ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2005. Серия 1. Том 12, № 1, 12–70

УДК 519.71

ЧИСЛО k-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ n-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА (k-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ). ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙ НЕЧЕТНЫХ n И $k = 2$[*)]

А. Д. Коршунов

Пусть S — конечное множество, состоящее из n элементов, и k — произвольное натуральное число, $2 \leqslant k \leqslant n$. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $S_1, \ldots, S_r$, $r \geqslant k$, множества S называется *k-неразделенным,* если пересечение любых k членов семейства $\mathcal{F}$ непусто. Такие семейства эквивалентны k-неразделенным булевым функциям от n переменных, т. е. таким булевым функциям $f(x_1, \ldots, x_n)$, что любые k наборов, на которых $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, имеют по меньшей мере одну общую единичную компоненту. Найдена асимптотика для размера специального множества 2-неразделенных булевых функций от n переменных (2-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества), когда $n \to \infty$ и n нечетно. Доказательство того, что почти все 2-неразделенные булевы функции от n переменных принадлежат специальному множеству, будет дано в очередной статье.

Введение

Потребность в изучении различных семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, возникает при решении ряда задач дискретной математики. Среди естественных ограничений, которым должны удовлетворять такие семейства, является отсутствие в каждом семействе k членов (подмножеств) с пустым пересечением, $k = 2, 3, \ldots$. Такие семейства называются *k-неразделенными.*

[*)] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00939), гранта поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–313.2003.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Новые методы дискретного анализа и комбинаторной оптимизации»).

Задача о числе k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества эквивалентна задаче о числе k-неразделенных булевых функций от n переменных, определяемых следующим образом.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, равная 1 не менее чем на k наборах, называется *k-неразделенной,* если у любых k наборов, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Действительно, пусть k-неразделенное семейство $\mathcal{F}$ состоит из подмножеств $S_1, \ldots, S_r$ n-элементного множества S. Подмножеству S_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, поставим в соответствие такой двоичный (характеристический) набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, что

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й элемент из } S \text{ принадлежит подмножеству } S_i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ берется функция, которая равна 1 на всех характеристических наборах и равна 0 на $2^n - r$ остальных наборах.

Ясно, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является k-неразделенной, а указанное соответствие между k-неразделенными семействами подмножеств n-элементного множества и k-неразделенными булевыми функциями от n переменных взаимно однозначно. Следовательно, число таких семейств совпадает с числом k-неразделенных булевых функций от n переменных. Множество таких функций обозначим через $F_k(n)$.

Замечание 1. Множество k-неразделенных булевых функций $F_k(n)$ при $k = 2, 3, \ldots$ впервые изучал Э. Пост [7] в связи с исследованием замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов булевых функций. Описание замкнутых классов булевых функций имеется в [4, 6–7]).

В настоящей статье мы рассматриваем множество $F_2(n)$ при нечетных n (при четных n аналогичное множество изучалось в [1]).

Асимптотика для размера множества $F_2(n)$ при нечетном $n \to \infty$ устанавливается в два этапа. Сначала в $F_2(n)$ выделяются специальные множества $F_2^1(n), F_2^2(n), \ldots, F_2^n(n)$ одинакового размера; в настоящей статье находится асимптотика для $F_2^1(n)$. Она имеет следующий вид.

Теорема 1. *При любом нечетном $n \to \infty$*

$$|F_2^1(n)| \sim 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \exp\left\{ \binom{n-1}{(n-5)/2} \left[\frac{1}{2}(2/3)^{(n+3)/2}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2^6}(n^2-2n-23)(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2^{14}\cdot 3}(1653n^4+2248n^3-8162n^2+1176n$$
$$+1741)(2/3)^{3(n+3)/2}\Bigg] + \binom{n-1}{(n-1)/2}\Bigg[\frac{1}{2}(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{2^6 3^2}(n^2+14n$$
$$-159)(2/3)^{n-1} + \frac{1}{2^{10}3^4}(767n^4-5425n^3+14207n^2-18279n+22554)$$
$$\times(2/3)^{3(n-1)/2}\Bigg]\Bigg\}. \quad (1)$$

В последующей статье будет доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *При любом нечетном* $n \to \infty$

$$|F_2(n)| \sim \left|\bigcup_{i=1}^{n} F_2^i(n)\right| \sim n|F_2^1(n)|,$$

т. е. почти все функции из $F_2(n)$ *принадлежат множеству* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_2^i(n)$.

Замечание 2. В теореме 1 из [2] и теореме 2 из [3] указаны неверные коэффициенты в последнем полиноме четвертой степени от переменной n. Эта оплошность возникла в связи с неучетом одного множества.

§ 1. Вспомогательные понятия и обозначения

Определим используемые понятия и обозначения.

Для задания булевых функций от n переменных будем использовать n-мерный булев куб E^n, т. е. неориентированный граф с 2^n вершинами, которые помечены двоичными наборами длины n, а вершины $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ смежны в E^n тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$ равно 1. Вершины, как правило, будем называть *наборами.*

Совокупность вершин из E^n, каждая из которых помечена набором, содержащим k единиц и $n-k$ нулей, называется k*-м слоем* и обозначается через $E^{n,k}$. Совокупность вершин (наборов) из $E^{n,k}$, в которых i-я компонента равна нулю (единице) обозначается через $E^{n,k}_{i,0}$ $(E^{n,k}_{i,1})$.

Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из E^n называются 2-*неразделенными* (набор $\widetilde{\alpha}$ 2-неразделен с набором $\widetilde{\beta}$), если в $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Множество наборов из E^n называется 2-*неразделенным,* если любые два набора из этого множества являются 2-неразделенными.

Наборы $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}=(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)$, где $\overline{\alpha}_i=\alpha_i\oplus 1$, называются *противоположными.* Если A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, то через $\overline{A}$ обозначается множество тех наборов из E^n, каждый из которых противоположен какому-нибудь набору из A. Все наборы из $\overline{A}$ принадлежат слою $E^{n,n-k}$.

Будем полагать, что каждое множество наборов из одного слоя разбито на непересекающиеся *связки* и *псевдосвязки,* определяемые следующим образом.

Пусть $A=\{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_t\}$ — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, $1<k<n$. Будем предполагать, что наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ из A принадлежат одной связке тогда и только тогда, когда в A имеются такие наборы $\widetilde{\alpha}_{s_1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{s_v}$, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{s_1})=\rho(\widetilde{\alpha}_{s_v},\widetilde{\alpha}_j)=2$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_{s_w},\widetilde{\alpha}_{s_{w+1}})=2$ при каждом w, $1\leqslant w\leqslant v-1$.

Пусть множество $A=\{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_t\}$ состоит из одноэлементных связок, т. е. $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_j)\geqslant 4$ при любых i и j, где $1\leqslant i<j\leqslant t$. Будем полагать, что наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ из A принадлежат одной псевдосвязке тогда и только тогда, когда в A имеются такие наборы $\widetilde{\alpha}_{s_1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{s_v}$, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{s_1})=\rho(\widetilde{\alpha}_{s_v},\widetilde{\alpha}_j)=4$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_{s_w},\widetilde{\alpha}_{s_{w+1}})=4$ при каждом w, $1\leqslant w\leqslant v-1$.

Трехэлементную связку называем *линейной,* если в ней есть два набора, расстояние Хемминга между которыми равно 4.

Трехэлементную связку из $E^{n,k}$ называем *треугольной связкой первого вида,* если расстояние Хемминга между любыми двумя наборами связки равно 2, в наборах связки имеется $n-k-1$ общих нулевых компонент, $k-2$ общих единичных компонент, а в остальных трех позициях содержатся наборы $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

Трехэлементную связку из $E^{n,k}$ называем *треугольной связкой второго вида,* если расстояние Хемминга между любыми двумя наборами связки равно 2, в наборах связки имеется $n-k-2$ общих нулевых компонент, $k-1$ общих единичных компонент, а в остальных трех позициях содержатся наборы $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — различные двоичные наборы. Говорят, что набор $\widetilde{\alpha}$ предшествует набору $\widetilde{\beta}$, или набор $\widetilde{\alpha}$ меньше набора $\widetilde{\beta}$ (обозначение $\widetilde{\alpha}\prec\widetilde{\beta}$), если $\alpha_i\leqslant\beta_i$ при каждом i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — произвольный набор из $E^{n,k}$, $1<k\leqslant n$. Множество таких наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k-s}$, $s\leqslant k$, что $\widetilde{\beta}\prec\widetilde{\alpha}$ называем *s-проекцией* набора $\widetilde{\alpha}$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k+s}$, $s\leqslant n-k$, таких, что $\widetilde{\beta}\succ\widetilde{\alpha}$ называем *s-тенью* набора $\widetilde{\alpha}$.

Пусть A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k-s}$ таких, что $\widetilde{\beta}$ принадлежит s-проекции по меньшей мере одного набора из A, называем *s-проекцией* множества A и обозначаем через $P^s(A)$.

Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k+s}$ таких, что $\widetilde{\beta}$ принадлежит s-тени по меньшей мере одного набора из A, называем *s-тенью* множества A и обозначаем через $T^s(A)$.

Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из $E^{n,k}$, $1 < k \leqslant n$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k}$ таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant r$, называем *шаром* радиуса r с центром $\widetilde{\alpha}$ и обозначается через $S(\widetilde{\alpha}, r)$.

Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k}$ называем *далекими,* если в них имеется только одна общая единичная компонента.

§ 2. Описание множества $F_2^i(n)$

Ради краткости всюду будем использовать следующие обозначения:

$$a = \binom{n-1}{(n-5)/2}, \quad b = \binom{n-1}{(n-1)/2}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} r_1^0 &= \left\lfloor \frac{3}{2^6}(n^2 - 2n - 15)a(2/3)^{n+3} \right\rfloor, \\ k_1^0 &= \left\lfloor \frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2}(1 - \varepsilon_1(n)) \right\rfloor, \end{aligned} \tag{3}$$

где функция $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и будет определена в § 7;

$$s_1^0 = \left\lfloor \frac{9}{2^{10}}(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)a(2/3)^{(n+3)/2} \right\rfloor; \tag{4}$$

$$t_1^0 = \left\lfloor \frac{3}{2^9}(n^3 - 9n^2 - n + 105)a(2/3)^{(n+3)/2} \right\rfloor; \tag{5}$$

$$v_1^0 = \left\lfloor \frac{9}{2^{10}}(n^3 - n^2 - 17n + 15)a(2/3)^{(n+3)/2} \right\rfloor; \tag{6}$$

$$r_2^0 = \left\lfloor \frac{3}{2^6}(n-1)^2 b(2/3)^{n-1} \right\rfloor, \ k_2^0 = \left\lfloor \frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}(1 - \varepsilon_2(n)) \right\rfloor, \tag{7}$$

где функция $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и будет определена в § 8;

$$s_2^0 = \left\lfloor \frac{9}{2^{10}}(n^4 - 8n^3 + 22n^2 - 24n + 9)b(2/3)^{3(n-1)/2} \right\rfloor; \tag{8}$$

$$t_2^0 = \left\lfloor \frac{3}{2^9}(n^3 - 5n^2 + 7n - 3)b(2/3)^{3(n-1)/2} \right\rfloor; \tag{9}$$

$$v_2^0 = \left\lfloor \frac{9}{2^{10}}(n^3 - 5n^2 + 7n - 3)b(2/3)^{3(n-1)/2} \right\rfloor. \tag{10}$$

При нечетном n и фиксированном i, $1 \leqslant i \leqslant n$, каждая функция f из $F_2^i(n)$ имеет следующую структуру.

