ldots, a_{n-1})$, что $g(a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n) = \bar{x}_n$. В функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменную x_1 и все переменные x_i, для которых $a_i = 0$, заменим переменной x, все переменные x_j, для которых $a_j = 1$, — переменной y, переменную x_n — переменной z. Получим функцию $h(x, y, z)$ из класса O^∞ такую, что

$$h(x, y, z) = x \vee h(0, y, z) \text{ и } h(0, 1, z) = \bar{z}.$$

Функция $h(0, y, z)$ может совпадать лишь с одной из функций $\bar{z}$, $\bar{y} \vee \bar{z}$, $y\bar{z}$, $y\bar{z} \vee \bar{y}z$. Если $f \notin T_0$, то, очевидно, $h(0, y, z) \notin T_0$. Поэтому $h(0, y, z) \in \{\bar{z}, \bar{y} \vee \bar{z}\}$. В этих случаях получаем $h(x, y, y) = x \vee \bar{y}$. Если $f \in T_0$, то также $h(0, y, z) \in T_0$. Значит,

$$h(0, y, z) \in \{y\bar{z}, y\bar{z} \vee \bar{y}z\}.$$

Если $h(0, y, z) = y\bar{z}$, то $h(x, y, z) = x \vee y\bar{z}$, а если $h(0, y, z) = y\bar{z} \vee \bar{y}z$, то

$$h(x, y, x) = x \vee y, \quad h(x, y \vee z, z) = x \vee y\bar{z}.$$

Пусть теперь $g \in M$. Так как $g \notin D$, то g, в частности, отлична от константы. Будем предполагать, что $g(x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех переменных. Из условий $g \in M$ и $g \notin D$ следует, что $n \geqslant 3$ и g принимает значение 0 на некотором наборе с одной единичной компонентой. Пусть, например, им является набор $(1, 0, \ldots, 0)$. Пользуясь монотонностью функции $g(x_2, \ldots, x_n)$ и существенной зависимостью от переменной x_2, заключаем, что для некоторого набора $(a_3, \ldots, a_n)$ выполняется равенство $g(x_2, a_3, \ldots, a_n) = x_2$. Из условия $g(1, 0, \ldots, 0) = 0$ следует, что $(a_3, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Будем считать, что $a_3 = \ldots = a_t = 1$ и $a_{t+1} = \ldots = a_n = 0$ $(t \geqslant 3)$. В функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменные $x_1, x_{t+1}, \ldots, x_n$ заменим переменной x, переменную x_2 — переменной y и переменные $x_3, \ldots, x_t$ — переменной z. Тогда, как нетрудно видеть, получится функция $x \vee yz$. Лемма 3 доказана.

Следствие. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin O^\infty$ и $f \neq 0$. Тогда в зависимости от того, какое из соотношений в (2) справедливо, множество $[x \vee y, f]$ содержит либо функцию $x \vee \bar{y}$, либо $x \vee y\bar{z}$, либо $x \vee yz$.*

Доказательство. Положим

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = f(x_1, \ldots, x_n) \vee y.$$

Очевидно, что $g \in [x \vee y, f]$ и $g \in O^\infty \setminus D$. Далее замечаем, что из соотношений (2) следуют соотношения

$$g \notin T_0, \quad g \in T_0 \setminus M, \quad g \in M.$$

Остается применить лемму 3.

Положим

$$O_0^\infty = O^\infty \cap T_0, \quad MO^\infty = M \cap O^\infty, \quad MO_0^\infty = M \cap O_0^\infty,$$
$$I_1^\infty = I^\infty \cap T_1, \quad MI^\infty = M \cap I^\infty, \quad MI_1^\infty = M \cap I_1^\infty.$$

Лемма 4. *Справедливы соотношения*

$$O^\infty = [x \vee \bar{y}],\ O_0^\infty = [x \vee y\bar{z}],\ MO^\infty = [1, x \vee yz],\ MO_0^\infty = [x \vee yz],$$

$$I^\infty = [x\bar{y}],\ I_1^\infty = [x(y \vee \bar{z})],\ MI^\infty = [0, x(y \vee z)],\ MI_1^\infty = [x(y \vee z)].$$

Доказательство. Рассмотрим класс O^∞. Заметим, что функция $x \vee \bar{y}$ вместе со своей $\bar{x}$-компонентой образует полную в P_2 систему. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in O^\infty$ и, например, равенство (1) выполняется при $i = 1$. Суперпозициями функции $x \vee \bar{y}$ и ее $\bar{x}$-компоненты образуем функцию $\bar{f}(0, x_2, \ldots, x_n)$. Заменяя всюду в этих суперпозициях константу 0 переменной x_1, получим такую функцию $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $[x \vee \bar{y}]$, что

$$f_1(0, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Понятно, что функция f получается подстановкой функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменной y в функцию $x_1 \vee \bar{y}$.