1) Функция f равна 0 на любом наборе из множества $E^{n,0} \cup \ldots \cup E^{n,(n-5)/2} \cup E_{i,0}^{n,(n-3)/2}$.

2) На любом наборе, в котором имеется не менее $(n+5)/2$ единиц, функция f может быть выбрана произвольно.

3) Множество наборов из $E_{i,1}^{n,(n-3)/2}$, на котором функция f равна 1, обозначается через B. Это множество состоит из одноэлементных, двухэлементных и трехэлементных связок, а множество одноэлементных связок распадается на одноэлементные, двухэлементные и трехэлементные псевдосвязки.

4) Число одноэлементных связок в B не меньше $k_1^0 - n\sqrt{k_1^0}$ и не больше $k_1^0 + n\sqrt{k_1^0}$.

5) Число двухэлементных связок в B не меньше $r_1^0 - n\sqrt{r_1^0}$ и не больше $r_1^0 + n\sqrt{r_1^0}$.

6) Число линейных трехэлементных связок в B не меньше $s_1^0 - n\sqrt{s_1^0}$ и не больше $s_1^0 + n\sqrt{s_1^0}$.

7) Число треугольных связок первого вида в B не меньше $t_1^0 - n\sqrt{t_1^0}$ и не больше $t_1^0 + n\sqrt{t_1^0}$.

8) Число треугольных связок второго вида в B не меньше $v_1^0 - n\sqrt{v_1^0}$ и не больше $v_1^0 + n\sqrt{v_1^0}$.

9) Число двухэлементных псевдосвязок в B не меньше $k_1^* - n\sqrt{k_1^*}$ и не больше $k_1^* + n\sqrt{k_1^*}$, где $k_1^* = \dfrac{1}{2^9}(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)a(2/3)^{n+3}$.

10) Число трехэлементных псевдосвязок в B не больше $n^5 a(2/3)^{3n/2}$.

11) Множество наборов из $E_{i,0}^{n,(n-1)/2}$, на которых функция f равна 1, обозначается через D. Это множество состоит из одноэлементных, двухэлементных и трехэлементных связок, а множество одноэлементных связок распадается на одноэлементные, двухэлементные и трехэлементные псевдосвязки.

12) Число одноэлементных связок в D не меньше $k_2^0 - n\sqrt{k_2^0}$ и не больше $k_2^0 + n\sqrt{k_2^0}$.

13) Число двухэлементных связок в D не меньше $r_2^0 - n\sqrt{r_2^0}$ и не больше $r_2^0 + n\sqrt{r_2^0}$.

14) Число линейных трехэлементных связок в D не меньше $s_2^0 - n\sqrt{s_2^0}$ и не больше $s_2^0 + n\sqrt{s_2^0}$.

15) Число треугольных связок первого вида в D не меньше $t_2^0 - n\sqrt{t_2^0}$ и не больше $t_2^0 + n\sqrt{t_2^0}$.

16) Число треугольных связок второго вида в D не меньше $v_2^0 - n\sqrt{v_2^0}$

и не больше $v_2^0 + n\sqrt{v_2^0}$.

17) Число двухэлементных псевдосвязок в D не меньше $k_2^* - n\sqrt{k_2^*}$ и не больше $k_2^* + n\sqrt{k_2^*}$, где $k_2^* = \dfrac{1}{2^9}(n^4 - 8n^3 + 22n^2 - 24n + 9)b(2/3)^{n-1}$.

18) Число трехэлементных псевдосвязок в D не превосходит $n^5 b(2/3)^{3n/2}$.

19) Число пар далеких наборов в D не меньше $k_2^+ - n\sqrt{k_2^+}$ и не больше $k_2^+ + n\sqrt{k_2^+}$, где $k_2^+ = \dfrac{1}{2^5}(n-1)^2 b(2/3)^{n-1}$.

Нетрудно понять, что множества $F_2^1(n), \ldots, F_2^n(n)$ равномощны, а каждое такое множество состоит из 2-неразделенных функций. Поэтому будем изучать только множество $F_2^1(n)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1. Первый этап

На множестве $E^{n,(n+5)/2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ каждая функция из $F_2^1(n)$ может быть определена произвольно, поскольку любой набор из этого множества является 2-неразделенным с любым набором из множества

$$E_{1,1}^{n,(n-3)/2} \cup E^{n,(n-1)/2} \cup E^{n,(n+1)/2} \cup E^{n,(n+3)/2} \overset{def}{=} E^{n,*}.$$

Поэтому на множестве $E^{n,(n+5)/2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ имеется $2^{\sum_{i=(n+5)/2}^{n} \binom{n}{i}}$ способов задания функций из $F_2^1(n)$.

Трудность доказательства теоремы 1 заключается в нахождении асимптотики для числа способов задания функций из $F_2^1(n)$ на множестве $E^{n,*}$. Используемый метод нахождения этой асимптотики состоит в следующем.

Пусть множество $B \subset E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ состоит из наборов $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w$, а множество $D \subset E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ — из 2-неразделенных наборов $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_z$ таких, что $P^2(\overline{B}) \cap D = \varnothing$. Обозначим через $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_z)$ множество таких функций g из $F_2^1(n)$, что g равна 1 на каждом наборе из $A \overset{def}{=} B \cup D$ и равна 0 на остальных наборах из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2} \cup E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$.

Пусть f — произвольная функция из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_z)$. Из 2-неразделенности функции f следует, что f равна 0 на любом наборе из $\overline{B} = \{\overline{\widetilde{\alpha}}_1, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_w\}$. Вместе с тем любой набор из $E^{n,(n+3)/2} \setminus \overline{B}$ является 2-неразделенным с любым набором из $B \cup E^{n,(n-1)/2} \cup E^{n,(n+1)/2}$. Поэтому на любом наборе из $E^{n,(n+3)/2} \setminus \overline{B}$ функция f может быть задана произвольно (имеется $2^{\binom{n}{(n+3)/2} - w}$ возможностей).

Далее, на каждом наборе из $\overline{D}=\{\overline{\widetilde{\beta}}_1,\ldots,\overline{\widetilde{\beta}}_z\}\subseteq E_{1,1}^{n,(n+1)/2}$ функция f равна 0 и любой набор из $E_{1,1}^{n,(n+1)/2}\setminus\overline{D}$ является 2-неразделенным с любым набором из $E^{n,(n+1)/2}\cup D\cup E_{1,1}^{n,(n-1)/2}$. Поэтому для задания функций из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_w,\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_z)$ на множестве $E_{1,1}^{n,(n+1)/2}$ имеется $2^{\binom{n-1}{(n-1)/2}-z}$ возможностей.

Наконец, подсчитаем число способов задания функций из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_w,\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_z)$ на множестве $E_{1,1}^{n,(n-1)/2}\cup E_{1,0}^{n,(n+1)/2}$.

Пусть

$$\begin{aligned}&B_1=\{P^1(\overline{\widetilde{\alpha}}_1)\cup\ldots\cup P^1(\overline{\widetilde{\alpha}}_w)\}=P^1(\overline{B}_1),\\&D_1=\{P^1(\overline{\widetilde{\beta}}_1)\cup\ldots\cup P^1(\overline{\widetilde{\beta}}_z)\}\cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}=P^1(\overline{D})\cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\overline{B}_1=T^1(B)$, $\overline{D}_1=T^1(D)\cap E_{1,0}^{n,(n+1)/2}$, а на любом наборе из $B_1\cup D_1$ функция f равна 0. Из последнего факта и того, что на любом наборе из $T^1(B)=\overline{B}_1$ функция f может быть задана произвольно, следует, что $T^1(B)\cap D_1=\varnothing$.

Так как на любом наборе из $\overline{B}_1\cup\overline{D}_1=T^1(B)\cup(T^1(D)\cap E_{1,0}^{n,(n+1)/2})$ функция f может принимать любое значение, то число способов задания функций из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_w,\widetilde{\beta}_1,\ \ldots,\widetilde{\beta}_z)$ на множестве $B_1\cup\overline{B}_1\cup D_1\cup\overline{D}_1$ равно

$$2^{|\overline{B}_1|+|\overline{D}_1|}=2^{|P^1(\overline{B})|+|P^1(\overline{D})\cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}R_1=&E_{1,1}^{n,(n-1)/2}\setminus(\overline{B}_1\cup D_1)=E_{1,1}^{n,(n-1)/2}\setminus(T^1(B)\cup D_1),\\R_2=&E_{1,0}^{n,(n+1)/2}\setminus(B_1\cup\overline{D}_1)=E_{1,0}^{n,(n+1)/2}\setminus(B_1\cup T^1(D)).\end{aligned}$$

Ясно, что если $\widetilde{\alpha}\in R_1$, то $\overline{\widetilde{\alpha}}\in R_2$, а если $\widetilde{\alpha}\in R_2$, то $\overline{\widetilde{\alpha}}\in R_1$. Поэтому множество $R_1\cup R_2$ распадается на пары противоположных наборов. Вместе с тем функция f из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_w,\widetilde{\beta}_1,\ \ldots,\widetilde{\beta}_z)$ не может одновременно принимать значение 1 на противоположных наборах. Поскольку любой набор $\widetilde{\alpha}$ из R_1 является 2-неразделенным с каждым набором из $B\cup D\cup R_1\cup(R_2\setminus\overline{\widetilde{\alpha}})$ и любой набор $\widetilde{\beta}$ из R_2 является 2-неразделенным с каждым набором из $B\cup D\cup R_2\cup(R_1\setminus\overline{\widetilde{\beta}})$, число способов задания функций из $F_2^*(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_w,\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_z)$ на множестве $R_1\cup R_2$ равно

$$3^{|R_2|}=3^{|E_{1,0}^{n,(n+1)/2}|-|B_1|-|\overline{D}_1|}.$$

Так как

$$|E_{1,0}^{n,(n+1)/2}| = 2^{\binom{n-1}{(n+1)/2}} = 2^{\binom{n-1}{(n-3)/2}},$$
$$|B_1| = |P^1(\overline{B})|, \quad |\overline{D}_1| = |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|,$$

то число таких способов равно

$$3^{\binom{n-1}{(n-3)/2} - |B_1| - |\overline{D}_1|}.$$

Из сказанного в этом параграфе следует, что

$$|F_2^*(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_w, \widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_z)| = 2^{\sum\limits_{i=(n+5)/2}^{n} \binom{n}{i}} \cdot 2^{\binom{n}{(n+3)/2} - w} \cdot 2^{\binom{n-1}{(n-1)/2} - z}$$
$$\times 2^{|P^1(\overline{B})| + |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|} \cdot 3^{\binom{n-1}{(n-3)/2} - |P^1(\overline{B})| - |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|}.$$

Вместе с тем

$$2^{\sum\limits_{i=(n+5)/2}^{n} \binom{n}{i}} \cdot 2^{\binom{n}{(n+3)/2}} \cdot 2^{\binom{n-1}{(n-1)/2}} = 2^{2^{n-1} + \binom{n-1}{(n-1)/2} - \binom{n}{(n+1)/2}}$$
$$= 2^{2^{n-1} - \binom{n-1}{(n-3)/2}},$$
$$2^{|P^1(\overline{B})| + |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|} \cdot 3^{\binom{n-1}{(n-3)/2} - |P^1(\overline{B})| - |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|}$$
$$= 3^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} (2/3)^{|P^1(\overline{B})| + |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|}.$$

Поэтому

$$|F_2^*(\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_w, \widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_z)|$$
$$= 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} (2/3)^{|P^1(\overline{B})| + |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}|} 2^{-w-z}. \quad (11)$$

Ясно, что размеры множеств $P^1(\overline{B})$ и $P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}$ зависят от структуры множеств B и D. Выясним эту зависимость.

Пусть

$$w = k_1 + 2r_1 + 3s_1 + 3t_1 + 3v_1, \quad z = k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2 + 3v_2. \quad (12)$$

Предположим, что в множестве $B = \{\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_w\}$ наборы $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{k_1}$ принадлежат одноэлементным связкам, наборы $\widetilde{\alpha}_{k+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1}$ — двухэлементным связкам, наборы $\widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+3s_1}$ — линейным связкам, наборы $\widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+3s_1+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1}$ — треугольным связкам первого вида и наборы $\widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1}$ — треугольным связкам второго вида. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |P^1(\overline{B})| = {} & |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_1, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1}\})| + |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1}\})| \\ & + |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1}\})| \\ & + |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1}\})| \\ & + |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1}\})|. \end{aligned} \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_1, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1}\})| = k_1(n+3)/2, \tag{14}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1}\})| = 2r_1(n+3)/2 - r_1, \tag{15}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1}\})| = 3s_1(n+3)/2 - 2s_1, \tag{16}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1}\})| = 3t_1(n+3)/2 - 2t_1, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} & |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1}\})| \\ & \qquad = 3v_1(n+3)/2 - 3v_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Подставив (14)–(18) в (13), получим

$$\begin{aligned} |P^1(\overline{B})| & = (n+3)(k_1 + 2r_1 + 3s_1 + 3t_1 + 3v_1)/2 - r_1 - 2s_1 - 2t_1 - 3v_1 \\ & = (n+3)w/2 - r_1 - 2s_1 - 2t_1 - 3v_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее предположим, что в множестве D имеется k_2 одноэлементных и r_2 двухэлементных связок, s_2 линейных связок, t_2 треугольных связок первого вида и v_2 треугольных связок второго вида. Как и в предыдущем случае убеждаемся, что

$$\begin{aligned} |P^1(\overline{D}) \cap E_{1,1}^{n,(n-1)/2}| & = (n-1)(k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3v_2)/2 - r_2 - 2s_2 - 2t_2 - 3v_2 \\ & = (n-1)z/2 - r_2 - 2s_2 - 2t_2 - 3v_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Из (11), (19) и (20) следует, что при рассматриваемых B и D справедливо равенство

$$\begin{aligned} |F_2^*(\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_z)| & = 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} 2^{-w-z} \\ & \times (2/3)^{(n+3)w/2+(n-1)z/2-r_1-2s_1-2t_1-3v_1-r_2-2s_2-2t_2-3v_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Обозначим через $R(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$ совокупность 2-неразделенных множеств $B \cup D$, где $B \subset E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, $|B| = w$, $D \subset E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, $|D| = z$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) Множество B состоит из k_1 одноэлементных и r_1 двухэлементных связок, s_1 линейных связок, t_1 треугольных связок первого вида и v_1 треугольных связок второго вида.

b) Множество D состоит из k_2 одноэлементных и r_2 двухэлементных связок, s_2 линейных связок, t_2 треугольных связок первого вида и v_2 треугольных связок второго вида.

c) Число двухэлементных и трехэлементных связок в B, D и число пар далеких наборов в D удовлетворяют условиям 6), 7), 11), 12) и 13) из определения множества $F_2^i(n)$.

Тогда из соотношения (21) и определения множества $F_2^1(n)$ следует, что

$$|F_2^1(n)| = 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} \sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} \sum_{|s_1-s_1^0|\leqslant n\sqrt{s_1^0}} \sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}} \sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}} \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} \sum_{|r_2-r_2^0|\leqslant n\sqrt{r_2^0}} \sum_{|s_2-s_2^0|\leqslant n\sqrt{s_2^0}} \sum_{|t_2-t_2^0|\leqslant n\sqrt{t_2^0}} \sum_{|v_2-v_2^0|\leqslant n\sqrt{v_2^0}} |R(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)| \times (2/3)^{(n+3)w/2+(n-1)z/2-r_1-2s_1-2t_1-3v_1-r_2-2s_2-2t_2-3v_2} \cdot 2^{-w-z}, \quad (22)$$

где $k_1^0, r_1^0, s_1^0, t_1^0, v_1^0, k_2^0, r_2^0, s_2^0, t_2^0, v_2^0$ взяты из (3)–(10).

Следовательно, для доказательства теоремы 1 надо найти асимптотики для $|R(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)|$ при всех рассматриваемых $k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2$ и убедиться в том, что сумма асимптотик равна правой части из (1).

§ 4. Доказательство теоремы 1. Второй этап

Обозначим через $R(w,z)$ совокупность 2-неразделенных $(w+z)$-элементных множеств $B \cup D$, где $B \subset E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, $|B| = w$, $D \subset E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, $|B| = z$. Каждому множеству C из $R(w,z)$ поставим в соответствие $w!z!$ упорядоченных конечных последовательностей, полученных из C путем таких упорядочений, что в начале каждой последовательности находятся наборы из B, а за ними — наборы из D. Множество таких последовательностей обозначим через $\vec{R}(w,z)$.

Через $\vec{R}(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)$ обозначим множество таких последовательностей из $\vec{R}(w,z)$, которые поставлены в соответствие множествам из $R(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)$. Так как

$$|\vec{R}(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)| = |R(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)|w!z!,$$

то из (22) следует, что

$$|F_2^1(n)| = 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} \sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} \sum_{|s_1-s_1^0|\leqslant n\sqrt{s_1^0}}$$

$$\sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}} \sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}} \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} \sum_{|r_2-r_2^0|\leqslant n\sqrt{r_2^0}} \sum_{|s_2-s_2^0|\leqslant n\sqrt{s_2^0}}$$
$$\sum_{|t_2-t_2^0|\leqslant n\sqrt{t_2^0}} \sum_{|v_2-v_2^0|\leqslant n\sqrt{v_2^0}} |\vec{R}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)|$$
$$\times (2/3)^{(n+3)w/2+(n-1)z/2-r_1-2s_1-2t_1-3v_1-r_2-2s_2-2t_2-3v_2}/(w!z!2^{w+z}). \quad (23)$$

Пусть $S_1 = \{1, \dots, w\}$. Обозначим через $G_1(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1)$ совокупность таких разбиений P_1 множества S_1 на подмножества, что в P_1 имеется k_1 одноэлементных, r_1 двухэлементных и $s_1+t_1+v_1$ трехэлементных подмножеств, при этом предполагается, что совокупность трехэлементных подмножеств разбита на три класса: первый класс состоит из s_1 подмножеств первого типа, второй класс — из t_1 подмножеств второго типа и третий класс — из v_1 подмножеств третьего типа.

Лемма 1. *При любых k_1, r_1, s_1, t_1, v_1 справедливо равенство*

$$|G_1(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1)| = \frac{(k_1 + 2r_1 + 3s_1 + 3t_1 + 3v_1)!}{k_1!r_1!s_1!t_1!v_1!2^{r_1}6^{s_1+t_1+v_1}}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из [1] и поэтому не приводится.

Далее, пусть $S_2 = \{w+1, \dots, w+z\}$. Обозначим через $G_2(k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$ совокупность таких разбиений P_2 множества S_2 на подмножества, что в P_2 имеется k_2 одноэлементных и r_2 двухэлементных подмножеств, s_2 трехэлементных подмножеств первого типа, t_2 трехэлементных подмножеств второго типа и v_2 трехэлементных подмножеств третьего типа, $k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2 + 3v_2 = z$.

Лемма 2. *При любых k_2, r_2, s_2, t_2, v_2 справедливо равенство*

$$|G_2(k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)| = \frac{(k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2 + 3v_2)!}{k_2!r_2!s_2!t_2!v_2!2^{r_2}6^{s_2+t_2+v_2}}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из [1].

Пусть P_1 и P_2 — произвольные разбиения из $G_1(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1)$ и $G_2(k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$ соответственно и $\vec{C}$ — последовательность из $\vec{R}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$. Последовательность $\vec{C}$ назовем *согласованной* с разбиениями P_1 и P_2, если:

a) все элементы одноэлементных подмножеств из $P_1 \cup P_2$ являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых расположены наборы, принадлежащие одноэлементным связкам;

в) элементы каждого двухэлементного подмножества из $P_1 \cup P_2$ являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие двухэлементной связке;

c) элементы каждого трехэлементного подмножества первого типа из $P_1 \cup P_2$ являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие линейной связке;

d) элементы каждого трехэлементного подмножества второго типа из $P_1 \cup P_2$ являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие треугольной связке первого вида;

e) элементы каждого трехэлементного подмножества третьего типа из $P_1 \cup P_2$ являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие треугольной связке второго вида.