Рассмотрим класс O_0^∞. Здесь $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компоненты функции $x \vee y\bar{z}$ образуют систему, полную в классе T_0. Далее берем функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса O_0^∞, предполагаем, что равенство (1) выполняется при $i = 1$, и суперпозициями $\bar{x}$- и $\bar{z}$-компонент функции $x \vee y\bar{z}$ получаем функцию $f(0, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащую классу T_0. Пусть функция $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $[x \vee y\bar{z}]$ образуется аналогичными суперпозициями, когда всюду вместо константы 0 берется переменная x_1. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \vee f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

В случае класса MO_0^∞ полную в классе M_{01} систему образует функция $x \vee yz$ вместе со своей $\bar{x}$-компонентой. Далее продолжаем, как и выше, отдельно рассматривая подслучай, когда функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса MO_0^∞ равна некоторой из своих переменных.

При переходе к классу MO^∞ необходимо заметить, что класс MO^∞ отличается от класса MO_0^∞ только наличием константы 1.

Утверждения для классов $I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty$ получаем с использованием принципа двойственности. Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе O^∞ и не содержащийся в классе D, совпадает с одним из классов O^∞, O_0^∞, MO^∞, MO_0^∞. Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе I^∞ и не содержащийся в классе K, совпадает с одним из классов I^∞, I_1^∞, MI^∞, MI_1^∞.*

Доказательство. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq O^\infty$ и $F \not\subseteq D$. Если $F \subseteq M$, то в силу леммы 3 имеем $(x \vee yz) \in F$. Поэтому при $F \subseteq T_0$ получаем $F = MO_0^\infty$. Если же $F \not\subseteq T_0$, то из соотношения $F \subseteq M$ легко следует, что $1 \in F$. Далее применяем лемму 4 и приходим к равенству $F = MO^\infty$.

Пусть $F \not\subseteq M$. Из леммы 3 следует, что в классе F содержится одна из функций $x \vee \bar{y}$, $x \vee y\bar{z}$. При $(x \vee \bar{y}) \in F$ согласно лемме 4 получаем, что $F = O^\infty$. Предположим, что $(x \vee y\bar{z}) \in F$. В случае $F \subseteq T_0$ лемма 4 приводит к равенству $F = O_0^\infty$. Если же $F \not\subseteq T_0$, то ввиду соотношения $F \subseteq O^\infty$ классу F принадлежит константа 1. Подстановка 1 в функцию $x \vee y\bar{z}$ дает функцию $x \vee \bar{z}$. Теорема 2 доказана.

3. Замкнутые классы, лежащие в классах T_1 и T_0

Лемма 5. *Пусть $f_1 \in T_1 \setminus S$ и $f_2 \in T_1 \setminus L$. Тогда множество $[f_1, f_2]$ содержит хотя бы одну из функций $x \vee y, xy$.*

Доказательство. Из условия $f_1(x_1, \ldots, x_n) \notin S$ следует, что для некоторого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ выполняется равенство

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_1(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n).$$

Заменим в функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ переменной x все переменные x_i, для которых $a_i = 0$, и переменной y все остальные переменные. Получим функцию $g_1(x, y)$, которая, очевидно, принадлежит множеству $T_1 \setminus S$. Поэтому

$$g_1(x, y) \in \{1,\ x \vee y,\ xy,\ x + y + 1,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee y\}.$$

В последних трех случаях функция $g_1(x, x)$ есть константа 1. Таким образом, в множество $[f_1]$ входит одна из функций $1, x \vee y, xy$.

Если $1 \in [f_1]$, то согласно лемме, двойственной к лемме П1, подстановкой константы 1 и переменных x, y из функции f_2 можно получить нелинейную функцию $g_2(x, y)$. Понятно, что $g_2 \in T_1$. Поэтому

$$g_2(x, y) \in \{x \vee y,\ xy,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee y\}.$$

Однако функция $x \vee y$ порождается функцией $x \vee \bar{y}$. Лемма 5 доказана.