Обозначим через $\vec{R}_{P_1 \cup P_2}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$ множество последовательностей из $\vec{R}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$ согласованных с разбиениями P_1 и P_2. Так как

$$
\begin{aligned}
&|\vec{R}_{P_1 \cup P_2}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)| \\
&\qquad = |\vec{R}_{P_1' \cup P_2'}(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1, k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)| \qquad (24)
\end{aligned}
$$

при любых P_1, P_1' из $G_1(k_1, r_1, s_1, t_1, v_1)$ и любых P_2, P_2' из $G_2(k_2, r_2, s_2, t_2, v_2)$, то будем полагать, что разбиение $P_1 \cup P_2$ удовлетворяет следующим условиям:

1) элементы $1, \dots, k_1$ и элементы $w+1, \dots, w+k_2$ из $S_1 \cup S_2$ принадлежат одноэлементным подмножествам;

2) элементы $k_1+1, \dots, k_1+2r_1$ и элементы $w+k_2+1, \dots, w+k_2+2r_2$ из $S_1 \cup S_2$ принадлежат двухэлементным подмножествам, причем при любом i, $1 \leqslant i \leqslant r_1$, (любом j, $1 \leqslant j \leqslant r_2$) элементы k_1+2i-1 и k_1+2i (элементы $w+k_2+2j-1$ и $w+k_2+2j$) образуют одно подмножество;

3) элементы $k_1+2r_1+1, \dots, k_1+2r_1+3s_1$ и элементы $w+k_2+2r_2+1, \dots, w+k_2+2r_2+3s_2$ из $S_1 \cup S_2$ принадлежат трехэлементным подмножествам первого вида, причем при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s_1$, (любом j, $1 \leqslant j \leqslant s_2$) элементы k_1+2r_1+3i-2, k_1+2r_1+3i-1 и k_1+2r_1+3i

(элементы $w+k_2+2r_2+3j-2$, $w+k_2+2r_2+3j-1$ и $w+k_2+2r_2+3j$) образуют одно подмножество;

4) элементы $k_1+2r_1+3s_1+1,\ldots,k_1+2r_1+3s_1+3t_1$ и элементы $w+k_2+2r_2+3s_2+1,\ldots,w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2$ из $S_1\cup S_2$ принадлежат трехэлементным подмножествам второго вида, причем при любом i, $1\leqslant i\leqslant t_1$, (любом j, $1\leqslant j\leqslant t_2$) элементы $k_1+2r_1+3s_1+3i-2$, $k_1+2r_1+3s_1+3i-1$ и $k_1+2r_1+3s_1+3i$ (элементы $w+k_2+2r_2+3s_2+3j-2$, $w+k_2+2r_2+3s_2+3j-1$ и $w+k_2+2r_2+3s_2+3j$) образуют одно подмножество;

5) элементы $k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1,\ldots,k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1$ и элементы $w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+1,\ldots,w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3v_2$ из $S_1\cup S_2$ принадлежат трехэлементным подмножествам третьего вида, причем при любом i, $1\leqslant i\leqslant v_1$, (любом j, $1\leqslant j\leqslant v_2$) элементы $k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i-2$, $k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i-1$ и $k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i$ (элементы $w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3j-2$, $w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3j-1$ и $w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3j$) образуют одно подмножество.

Воспользовавшись (23), (24) и леммами 1, 2 убеждаемся, что

$$
\begin{aligned}
|F_2^1(n)| &= 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} \sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} \sum_{|s_1-s_1^0|\leqslant n\sqrt{s_1^0}} \\
&\sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}} \sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}} \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} \sum_{|r_2-r_2^0|\leqslant n\sqrt{r_2^0}} \sum_{|s_2-s_2^0|\leqslant n\sqrt{s_2^0}} \\
&\sum_{|t_2-t_2^0|\leqslant n\sqrt{t_2^0}} \sum_{|v_2-v_2^0|\leqslant n\sqrt{v_2^0}} |\vec{R}_P(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)| \\
&\times (2/3)^{(n+3)w/2+(n-1)z/2-r_1-2s_1-2t_1-3v_1-r_2-2s_2-2t_2-3v_2} \\
&\times \{k_1!r_1!s_1!t_1!v_1!2^{r_1}6^{s_1+t_1+v_1}k_2!r_2!s_2!t_2!v_2!2^{r_2}6^{s_2+t_2+v_2}2^{w+z}\}^{-1}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Все последовательности из $\vec{R}_P(k_1,r_1,s_1,t_1,v_1,k_2,r_2,s_2,t_2,v_2)$ будем порождать следующим способом.

1) Заполняются позиции, начиная с (k_1+1)-й и кончая (k_1+2r_1)-й.

2) Заполняются позиции, начиная с (k_1+2r_1+1)-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1)$-й.

3) Заполняются позиции, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1)$-й.

4) Заполняются позиции, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1)$-й.

5) Заполняются позиции, начиная с $(w+k_2)$-й и кончая $(w+k_2+2r_2)$-й.

6) Заполняются позиции, начиная с $(w + k_2 + 2r_2 + 1)$-й и кончая $(w + k_2 + 2r_2 + 3s_2)$-й.

7) Заполняются позиции, начиная с $(w+k_2+2r_2+3s_2+1)$-й и кончая $(w + k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2)$-й.

8) Заполняются позиции, начиная с $(w + k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2 + 1)$-й и кончая $(w + k_2 + 2r_2 + 3s_2 + 3t_2 + 3v_2)$-й.

9) Заполняются позиции, начиная с первой и кончая k_1-й.

10) Заполняются позиции, начиная с $(w + 1)$-й и кончая $(w + k_2)$-й.

Займемся нахождением асимптотик для числа перечисленных заполнений.

§ 5. Связки и псевдосвязки различных размеров

Предварительно убедимся в справедливости одного вспомогательного утверждения (лемма 3).

Пусть A_1 и A_2 — произвольные множества из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ и $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ соответственно. Обозначим через $R_1^0(d, A_1)$ (через $R_2^0(d, A_2)$) совокупность d-элементных подмножеств из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ $(E_{1,0}^{n,(n-1)/2})$, не пересекающихся с A_1 (A_2).

Лемма 3. *Пусть $|A_1| \leqslant n^{-7}(3/2)^{n/2}$ и $|A_2| \leqslant n^{-7}(3/2)^{n/2}$. Тогда при любом $d \leqslant n^5 a(2/3)^{n/2}$ и $n \to \infty$ справедливы соотношения*:

$$|R_1^0(d, A_1)| \sim \binom{a}{d}, \quad |R_2^0(d, A_2)| \sim \binom{b}{d},$$

где a и b взяты из (2).

Доказательство. Очевидно, что

$$|R_1^0(d, A_1)| = \binom{a - |A_1|}{d} = \binom{a}{d}\frac{(a-d)\dots(a-d-|A_1|+1)}{a(a-d)\dots(a-|A_1|+1)}.$$

В свою очередь, при выполнении условий леммы и $n \to \infty$ имеем

$$\prod_{i=0}^{|A_1|-1}(a-d-i) \sim (a-d)^{|A_1|}, \ \prod_{i=0}^{|A_1|-1}(a-i) \sim a^{|A_1|}, \ (a-d)^{|A_1|} \sim a^{|A_1|}.$$

Аналогично устанавливается соотношение $|R_2^0(d, A_2)| \sim \binom{b}{d}$. Лемма 3 доказана.

Обозначим через $\vec{R}_P^1(r_1)$ множество согласованных с P заполнений $2r_1$ позиций, начиная с $(k_1 + 1)$-й и кончая $(k_1 + 2r_1)$-й.

Лемма 4. *При $n \to \infty$*

$$\sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} |\vec{R}_P^1(r_1)|(2/3)^{(n+3)r_1-r_1}/(r_1!2^{3r_1})$$
$$\sim \exp\left\{\frac{3}{2^6}a(n^2-2n-15)(2/3)^{n+3}\right\}. \quad (26)$$

Доказательство. Все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с (k_1+1)-й и кончая (k_1+2r_1)-й, можно получить следующим способом. Сначала в (k_1+2i-1)-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant r_1$, помещается произвольный еще неотобранный набор $\widetilde{\alpha}$ из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ (имеется не более a возможностей). Затем в (k_1+2i)-ю позицию помещается неотобранный набор $\widetilde{\beta}$ из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 2$ (имеется не более $\dfrac{n-5}{2}\cdot\dfrac{n+3}{2} = \dfrac{1}{4}(n^2-2n-15)$ возможностей). Следовательно,

$$|\vec{R}_P^1(r_1)| \leqslant \left\{\frac{1}{4}a(n^2-2n-15)\right\}^{r_1}. \quad (27)$$

Вместе с тем, если в (k_1+2i-1)-ю позицию помещен такой набор $\widetilde{\alpha}$, что расстояние Хемминга между $\widetilde{\alpha}$ и любым ранее отобранным набором не меньше 6, то в (k_1+2i)-ю позицию можно помещать любой набор $\widetilde{\beta}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 2$. Пользуясь этим фактом, леммой 3 и неравенством (27), при $n \to \infty$ получаем

$$|\vec{R}_P^1(r_1)| \sim \left\{\frac{1}{4}a(n^2-2n-15)\right\}^{r_1}.$$

Поэтому

$$\sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} |\vec{R}_P^1(r_1)|(2/3)^{(n+3)r_1-r_1}/(r_1!2^{3r_1})$$
$$\sim \sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}} \left\{\frac{3}{2^6}a(n^2-2n-15)(2/3)^{n+3}\right\}^{r_1}/r_1!$$
$$\sim \exp\left\{\frac{3}{2^6}a(n^2-2n-15)(2/3)^{n+3}\right\}.$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\vec{R}_P^2(s_1)$ множество согласованных с P заполнений $3s_1$ позиций, начиная с (k_1+2r_1+1)-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1)$-й.