Пусть $z(f)$ равно числу элементов в наименьшем множестве наборов, на которых функция f обращается в 0 и которые не имеют общей нулевой компоненты.

Лемма 6 представляет собой усиление леммы 9 из [2].

Лемма 6. *Пусть $f \notin O^\infty$ и $f \neq 0$. Тогда множество $[x \vee y, f]$ содержит функцию d_m, где $m \leqslant \max(2, z(f))$.*

Доказательство. Из условия $f(x_1, \ldots, x_n) \notin O^\infty$ следует, что для всякого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, найдется такой набор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, что $a_i = 1$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Пусть $\{a^1, \ldots, a^m\}$ — наименьшее множество наборов, в котором при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, содержится набор a с указанным свойством. Очевидно, что $m \leqslant n$.

Если $m = 1$, то $f(1, \ldots, 1) = 0$ и $f(x, \ldots, x) \in \{0, \bar{x}\}$. В случае $f(x, \ldots, x) = 0$ применяем следствие из леммы 3 и получаем функцию d_2. При $f(x, \ldots, x) = \bar{x}$ система $\{x \vee y, f\}$ полна в P_2 и, следовательно, вновь $d_2 \in [x \vee y, f]$.

Пусть $m \geqslant 2$. Заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в которой по строкам расположены элементы наборов $a^1, a^2, \ldots, a^m$, не содержит нулевых столбцов, но после удаления любой строки такой столбец появляется. Значит, в матрице (3) можно так переставить столбцы, что образуется матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{m+1}^1 & \ldots & b_n^1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{m+1}^2 & \ldots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{m+1}^m & \ldots & b_n^m \end{pmatrix} \tag{4}$$

(напомним, что $m \leqslant n$). Обозначим через $g(x_1, \ldots, x_n)$ функцию, которая получается из функции f в результате соответствующей перестановки

переменных. По определению функция g принимает значение 0 на всех наборах, образующих строки матрицы (4).

Далее из функций $x \vee y, g$ мы хотим получить функцию h от m переменных, которая принимает значение 0 на всех наборах с одной единичной компонентой. Если $m = n$, то в качестве функции h можно взять функцию g. Пусть $m < n$. Для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n - m$, суперпозициями функции $x \vee y$ определим функцию

$$h_i(x_1, \ldots, x_m) = b^1_{m+i} x_1 \vee b^2_{m+i} x_2 \vee \ldots \vee b^m_{m+i} x_m$$

(определение функции h_i корректно, покольку $(b^1_{m+i}, \ldots, b^m_{m+i}) \neq (0, \ldots, 0)$). Тогда можно положить

$$h(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_m, h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, h_{n-m}(x_1, \ldots, x_m)).$$

Пользуясь следствием из леммы 3 и леммой 4, в классе $MO_0^\infty \subseteq [x \vee y, f]$ выберем функцию $y \vee d_m(x_1, \ldots, x_m)$. Если $h(0, \ldots, 0) = 0$, то функция d_m получается из последней функции подстановкой функции $h(x_1, \ldots, x_m)$ вместо переменной y.

Пусть $h(0, \ldots, 0) = 1$. Как и в предыдущем случае, образуем функцию

$$h_1(x_1, \ldots, x_m) = h(x_1, \ldots, x_m) \vee d_m(x_1, \ldots, x_m).$$

Ясно, что

$$h_1(x_1 \vee h_1(x_1, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m) = d_m(x_1, \ldots, x_m).$$

Лемма 6 доказана.

Согласно лемме 6 при выполнении условий $f \notin O^\infty, f \neq 0$ множество $[x \vee y, f]$ содержит некоторую функцию d_m. Обозначим через $p(f)$ такое наименьшее m, что $d_m \in [x \vee y, f]$.