Лемма 5. *При* $n \to \infty$

$$\sum_{|s_1 - s_1^0| \leqslant n\sqrt{s_1^0}} |\vec{R}_P^2(s_1)|(2/3)^{3(n+3)s_1/2-2s_1}/(s_1!2^{4s_1}3^{s_1})$$
$$\sim \exp\left\{ \frac{9}{2^{10}}a(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)(2/3)^{3(n+3)/2} \right\}. \quad (28)$$

Доказательство. Все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с (k_1+2r_1+1)-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1)$-й, можно получить следующим способом. Сначала в (k_1+2r_1+3i-2)-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant s_1$, помещается произвольный еще неотобранный набор $\widetilde{\alpha}$ из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ (имеется не более a возможностей). Затем в (k_1+2r_1+3i-1)-ю и (k_1+2r_1+3i)-ю позиции размещаются неотобранные наборы $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ такие, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = 2$ и $\rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 4$. Для выбора набора $\widetilde{\beta}$ имеется не более $\dfrac{1}{4}(n^2 - 2n - 15)$ возможностей, а для выбора $\widetilde{\gamma}$ — не более $\dfrac{n-7}{2} \cdot \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{1}{4}(n^2 - 6n - 7)$ возможностей. Следовательно, имеется не более $\dfrac{1}{2^4}(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)$ способов выбора наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$. Столько же способов выбора наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ имеется в случае, когда $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 2$ и $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = 4$, а также в случае, когда $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 4$ и $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 2$. Следовательно,

$$|\vec{R}_P^2(s_1)| = \left\{ \frac{3}{2^4}a(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)\right\}^{s_1}. \quad (29)$$

Вместе с тем, если в (k_1+2r_1+3i-2)-ю позицию поместить такой набор $\widetilde{\alpha}$, что расстояние Хемминга между $\widetilde{\alpha}$ и любым уже отобранным набором не меньше 8, то при размещение наборов в (k_1+2r_1+3i-1)-ю и (k_1+2r_1+3i)-ю позиции не возникают ограничения. Пользуясь этим фактом, леммой 3 и неравенством (29), при $n \to \infty$ получаем

$$|\vec{R}_P^2(s_1)| \sim \left\{\frac{3}{2^4}a(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)\right\}^{s_1}.$$

Поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{|s_1 - s_1^0| \leqslant n\sqrt{s_1^0}} |\vec{R}_P^2(s_1)|(2/3)^{(n+3)s_1/2-2s_1}/(s_1!2^{4s_1})$$
$$\sim \exp\left\{ \frac{9}{2^{10}}a(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105)(2/3)^{(n+3)/2} \right\}.$$

Лемма 5 доказана.

Обозначим через $\vec{R}^3_P(t_1)$ множество согласованных с P заполнений $3t_1$ позиций, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1)$-й.

Лемма 6. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}} |\vec{R}^3_P(t_1)|(2/3)^{3(n+3)t_1/2-2t_1}/(t_1!2^{4t_1}3^{t_1}) \sim \exp\left\{\frac{3}{2^9}a(n^3-9n^2-n+105)(2/3)^{3(n+3)/2}\right\}. \quad (30)$$

Доказательство. Все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1$ $+3t_1)$-й, можно получить следующим способом. Сначала в $(k_1+2r_1+3s_1+3i-2)$-ю позицию, $1\leqslant i\leqslant t_1$, помещается произвольный еще неотобранный набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,(n-3)/2}_{1,1}$ (имеется менее a возможностей). Затем в $(k_1+2r_1+3s_1+3i-1)$-ю и $(k_1+2r_1+3s_1+3i)$-ю позиции помещаются неотобранные наборы $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,(n-3)/2}_{1,1}$ такие, что $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ образуют треугольную связку первого вида. Для выбора набора $\widetilde{\beta}$ имеется не более $\dfrac{1}{4}(n^2-2n-15)$ возможностей, а число способов выбора набора $\widetilde{\gamma}$ не превосходит $(n-7)/2$. Поэтому

$$|\vec{R}^3_P(t_1)|\leqslant\left\{\frac{1}{2^3}a(n^3-9n^2-n+105)\right\}^{t_1}. \quad (31)$$

Вместе с тем, если в $(k_1+2r_1+3s_1+3i-2)$-ю позицию поместить такой набор $\widetilde{\alpha}$, что расстояние Хемминга между $\widetilde{\alpha}$ и любым уже отобранным набором не меньше 8, то при отборе наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ не возникает ограничения. Пользуясь эттим фактом, леммой 3 и неравенством (31), при $n\to\infty$ получаем

$$|\vec{R}^3_P(t_1)|\sim\left\{\frac{1}{2^3}a(n^3-9n^2-n+105)\right\}^{t_1}.$$

Поэтому при $n\to\infty$ имеем

$$\sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}} |\vec{R}^3_P(t_1)|(2/3)^{3(n+3)t_1/2-2t_1}/(t_1!2^{4t_1}3^{t_1}) \sim \exp\left\{\frac{3}{2^9}a(n^3-9n^2-n+105)(2/3)^{3(n+3)/2}\right\}.$$

Лемма 6 доказана.

Обозначим через $\vec{R}^4_P(v_1)$ множество согласованных с P заполнений $3v_1$ позиций, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1)$-й.

Лемма 7. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}} |\vec{R}^4_P(v_1)|(2/3)^{3(n+3)v_1/2-3v_1}/(v_1!2^{4v_1}3^{v_1}) \sim \exp\left\{\frac{9}{2^{10}}a(n^3-n^2-17n-15)(2/3)^{3(n+3)/2}\right\}. \quad (32)$$

Доказательство. Все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+1)$-й и кончая $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3v_1)$-й, можно получить следующим способом. Сначала в $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i-2)$-ю позицию, $1\leqslant i\leqslant v_1$, помещается произвольный еще неотобранный набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,(n-3)/2}_{1,1}$ (имеется менее a возможностей). Затем в $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i-1)$-ю и $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i)$-ю позиции помещаются неотобранные наборы $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,(n-3)/2}_{1,1}$ такие, что $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ образуют треугольную связку второго вида. Для выбора набора $\widetilde{\beta}$ имеется не более $\dfrac{1}{4}(n^2-2n-15)$ возможностей, а число способов выбора набора $\widetilde{\gamma}$ не превосходит $(n+1)/2$. Поэтому

$$|\vec{R}^4_P(v_1)|\leqslant\left\{\frac{1}{2^3}a(n^3-n^2-17n-15)\right\}^{v_1}. \quad (33)$$

Вместе с тем, если в $(k_1+2r_1+3s_1+3t_1+3i-2)$-ю позицию поместить такой набор $\widetilde{\alpha}$, что расстояние Хемминга между $\widetilde{\alpha}$ и любым уже отобранным набором не меньше 8, то при отборе наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ не возникают ограничения. Пользуясь этим фактом, леммой 3 и неравенством (32), при $n\to\infty$ получаем

$$|\vec{R}^4_P(v_1)|\sim\left\{\frac{1}{2^3}a(n^3-n^2-17n-15)\right\}^{v_1}.$$

Поэтому при $n\to\infty$ имеем

$$\sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}} |\vec{R}^4_P(v_1)|(2/3)^{3(n+3)v_1/2-3v_1}/(v_1!2^{4v_1}3^{v_1}) \sim \exp\left\{\frac{9}{2^{10}}a(n^3-n^2-17n-15)(2/3)^{3(n+3)/2}\right\}.$$

Лемма 7 доказана.

Обозначим через $\vec{R}_P^5(r_2)$ множество согласованных с P заполнений $2r_2$ позиций, начиная с $(w+k_2+1)$-й и кончая $(w+k_2+2r_2)$-й.

Лемма 8. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|r_2-r_2^0|\leqslant n\sqrt{r_2^0}} |\vec{R}_P^5(r_2)|(2/3)^{(n-1)r_2-r_2}/(r_2!2^{3r_2}) \sim \exp\left\{\frac{3}{2^6}b(n^2-2n+1)(2/3)^{n-1}\right\}. \quad (34)$$

Обозначим через $\vec{R}_P^6(s_2)$ множество согласованных с P заполнений $3s_2$ позиций, начиная с $(w+k_2+2r_2+1)$-й и кончая $(w+k_2+2r_2+3s_2)$-й.

Лемма 9. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|s_2-s_2^0|\leqslant n\sqrt{s_2^0}} |\vec{R}_P^6(s_2)|(2/3)^{3(n-1)s_2/2-2s_2}/(s_2!2^{4s_2}3^{s_2}) \sim \exp\left\{\frac{9}{2^{10}}b(n^4-8n^3+22n^2-24n+9)(2/3)^{3(n-1)/2}\right\}. \quad (35)$$

Обозначим через $\vec{R}_P^7(t_2)$ множество согласованных с P заполнений $3t_2$ позиций, начиная с $(w+k_2+2r_2+3s_2+1)$-й и кончая $(w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2)$-й.

Лемма 10. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|t_2-t_2^0|\leqslant n\sqrt{t_2^0}} |\vec{R}_P^7(t_2)|(2/3)^{3(n-1)t_2/2-2t_2}/(t_2!2^{4t_2}3^{t_2}) \sim \exp\left\{\frac{3}{2^9}b(n^3-5n^2+7n-3)(2/3)^{3(n-1)/2}\right\}. \quad (36)$$

Обозначим через $\vec{R}_P^8(v_2)$ множество согласованных с P заполнений $3v_2$ позиций, начиная с $(w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+1)$-й и кончая $(w+k_2+2r_2+3s_2+3t_2+3v_2)$-й.

Лемма 11. *При* $n\to\infty$

$$\sum_{|v_2-v_2^0|\leqslant n\sqrt{v_2^0}} |\vec{R}_P^8(v_2)|(2/3)^{3(n-1)v_2/2-3v_2}/(v_2!2^{4v_2}3^{v_2}) \sim \exp\left\{\frac{9}{2^{10}}b(n^3-5n^2+7n-3)(2/3)^{3(n-1)/2}\right\}. \quad (37)$$

Доказательства лемм 8–11 аналогично доказательству лемм 4–7 и поэтому не приводятся.

Пусть $\vec{R}^0(w)$ обозначает множество последовательностей длины w, состоящих из наборов множества $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$. Обозначим через $\vec{R}^{0,1}(w)$ множество таких последовательностей из $\vec{R}^0(w)$, в каждой из которых имеются наборы, принадлежащие связкам размера не менее 4.

Лемма 12. *Если $w \leqslant a(2/3)^{n/2}$, то при $n \to \infty$*

$$|\vec{R}^{0,1}(w)| = o(|\vec{R}^0(w)|),$$

т. е. в почти каждой последовательности из $\vec{R}^0(w)$ нет наборов, принадлежащих связкам размера не менее 4.

Доказательство. Нетрудно понять, что в каждой последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_w$ из $\vec{R}^{0,1}(w)$ можно выделить 4 набора, которые (без учета остальных наборов из $\vec{C}$) образуют четырехэлементную связку. Для выбора 4 позиций имеется $\binom{w}{4} < w^4/4!$ возможностей.

Пусть, для определенности, такими наборами являются $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_4$. Нетрудно убедиться (см., например, доказательство леммы 6 из [1]), что число возможностей для выбора этих наборов не превосходит $\dfrac{3}{2^5}an^6$. Следовательно,

$$|\vec{R}^{0,1}(w)| < \frac{1}{2^8}an^6w^4|\vec{R}^{0,1}(w-4)|. \tag{38}$$

Оценим снизу величину $|\vec{R}^0(w)|$ через $|\vec{R}^0(w-4)|$. Рассмотрим такие последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_w$ из $\vec{R}^{0,1}(w)$, что последовательность $\widetilde{\alpha}_5 \ldots \widetilde{\alpha}_w \in \vec{R}^0(w-4)$, а наборы $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_4$ принадлежат одноэлементным связкам в $\vec{C}$. Ясно, что число возможностей для выбора наборов $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_4$ не меньше $a^4(1-\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$|\vec{R}^0(w)| > a^4(1-\varepsilon_n)|\vec{R}^0(w-4)|.$$

Отсюда и из (38) следует, что при $n \to \infty$

$$|\vec{R}^{0,1}(w)|/|\vec{R}^0(w)| < \frac{n^6w^4}{2^8a^3(1-\varepsilon_n)} < \frac{n^6w^4}{2^7a^3} < \frac{1}{2^7}n^6a(2/3)^{2n} = o(1).$$

Лемма 12 доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 13. *В почти каждой последовательности из $\vec{R}^0(w)$ нет наборов, принадлежащих псевдосвязкам размера не менее 4.*

Обозначим через $\vec{R}^{0,2}(w,s)$ множество таких последовательностей из $\vec{R}^0(w)$, в каждой из которых имеются не менее s трехэлементных псевдосвязок.

Лемма 14. *Если $w \leqslant a(2/3)^{n/2}$, то при $n \to \infty$*

$$|\vec{R}^{0,2}(w,s)| \leqslant \left(\frac{1}{2^{11}s} an^8 (2/3)^{3n/2} \right)^s |\vec{R}^0(w)|.$$

Доказательство. Все последовательности из $\vec{R}^{0,2}(w,s)$ можно получить следующим способом.

1) Среди w позиций фиксируется $3s$ позиций. Имеется менее $\binom{w}{3s} < w^{3s}/(3s)!$ возможностей.

2) Множество фиксированных позиций разбивается на трехэлементные подмножества. Имеется менее $(3s)!/(s!6^s)$ возможностей.

3) В позиции, оказавшиеся в одном трехэлементном подмножестве, помещаются наборы из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, образующие трехэлементную псевдосвязку. Имеется не более $\left(\frac{1}{2^{10}} an^8 \right)^s$ возможностей.

4) В остальные позиции помещаются такие наборы из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, чтобы получилась последовательность, принадлежащая множеству $\vec{R}^0(w)$. Имеется не более $|\vec{R}^0(w-3s)|$ возможностей.

Из пп. 1–4 следует, что

$$|\vec{R}^{0,2}(w,s)| < \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{2^{10} \cdot 6} an^8 w^3 \right)^s |\vec{R}^0(w-3s)|. \qquad (39)$$

Оценим снизу величину $|\vec{R}^0(w)|$ через $|\vec{R}^0(w-3s)|$. Пусть в последние $w-3s$ позиций наборы из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ уже размещены. Имеется $|\vec{R}^0(w-3s)|$ возможностей. Тогда в первые $3s$ позиций размещаются такие наборы из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, что в полученной последовательности эти наборы принадлежат одноэлементным псевдосвязкам. Число возможностей для выбора таких наборов не меньше $(a(1-\varepsilon_n))^{3s}$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$|\vec{R}^0(w)| > (a(1-\varepsilon_n))^{3s} |\vec{R}^0(w-3s)|.$$

Отсюда и из (39) следует, что при $n \to \infty$

$$|\vec{R}^{0,2}(w,s)|/|\vec{R}^{0}(w)| < \frac{1}{s!}\left(\frac{1}{2^{10}\cdot 6}a^{-2}n^8w^3(1-\varepsilon_n)\right)^s < \left(\frac{1}{2^{11}s}an^8(2/3)^{3n/2}\right)^s.$$

Лемма 14 доказана.

Следствие 1. *Если* $w \leqslant a(2/3)^{n/2}$ *и* $s \geqslant \dfrac{1}{2^{10}}an^8(2/3)^{3n/2}$, *то при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$|\vec{R}^{0,2}(w,s)| < |\vec{R}^{0}(w)|2^{-s} = o(|\vec{R}^{0}(w)|).$$

Действительно, если $s \geqslant \dfrac{1}{2^{10}}an^8(2/3)^{n/2}$ и $w < 3s$, то $|\vec{R}^{0,2}(w,s)| = 0$. Если $w \geqslant 3s$ и $s \geqslant \dfrac{1}{2^{10}}an^8(2/3)^{n/2}$, то согласно лемме 14 при $n \to \infty$ имеем

$$|\vec{R}^{0,2}(w,s)| < |\vec{R}^{0}(w)|2^{-s} = o(|\vec{R}^{0}(w)|).$$

§ 6. Доказательство теоремы 1. Третий этап

Обозначим через $\vec{R}^{9}_{P}(k_1)$ множество согласованных с P заполнений k_1 позиций наборами из $E^{n,(n-3)/2}_{1,1}$ в последовательностях, начиная с первой и кончая k_1-й, а через $\vec{R}^{10}_{P}(k_2)$ множество согласованных с P заполнений k_2 позиций наборами из $E^{n,(n-1)/2}_{1,0}$, начиная с $(w+1)$-й и кончая $(w+k_2)$-й.

После тождественных преобразований выражения из правой части равенства (25) получаем

$$|F^1_2(n)| = 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}}\sum_{|r_1-r_1^0|\leqslant n\sqrt{r_1^0}}|\vec{R}^1_P(r_1)|(2/3)^{(n+3)r_1-r_1}(r_1!2^{3r_1})^{-1}$$
$$\times\sum_{|s_1-s_1^0|\leqslant n\sqrt{s_1^0}}|\vec{R}^2_P(s_1)|(2/3)^{3(n+3)s_1/2-2s_1}(s_1!2^{4s_1}3^{s_1})^{-1}\sum_{|t_1-t_1^0|\leqslant n\sqrt{t_1^0}}|\vec{R}^3_P(t_1)|$$
$$\times(2/3)^{3(n+3)t_1/2-2t_1}(t_1!2^{4t_1}3^{t_1})^{-1}\sum_{|v_1-v_1^0|\leqslant n\sqrt{v_1^0}}|\vec{R}^4_P(v_1)|(2/3)^{3(n+3)v_1/2-3v_1}$$

$$\times (v_1!2^{4v_1}3^{v_1})^{-1} \sum_{|r_2-r_2^0|\leqslant n\sqrt{r_2^0}} |\vec{R}_P^5(r_2)|(2/3)^{(n-1)r_2-r_2}(r_2!2^{3r_2})^{-1}$$

$$\times \sum_{|s_2-s_2^0|\leqslant n\sqrt{s_2^0}} |\vec{R}_P^6(s_2)|(2/3)^{3(n-1)s_2/2-2s_2}(s_2!2^{4s_2}3^{s_2})^{-1} \sum_{|t_2-t_2^0|\leqslant n\sqrt{t_2^0}} |\vec{R}_P^7(t_2)|$$

$$\times (2/3)^{3(n-1)t_2/2-2t_2}(t_2!4^{t_2}3^{t_2})^{-1} \sum_{|v_2-v_2^0|\leqslant n\sqrt{v_2^0}} |\vec{R}_P^8(v_2)|(2/3)^{3(n-1)v_2/2-3v_2}$$

$$\times (v_2!2^{4v_2}3^{v_2})^{-1} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} |\vec{R}_P^9(k_1)|(2/3)^{(n+3)k_1/2}(k_1!2^{k_1})^{-1}$$

$$\times \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} |\vec{R}_P^{10}(k_2)|(2/3)^{(n-1)k_2/2}(k_2!2^{k_2})^{-1}. \tag{40}$$

Воспользовавшись равенством (40) и леммами 4–11, т. е. соотношениями (26), (28), (30), (32), (34)–(37), получаем

$$|F_2^1(n)| \sim 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \exp\Big\{ \frac{3}{2^6}a(n^2-2n-15)(2/3)^{n+3} + \frac{9}{2^{10}}$$

$$\times a(n^4-8n^3-10n^2+104n+105)(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{3}{2^9}a(n^3-9n^2-n$$

$$+105)(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{9}{2^{10}}a(n^3-n^2-17n-15)(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{3}{2^6}b(n^2$$

$$-2n+1)(2/3)^{n-1} + \frac{9}{2^{10}}b(n^4-8n^3+22n^2-24n+9)(2/3)^{3(n-1)/2}$$

$$+\frac{3}{2^9}b(n^3-5n^2+7n-3)(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{9}{2^{10}}b(n^3-5n^2+7n-3)$$

$$\times (2/3)^{3(n-1)/2}\Big\} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} |\vec{R}_P^9(k_1)|(2/3)^{(n+3)k_1/2}(k_1!2^{k_1})^{-1}$$

$$\times \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} |\vec{R}_P^{10}(k_2)|(2/3)^{(n-1)k_2/2}(k_2!2^{k_2})^{-1}$$

$$= 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \exp\Big\{ \frac{3}{2^6}a(n^2-2n-15)(2/3)^{n+3}$$

$$+\frac{1}{2^{10}}a(9n^4-57n^3-153n^2+777n+1440)(2/3)^{3(n+3)/2}$$

$$+\frac{3}{2^6}b(n^2-2n+1)(2/3)^{n-1} + \frac{1}{2^{10}}b(9n^4-57n^3+123n^2-111n+36)$$

$$\times (2/3)^{3(n-1)/2}\Big\} \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} |\vec{R}_P^9(k_1)|(2/3)^{(n+3)k_1/2}(k_1!2^{k_1})^{-1}$$

$$\times \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} |\vec{R}_P^{10}(k_2)|(2/3)^{(n-1)k_2/2}(k_2!2^{k_2})^{-1}. \tag{41}$$

Замечание 3. Ради упрощения обозначений при определении множеств $\vec{R}_P^9(k_1)$ и $\vec{R}_P^{10}(k_2)$ допущена вольность (эти множества зависят от уже отобранных наборов). Однако эта зависимость настолько слаба, что ее можно не учитывать при нахождении асимптотик для $|\vec{R}_P^9(k_1)|$ и $|\vec{R}_P^{10}(k_2)|$.