В доказательстве следующей леммы используется свойство мажоритарности функций d_m $(m \geqslant 3)$: при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant m$,

$$d_m(x, \ldots, x, x_i, x, \ldots, x) = x.$$

Лемма 7. *Пусть $f \in T_1 \setminus O^\infty$. Тогда $f \in [x \vee \bar{y}, d_{p(f)}]$. Если дополнительно $f \in T_0$ или $f \in M$, то соответственно $f \in [x \vee y\bar{z}, d_{p(f)}]$ или $f \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $p(f) = 2$. Тогда утверждение леммы вытекает из установленных в параграфе 1 соотношений

$$[x \vee \bar{y}, xy] = T_1, \quad [x \vee y\bar{z}, xy] = T_{01}, \quad [x \vee y, xy] = M_{01}.$$

Пусть $p(f) \geqslant 3$ и $\{a^1, \ldots, a^t\}$ — наименьшее множество наборов, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 0 и которые не имеют общей нулевой компоненты. Если $t < p(f)$, то согласно лемме 6 в множество $[x \vee y, f]$ входит функция d_m, где $m < p(f)$. Это противоречит определению числа $p(f)$. Далее считаем, что $t \geqslant p(f)$.

Предположим, что $f \in M$. Напомним, что максимальным верхним нулем функции f называется такой набор a, что $f(a) = 0$ и $f(b) = 1$ для любого набора b, который строго больше набора a. Заметим, что все наборы $a^1, \ldots, a^t$ можно считать максимальными верхними нулями функции f. В самом деле, если набор a^i не является максимальным верхним нулем функции f, то его можно заменить максимальным верхним нулем a, который строго больше набора a^i (заметим, что все единичные компоненты набора a^i являются единичными компонентами набора a). Понятно, что наборы $a^1, \ldots, a^{i-1}, a, a^{i+1}, \ldots, a^t$ также не имеют общей нулевой компоненты.

Для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant p(f)$, обозначим через f_i такую монотонную функцию из класса T_1, что $f_i(a^i) = 1$ и $f_i(a) = f(a)$ при $a \neq a^i$ (монотонность функции f_i следует из того, что $f \in M$ и a^i — максимальный верхний нуль функции f). Непосредственная проверка показывает, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_{p(f)}(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{p(f)}(x_1, \ldots, x_n)). \qquad (5)$$

Таким образом, если функции $f_1, \ldots, f_{p(f)}$ принадлежат множеству $[x \vee yz, d_{p(f)}]$, то $f \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$.

Если $f_i \in O^\infty$, то согласно лемме 4 имеем $f_i \in [x \vee yz]$. Пусть $f_i \notin O^\infty$. Тогда $f_i \in [x \vee y, f]$. Действительно, согласно следствию из леммы 3 множество $[x \vee y, f]$ содержит функцию $x \vee yz$. Если в наборе a^i равны 1 компоненты с номерами $j_1, \ldots, j_k$, то функция f_i получается подстановкой функции f вместо переменной y в функцию $y \vee x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k}$, которая входит в множество $[x \vee yz]$. Из соотношения $f_i \in [x \vee y, f]$ следует, что $p(f_i) \geqslant p(f)$. Вместе с тем, как легко видеть, при $p > p(f)$ имеем $d_p \in [x \vee yz, d_{p(f)}]$. Далее поступаем с функцией f_i так же, как и с функцией f. Этот индуктивный процесс продолжается до тех пор, пока не будут получены функции, входящие в класс O^∞.

Пусть теперь $f \in T_0 \setminus M$. Так же, как в случае $f \in M$, определяем функции $f_1, \ldots, f_{p(f)}$ из класса T_{01} (при этом $a^1, \ldots, a^t$ могут быть любыми ненулевыми наборами) и приходим к тождеству (5). Если $f_i \in O^\infty$, то $f_i \in O_0^\infty$ и применение леммы 4 дает $f_i \in [x \vee y\bar{z}]$. Пусть $f_i \notin O^\infty$. По следствию из леммы 3 имеем $(x \vee y\bar{z}) \in [x \vee y, f]$. Если, например, в наборе a^i равны 1 первые k компонент (причем $k \geqslant 1$, поскольку набор

a^i отличен от нулевого набора), то $f_i = f \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \bar{x}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$, где функция $y \vee x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \bar{x}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$ входит в множество $[x \vee y\bar{z}]$. Таким образом, $f_i \in [x \vee y, f]$. Как и выше, из включения $f_i \in [x \vee y, f]$ следует, что $p(f_i) \geqslant p(f)$. Наконец, дальнейший индуктивный процесс рассмотрения функций f_i обрывается при получении функций, входящих либо в класс O^∞, либо в класс M.

Пусть $f \in T_1 \setminus T_0$. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что если $f_i \in O^\infty$, то согласно лемме 4 $f_i \in [x \vee \bar{y}]$, а если $f_i \notin O^\infty$, то согласно следствию из леммы 3 $(x \vee \bar{y}) \in [x \vee y, f]$. Лемма 7 доказана.