При нахождении этих асимптотик возникают дополнительные трудности, связанные с несколькими причинами. Основная из них заключается в следующем. Если $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j \in E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j) > 4$, то

$$\begin{aligned}\left|(S(\widetilde{\alpha}_i,2)\cup S(\widetilde{\beta}_j,2))\cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| &= \frac{1}{2}(n-5)(n+3)+2\\ &= \frac{1}{2}(n^2-2n-11),\end{aligned} \tag{42}$$

$$\left|P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i)\cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}}_j)\right| = 2\binom{(n+3)/2}{2} = \frac{1}{4}(n^2+4n+3). \tag{43}$$

Если $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j \in E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j) = 4$, то

$$\begin{aligned}\left|(S(\widetilde{\alpha}_i,2)\cup S(\widetilde{\beta}_j,2))\cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| &= \frac{1}{2}(n-5)(n+3)-2\\ &= \frac{1}{2}(n^2-2n-19),\end{aligned} \tag{44}$$

$$\left|P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i)\cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}}_j)\right| = 2\binom{(n+3)/2}{2} - 1 = \frac{1}{4}(n^2+4n-1). \tag{45}$$

Аналогично, если $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j \in E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j) > 4$, то

$$\begin{aligned}\left|(S(\widetilde{\alpha}_i,2)\cup S(\widetilde{\beta}_j,2))\cap E_{1,0}^{n,(n-1)/2}\right| &= \frac{1}{2}(n-1)^2+2\\ &= \frac{1}{2}(n^2-2n+5),\end{aligned} \tag{46}$$

$$\left|(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i)\cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}}_j))\cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| = 2\binom{(n-1)/2}{2} = \frac{1}{4}(n^2-4n+3). \tag{47}$$

Если $\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j \in E_{1,1}^{n,(n-1)/2}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j) = 4$, то

$$\begin{aligned}\left|(S(\widetilde{\alpha}_i,2)\cup S(\widetilde{\beta}_j,2))\cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| &= \frac{1}{2}(n-1)^2-2\\ &= \frac{1}{2}(n^2-2n-3),\end{aligned} \tag{48}$$

$$\left|(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}}_j)) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| = 2\binom{(n-1)/2}{2} - 1 = \frac{1}{4}(n^2-4n-1). \quad (49)$$

Эти различия необходимо учитывать, поскольку в типичных последовательностях из $\vec{R}_P^9(k_1)$ (а также из $\vec{R}_P^{10}(k_2)$) число пар $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j)$ таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_j) = 4$, достаточно велико и такие пары наборов располагаются в последовательностях нерегулярно.

Ясно, что при порождении любой последовательности $\vec{C}$ из $\vec{R}^0(k_1)$ вероятность набора (называемого *особым*), который образует двухэлементную псевдосвязку с некоторыми предшествующими наборами из $\vec{C}$, возрастает при удалении от начала последовательности. Займемся уточнением этого факта.

Каждую последовательность $\vec{C}$ из $\vec{R}^0(k)$ при $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ разобьем на последовательные блоки $B_1, \ldots, B_p$ длины

$$d = \lfloor (a(2/3)^{n/2})^{2/3} \rfloor \quad (50)$$

(в последнем блоке может оказаться меньше наборов). Ясно, что $p \leqslant a(2/3)^{n/2}/d + 1$. Обозначим через $q = q(n)$ число наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, находящихся на расстоянии 4 от произвольного набора из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$. Очевидно, что

$$q = \binom{(n-5)/2}{2}\binom{(n+3)/2}{2} = \frac{1}{2^6}(n^4 - 8n^3 - 10n^2 + 104n + 105). \quad (51)$$

При каждом i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, положим

$$w_i^0 = \lceil d^2 q/(2a) \rceil, \quad z_i^0 = \lceil d^2 (i-1) q a^{-1} \rceil. \quad (52)$$

Если в p-м блоке содержится d_1 позиций, где $d_1 \leqslant d$, то положим

$$w_p^0 = \lceil d_1^2 q/(2a) \rceil, \quad z_p^0 = \lceil d_1^2 (i-1) q a^{-1} \rceil. \quad (53)$$

Пусть $\vec{C}$ — произвольная последовательность длины $d(i-1)$ наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, состоящая из одноэлементных связок, в которой отсутствуют псевдосвязки размера не менее 3. Будем считать, что $\vec{C}$ разбита на $i-1$ блоков длины d. Обозначим через $\vec{B}_i(d_i)$ множество таких последовательностей $\vec{C}_2 = \vec{C}\vec{C}_1$ длины $d(i-1)+d_i$, где $d_i \leqslant d$, что $\vec{C}_2$ состоит из одноэлементных связок и не содержит псевдосвязок длины не менее 3. Среди особых наборов, содержащихся в $\vec{C}_1$, будем различать наборы двух типов. Особый набор в $\vec{C}_1$ назовем набором *первого типа,* если он образует двухэлементную псевдосвязку с набором из $\vec{C}_1$. В противном случае особый набор назовем набором *второго типа.*

Обозначим через $\vec{B}_i(d_i, w_i, z_i)$ множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{B}_i(d_i)$, что в i-м блоке из $\vec{C}$ имеется $w_i = w_i^0 + r_i$ особых наборов первого типа и $z_i = z_i^0 + s_i$ особых наборов второго типа.

Лемма 15. *Если* $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$, *то при любом* i, $1 \leqslant i \leqslant p$, *и* $n \to \infty$ *справедливо неравенство*

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i)| / \left\{ \left(1 - n^4(2/3)^{n/2} - \frac{4w_i^0}{d}\right)^{|r_i|+|z_i|} \times \prod_{j=1}^{|r_i|-1} (1 + j/w_i^0) \prod_{j=1}^{|s_i|-1} (1 + j/z_i^0) \right\}.$$

Доказательство. Начнем с рассмотрения первого блока. В этом случае $d_1 = d$ и в этом блоке нет особых наборов второго типа. Поэтому множество $\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1, z_1^0 + s_1)$ переобозначим через $\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)$. Будем различать два случая: 1) $r_1 > 0$; 2) $r_1 < 0$.

Первый случай. Найдем верхнюю оценку для $|\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)|$ и нижнюю оценку для $|\vec{B}_1(d, w_1^0)|$.

Все последовательности из $\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)$ можно получить следующим способом.

1) В множестве, состоящем из d позиций, фиксируется $w_1^0 + r_1$ (непересекающихся) двухэлементных подмножеств. Число таких фиксаций равно $d!/\{(d - 2w_1^0 - 2r_1)!(w_1^0 + r_1)!2^{w_1^0 + r_1}\}$.

2) В позиции, не принадлежащие фиксированным подмножествам, размещаются такие наборы, чтобы в полученной последовательности длины $d - 2w_1^0 - 2r_1$ оказались только одноэлементные связки и не было псевдосвязок размера не менее 2. Такие размещения обозначим через $S_1, S_2, \ldots$

3) Фиксированные двухэлементные подмножества произвольным образом нумеруются. Позиции из первых w_1^0 подмножеств заполняются наборами так, чтобы наборы, оказавшиеся в позициях одного подмножества, принадлежали одной двухэлементной псевдосвязке. Ясно, что число таких заполнений, вообще говоря, зависит от способа заполнения нефиксированных позиций. Поэтому при каждом S_i такие заполнения обозначим через $T_1(S_i)$, $T_2(S_i)$, $\ldots$

4) Позиции принадлежащие последним r_1 фиксированным подмножествам, заполняются также как в п. 3. Число таких заполнений меньше $(aq)^{r_1}$, где q взято из (51).

Из пп. 1–4 следует, что

$$|\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)| < \frac{d!(aq)^{r_1}}{(d - 2w_1^0 - 2r_1)!(w_1^0 + r_1)!2^{w_1^0+r_1}} \sum_{S_i} \sum_{T_j(S_i)} 1. \qquad (54)$$

Все последовательности из $\vec{B}_1(d, w_1^0)$ можно получить следующим способом.

$1'$) В множестве, состоящем из d позиций, фиксируется w_1^0 (непересекающихся) двухэлементных подмножеств. Число таких фиксаций равно $d!/\{(d - 2w_1^0)!(w_1^0)!2^{w_1^0}\}$.

$2'$) Первые $d - 2w_1^0 - 2r_1$ позиций, не принадлежащие фиксированным подмножествам, заполняются также как в п. 2. Такими размещениями являются $S_1, S_2, \ldots$

$3'$) Позиции, принадлежащие двухэлементным подмножествам, заполняются также как в п. 3. При каждом S_i такими размещениями являются $T_1(S_i)$, $T_2(S_i)$, $\ldots$

$4'$) Остальные $2r_1$ позиций заполняются также как в п. 2. Число таких заполнений не меньше $(a - \frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2})^{2r_1}$.

Из пп. $1'$–$4'$ следует, что

$$|\vec{B}_1(d, w_1^0)| > \frac{d!(a - \frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2})^{2r_1}}{(d - 2w_1^0)!(w_1^0)!2^{w_1^0}} \sum_{S_i} \sum_{T_j(S_i)} 1. \qquad (55)$$

Воспользовавшись (54) и (55), получаем

$$\begin{aligned} &|\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)|/|\vec{B}_1(d, w_1^0)| \\ &\qquad < \frac{(d - 2w_1^0)!w_1^0!(\frac{1}{2}aq)^{r_1}}{(a - \frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2})^{2r_1}(d - 2w_1^0 - 2r_1)!(w_1^0 + r_1)!} \\ &\qquad < \left(\frac{ad^2q}{2w_1^0(a - \frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2})^2}\right)^{r_1} \Big/ \prod_{i=1}^{r_1}(1 + i/w_1^0). \end{aligned}$$

В свою очередь, пользуясь (52), имеем

$$\frac{ad^2q}{2w_1^0(a - \frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2})^2} < \frac{1}{1 - n^4(2/3)^{n/2}}.$$

Поэтому

$$|\vec{B}_1(d, w_1^0 + r_1)| < |\vec{B}_1(d, w_1^0)| \left\{(1 - n^4(2/3)^{n/2})^{r_1} \prod_{i=1}^{r_1-1}(1 + i/w_1^0)\right\}^{-1}$$
$$< |\vec{B}_1(d)| \left\{(1 - n^4(2/3)^{n/2})^{r_1} \prod_{i=1}^{r_1-1}(1 + i/w_1^0)\right\}^{-1}. \qquad (56)$$

Второй случай. Все последовательности из $\vec{B}_1(d, w_1^0 - r_1)$ при $r_1 > 0$ можно получить следующим способом.

1) В множестве, состоящем из d позиций, фиксируется $w_1^0 - r_1$ двухэлементных подмножеств. Число таких фиксаций равно $d!/\{(d - 2w_1^0 + 2r_1)!(w_1^0 - r_1)!2^{w_1^0 - r_1}\}$.

2) В первые $d - 2w_1^0$ позиций, не принадлежащих фиксированным подмножествам, размещаются такие же наборы как в п. 2 первого случая. Такие размещения обозначим через $S_1', S_2', \dots$

3) Позиции, принадлежащие фиксированным множествам, заполняются также как в п. 3 первого случая. При каждом S_i' такие заполнения обозначим через $T_1'(S_i')$, $T_2'(S_i')$, ...

4) Остальные $2r_1$ позиций заполняются также, как в п. 2 первого случая. Число таких заполнений меньше a^{2r_1}.