Для любого $m \geqslant 2$ обозначим через O^m множество всех таких функций f, что любые m наборов, на которых функция f принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту. Положим

$$O_0^m = O^m \cap T_0, \quad MO^m = M \cap O^m, \quad MO_0^m = M \cap O_0^m.$$

Двойственным образом (с заменой 0 на 1) определяются классы I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m.

Нетрудно убедиться в том, что O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m — замкнутые классы,

$$MO_0^m \subset MO^m \subset O^m, \quad MO_0^m \subset O_0^m \subset O^m, \quad d_{m+1} \in MO_0^m$$

и $d_m \notin MO_0^m$.

Теорема 3. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе T_1 и не содержащийся в классах S, L, O^∞, I^∞, совпадает с одним из следующих классов*:

$$\begin{aligned}
&T_1 = [x \vee \bar{y}, xy], \quad M_1 = [1, x \vee y, xy], \quad O^m = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}],\\
&T_{01} = [x \vee y\bar{z}, xy], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}],\\
&MO^m = [1, d_{m+1}]\ (m = 2, 3, \ldots), \quad MO_0^2 = [x \vee y, d_3],\\
&MO_0^m = [d_{m+1}]\ (m = 3, 4, \ldots), \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*]\ (m = 2, 3, \ldots),\\
&MI_1^2 = [xy, d_3], \quad MI_1^m = [d_{m+1}^*]\ (m = 3, 4, \ldots).
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть F — замкнутый класс, $F \subseteq T_1$ и

$$F \nsubseteq S, \quad F \nsubseteq L, \quad F \nsubseteq O^\infty, \quad F \nsubseteq I^\infty.$$

Согласно лемме 5 классу F принадлежит одна из функций $x \vee y, xy$.

Сначала предположим, что $(x \vee y) \in F$. По лемме 6 в класс F входит некоторая функция d_{m+1}. Будем считать, что m выбрано минимально

возможным. Функция $y \vee d_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1})$ из множества $F^\infty = F \cap O^\infty$, очевидно, не принадлежит классу D. Поэтому согласно теореме 2 класс F^∞ совпадает с одним из классов $O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$.

Пусть $m = 1$. Тогда $xy \in F$. Если $F^\infty = O^\infty$, то согласно лемме 4 классу F принадлежит функция $x \vee \bar{y}$. Поскольку $[x \vee \bar{y}, xy] = T_1$, в этом случае получаем $F = T_1$. Если $F^\infty = O_0^\infty$, то все функции класса F сохраняют 0 (иначе ввиду $F \subseteq T_1$ было бы $1 \in F^\infty$). Кроме того (см. лемму 4), имеем $(x \vee y\bar{z}) \in F$. Однако $[x \vee y\bar{z}, xy] = T_{01}$. Следовательно, в этом случае $F = T_{01}$. Аналогичные рассуждения в случаях $F^\infty = MO^\infty$ и $F^\infty = MO_0^\infty$ показывают, что $F = M_1$ или $F = M_{01}$.

Предположим, что $m \geqslant 2$. Пусть $F^\infty = O^\infty$. Если $f \in F \setminus O^\infty$ и $p(f) = m + 1$, то в силу леммы 7 получаем $f \in [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$. Если $f \in F \setminus O^\infty$ и $p(f) > m + 1$, то соотношение $f \in [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$ следует из леммы 7 и соотношения $d_{p(f)} \in [x \vee y, d_{m+1}]$. Если же $f \in O^\infty$, то $f \in [x \vee \bar{y}]$ согласно лемме 4. Таким образом, в рассматриваемом случае $F = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}]$. Вместе с тем функции $x \vee \bar{y}, d_{m+1}$ принадлежат классу O^m и класс O^m не содержит функций d_p при $p \leqslant m$. Следовательно,

$$F = O^m = [x \vee \bar{y}, d_{m+1}].$$

Пусть $F^\infty = O_0^\infty$. Тогда все функции класса F сохраняют 0, т. е. $F \subseteq T_{01}$. Далее повторяем те же рассуждения, что и в случае $F = O^\infty$, пользуясь леммой 7 для класса T_0 и леммой 4 для класса O_0^∞. В результате приходим к равенствам

$$F = O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}].$$

Случаи $F^\infty = MO^\infty$ и $F^\infty = MO_0^\infty$ рассматриваются аналогичным образом. Стоит лишь отметить, что при $m \geqslant 3$ функция $x \vee yz$ (а значит, и функция $x \vee y$) получается из функции d_{m+1} отождествлением переменных: $x \vee yz = d_{m+1}(x, \ldots, x, y, z)$.

Предположим теперь, что в класс F входит функция xy. Рассмотрим класс $F_0 = F \cap T_0$. Предыдущее доказательство в силу принципа двойственности дает все замкнутые классы, лежащие в классе F_0 и не содержащиеся в классах S, L, O^∞, I^∞:

$$T_{01} = [x \vee y\bar{z}, xy], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d_{m+1}^*] \ (m = 2, 3, \ldots),$$

$$MI_1^2 = [xy, d_3], \quad MI_1^m = [d_{m+1}^*] \ (m = 3, 4, \ldots).$$

Если в классе F содержится функция f, не сохраняющая 0, то ввиду включения $F \subseteq T_1$ имеем $f(x, \ldots, x) = 1$. Добавление константы 1 к

классам $T_{01}, M_{01}, I_1^m, MI_1^m$ приводит к уже полученным классам T_1 и M_1. Это вытекает из следующих очевидных соотношений:

$$[1, x \vee y\bar{z}, xy] = [1, x(y \vee \bar{z}), d^*_{m+1}] = T_1,$$

$$[1, xy, d_3] = [1, d^*_{m+1}] = M_{01} \ (m = 3, 4, \ldots).$$

Теорема 3 доказана.

Двойственной к теореме 3 является

Теорема 4. *Произвольный замкнутый класс, целиком лежащий в классе T_0 и не содержащийся в классах S, L, O^∞, I^∞, совпадает с одним из следующих классов*:

$$\begin{aligned}
&T_0 = [x \vee y, x\bar{y}], \quad M_0 = [0, x \vee y, xy], \quad I^m = [x\bar{y}, d^*_{m+1}],\\
&T_{01} = [x \vee y, x(y \vee \bar{z})], \quad M_{01} = [x \vee y, xy], \quad I_1^m = [x(y \vee \bar{z}), d^*_{m+1}],\\
&MI^m = [0, d^*_{m+1}] \ (m = 2, 3, \ldots), \quad MI_1^2 = [xy, d_3],\\
&MI_1^m = [d^*_{m+1}] \ (m = 3, 4, \ldots), \quad O_0^m = [x \vee y\bar{z}, d_{m+1}] \ (m = 2, 3, \ldots),\\
&MO_0^2 = [x \vee y, d_3], \quad MO_0^m = [d_{m+1}] \ (m = 3, 4, \ldots).
\end{aligned}$$

Теоремы П4–П6 и 1–4 описывают все замкнутые классы, которые целиком лежат в классах T_0, T_1, S, L, D, K. Остается исследовать замкнутые классы $F \subseteq M$, которые не содержатся в классах T_0, T_1, S, L, D, K. Однако из $F \subseteq M$ и $F \not\subseteq T_0$ следут, что в классе F имеется константа 1. Аналогично, из соотношений $F \subseteq M$ и $F \not\subseteq T_1$ следует, что $0 \in F$. Кроме того, лемма П1 позволяет утверждать, что в классе F имеется монотонная нелинейная функция от переменных x, y, т. е. $x \vee y$ или xy.

Пусть, например, $(x \vee y) \in F$. Поскольку $F \not\subseteq D$, в классе F есть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая не является дизъюнкцией. Тогда классу F принадлежит функция $g = y \vee f(x_1, \ldots, x_n)$, входящая в множество $O^\infty \setminus D$. Согласно теореме 2 класс $[g]$ может совпадать лишь с одним из классов MO^∞, MO_0^∞. В обоих случаях $(x \vee yz) \in [g]$. Подстановкой константы 0 из функции $x \vee yz$ получаем конъюнкцию yz. Таким образом, $\{0, 1, x \vee y, xy\} \subset F$. Однако $[0, 1, x \vee y, xy] = M$. Следовательно, в этом случае $F = M$.

Двойственным образом рассматривается случай, когда $xy \in F$.

Диаграмма включений всех замкнутых классов булевых функций представлена на рисунке.

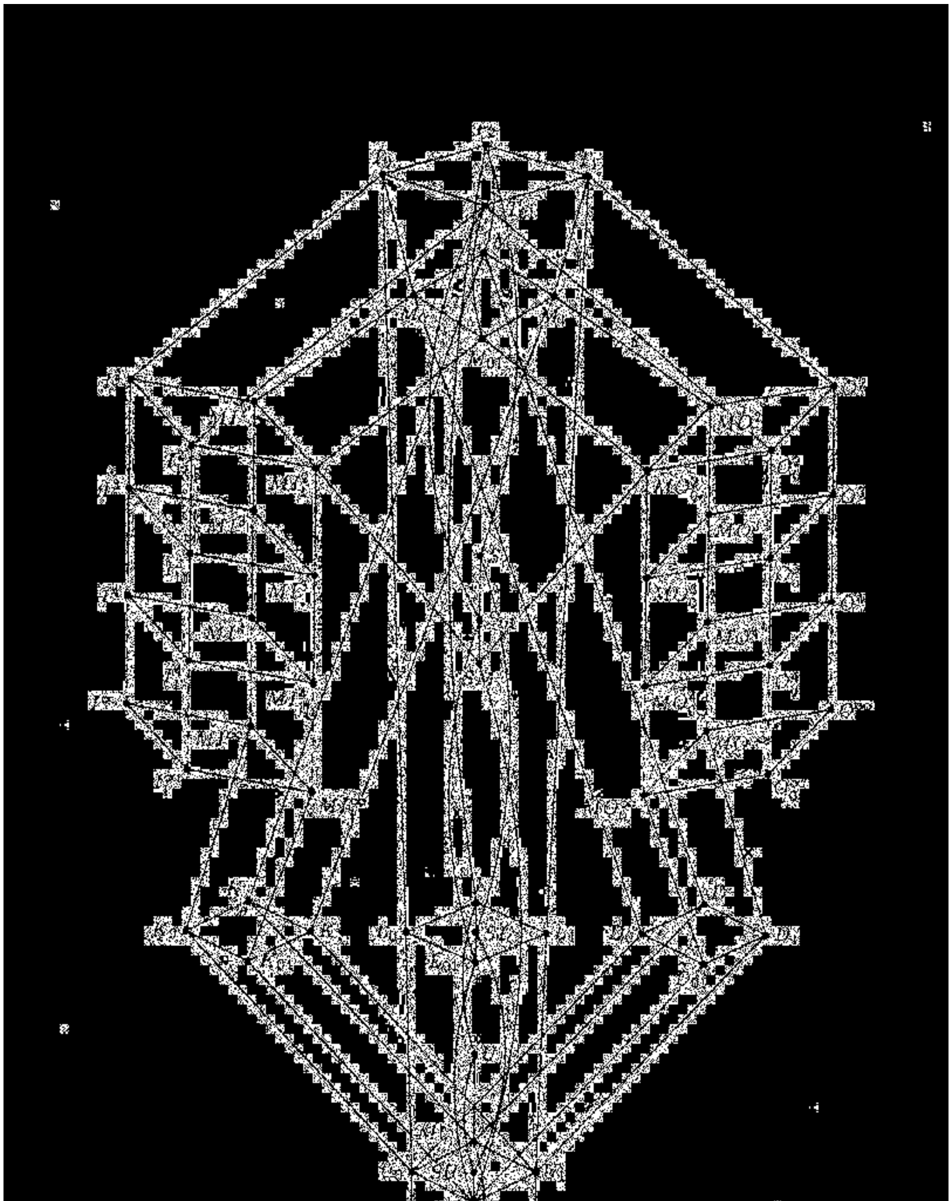

Рис.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гаврилов Г. П.** Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, вып. 1. С. 3–26.
2. **Марченков С. С.** К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, вып. 1. С. 88–99.
3. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
4. **Угольников А. Б.** О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 79–88.
5. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
6. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
7. **Baker K. A., Pixley A. F.** Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeitschr. 1975. Bd. 143, Heft 2. S. 165–174.
8. **Kuntzman J.** Algébre de Boole. Paris: Dunod, 1965.
9. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
10. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic // Princeton. Princeton Univ. Press, 1941.
11. **Reschke M., Denecke K.** Ein neuer Beweis für die Ergebnisse von E. L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen // J. Inform. Process. Cybernet. 1989. V. 25, N 7. P. 361–380.

Адрес автора:

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Воробьевы горы, 2-й учебный корпус,
119992 Москва, Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
7 июня 2004 г.