Из пп. 1–4 следует, что

$$|\vec{B}_1(d, w_1^0 - r_1)| < \frac{d!a^{2r_1}}{(d - 2w_1^0 + 2r_1)!(w_1^0 - r_1)!2^{w_1^0 - r_1}} \sum_{S_i'} \sum_{T_j'(S_i')} 1. \qquad (57)$$

Все последовательности из $\vec{B}_1(d, w_1^0)$ можно получить следующим способом.

1$'$) В множестве, состоящем из d позиций, фиксируются w_1^0 двухэлементных подмножеств. Число таких фиксаций равно $d!/\{(d - 2w_1^0)!w_1^0!\,2^{w_1^0}\}$.

2$'$) Позиции, не принадлежащие фиксированным подмножествам, заполняются также как в п. 2 первого случая. Такими размещениями являются $S_1', S_2', \dots$

3$'$) Все фиксированные двухэлементные подмножества нумеруются произвольным образом. Позиции, принадлежащие первым $w_1^0 - r_1$ подмножествам, заполняются также как в п. 3 первого случая. При каждом S_i' такими размещениями являются $T_1'(S_i')$, $T_2'(S_i')$, ...

$4'$) Позиции, принадлежащие последним r_1 фиксированным подмножествам, заполняются также как в п. 3 первого случая. Число таких заполнений не меньше $(q(a-\frac{1}{4}n^4a(2/3)^{n/2}))^{r_1}=(aq(1-\frac{1}{4}n^4(2/3)^{n/2}))^{r_1}$.

Из пп. $1'$–$4'$ следует, что

$$|\vec{B}_1(d,w_1^0)|>\frac{d!(aq(1-\frac{1}{4}n^4(2/3)^{n/2}))^{r_1}}{(d-2w_1^0)!w_1^0!2^{w_1^0}}\sum_{S_i'}\sum_{T_j'(S_i')}1. \tag{58}$$

Воспользовавшись (57) и (58), получаем

$$|\vec{B}_1(d,w_1^0-r_1)|/|\vec{B}_1(d,w_1^0)| < \frac{(2a)^{r_1}(d-2w_1^0)!w_1^0!}{(d-2w_1^0+2r_1)!(w_1^0-r_1)!(q(1-\frac{1}{4}n^4(2/3)^{n/2}))^{r_1}}. \tag{59}$$

В свою очередь, при $n\to\infty$ имеем

$$\frac{(d-2w_1^0)!}{(d-2w_1^0+2r_1)!}<\frac{1}{(d-2w_1^0)^{2r_1}}<\frac{1}{d^{2r_1}\left(1-\frac{4w_1^0}{d}\right)^{r_1}}, \tag{60}$$

$$\frac{w_1^0!}{(w_1^0-r_1)!}=\left(w_1^0\right)^{r_1}\prod_{i=1}^{r_1-1}(1-i/w_1^0)<\left(w_1^0\right)^{r_1}\Big/\prod_{i=1}^{r_1-1}(1+i/w_1^0), \tag{61}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}n^4(2/3)^{n/2}\right)\left(1-\frac{4w_1^0}{d}\right)>1-n^4(2/3)^{n/2}-\frac{4w_1^0}{d}. \tag{62}$$

Пользуясь неравенствами (59)–(62), при $n\to\infty$ получаем

$$|\vec{B}_1(d,w_1^0-r_1)|<|\vec{B}_1(d,w_1^0)|\Big/\left\{\left(1-n^4(2/3)^{n/2}-\frac{4w_1^0}{d}\right)^{r_1} \times\prod_{i=1}^{r_1-1}(1+i/w_1^0)\right\}<|\vec{B}_1(d)|\Big/\left\{\left(1-n^4(2/3)^{n/2}-\frac{4w_1^0}{d}\right)^{r_1} \times\prod_{i=1}^{r_1-1}(1+i/w_1^0)\right\}. \tag{63}$$

Из (56) и (63) следует справедливость леммы 15 при $i=1$.

Предположим, что лемма 15 доказана при $j=1,2,\ldots,i-1$. Убедимся в ее справедливости при $j=i$.

Рассмотрим множество последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{B}_i(d_i)$, в каждой из которых содержится $w_i^0 + r_i$ двухэлементных псевдосвязок первого типа (т. е. псевдосвязок, в которых присутствуют особые наборы первого типа) и $z_i^0 + s_i$ двухэлементных псевдосвязок второго типа, т. е. множество $\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)$ (w_i^0 и z_i^0 взяты из (52) или (53)). Возможны четыре случая: (a) $r_i > 0$ и $s_i > 0$, (b) $r_i > 0$ и $s_i \leqslant 0$; (c) $r_i \leqslant 0$ и $s_i > 0$; (d) $r_i \leqslant 0$ и $s_i \leqslant 0$.

Рассмотрим случай (a). Число фиксаций $w_i^0 + r_i$ двухэлементных подмножеств первого типа равно $d!/\{(d - 2w_i^0 - 2r_i)!(w_i^0 + r_i)!2^{w_i^0 + r_i}\}$. При фиксированных подмножествах первого типа число фиксаций $z_i^0 + s_i$ двухэлементных подмножеств второго типа не превосходит $\binom{d(i-1)}{z_i^0+s_i}\binom{d-2w_i^0-2r_i}{z_i^0+s_i}(z_i^0 + s_i)!$

Аналогично, число фиксаций w_i^0 двухэлементных подмножеств первого типа равно $d!/\{(d-2w_i^0)!(w_i^0)!2^{w_i^0}\}$, а при фиксированных w_i^0 подмножествах первого типа число фиксаций z_i^0 двухэлементных подмножеств второго типа равно $\binom{d(i-1)}{z_i^0}\binom{d-2w_i^0}{z_i^0}z_i^0!$

Повторяя рассуждения, использованные при установлении (56), и распространяя их на подмножества второго типа, нетрудно убедиться, что

$$
\begin{aligned}
&|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)|/|\vec{B}_i(d_i, w_i^0, z_i^0)| \\
&\qquad < \frac{\binom{d(i-1)}{z_i^0+s_i}\binom{d-2w_i^0-2r_i}{z_i^0+s_i}(z_i^0 + s_i)!(d - 2w_i^0)!w_i^0!}{(d - 2w_i^0 - 2r_i)!(w_i^0 + r_i)!\binom{d(i-1)}{z_i^0}\binom{d-2w_i^0}{z_i^0}z_i^0!} \\
&\qquad\quad \times \left(\frac{aq}{2\left(a - \frac{1}{4}n^2 a(2/3)^{n/2}\right)^2}\right)^{r_i} \left(\frac{q}{a - \frac{1}{4}n^4 a(2/3)^{n/2}}\right)^{s_i} \\
&= \frac{w_i^0!z_i^0!(d - 2w_i^0 - z_i^0)!(d(i-1) - z_i^0)!}{(w_i^0 + r_i)!(z_i^0 + s_i)!(d - 2w_i^0 - z_i^0 - 2r_i - s_i)!(d(i-1) - z_i^0 - s_i)!} \\
&\qquad\quad \times \left(\frac{q}{2a\left(1 - \frac{1}{4}n^4(2/3)^{n/2}\right)^2}\right)^{r_i} \left(\frac{q}{a - \frac{1}{4}n^4 a(2/3)^{n/2}}\right)^{s_i} \\
&\qquad < \frac{d^{2r_i+s_i}(d(i-1))^{s_i}}{(w_i^0)^{r_i}(z_i^0)^{s_i}\prod\limits_{j=1}^{r_i-1}(1 + j/w_i^0)\prod\limits_{j=1}^{s_i-1}(1 + j/z_i^0)} \\
&\qquad\qquad \times \left(\frac{q}{2a\left(1 - \frac{1}{2}n^4(2/3)^{n/2}\right)}\right)^{r_i} \left(\frac{q}{a - \frac{1}{2}n^4 a(2/3)^{n/2}}\right)^{s_i}
\end{aligned}
$$

$$< \quad 1 \Big/ \left\{ \left(1 - n^4 (2/3)^{n/2}\right)^{r_i+s_i} \prod_{j=1}^{r_i-1} (1 + j/w_i^0) \prod_{j=1}^{s_i-1} (1 + j/z_i^0) \right\}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i, w_i^0, z_i^0)| \Big/ \left\{ \left(1 - n^4 (2/3)^{n/2}\right)^{r_i+s_i} \right.$$
$$\left. \times \prod_{j=1}^{r_i-1} (1 + j/w_i^0) \prod_{j=1}^{s_i-1} (1 + j/z_i^0) \right\},$$

т. е.

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i)| \Big/ \left\{ \left(1 - n^4 (2/3)^{n/2}\right)^{r_i+s_i} \right.$$
$$\left. \times \prod_{j=1}^{r_i-1} (1 + j/w_i^0) \prod_{j=1}^{s_i-1} (1 + j/z_i^0) \right\}.$$

В случаях (b)–(d) справедливость леммы 15 устанавливается аналогичным способом.

Следствие 2. *Пусть $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ и при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant p$, справедливо неравенство $|r_i| > n\sqrt{w_i^0}$, то при $n \to \infty$*

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i)| \exp(-n^2/3).$$

Аналогично, если $|s_i| > n\sqrt{z_i^0}$, то при $n \to \infty$

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i)| \exp(-n^2/3).$$

Доказательство. Пусть $|r_i| > n\sqrt{w_i^0}$. Тогда нетрудно убедиться, что $n^4(2/3)^{n/2} \Big/ \dfrac{n\sqrt{w_i^0}}{w_i^0} \to 0$ и $\dfrac{w_i^0}{d} \Big/ \dfrac{|r_i|}{w_i^0} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$|\vec{B}_i(d_i, w_i^0 + r_i, z_i^0 + s_i)| < |\vec{B}_i(d_i)| \Big/ \left\{ \left(1 - n^4 (2/3)^{n/2} - \frac{4w_i^0}{d}\right)^{|r_i|} \right.$$
$$\left. \prod_{j=1}^{|r_i|-1} (1 + j/w_i^0) \right\} < |\vec{B}_i(d_i)| \exp(-n^2/3).$$

Аналогично проверяется справедливость второго утверждения следствия 2.

Остается найти асимптотику функций

$$\varphi_1(n) = \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} |\vec{R}_P^9(k_1)(2/3)^{(n+3)k_1/2}(k_1!2^{k_1})^{-1}, \qquad (64)$$

$$\varphi_2(n) = \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} |\vec{R}_P^{10}(k_2)(2/3)^{(n+3)k_2/2}(k_2!2^{k_2})^{-1}. \qquad (65)$$

Прежде всего заметим, что с увеличением длины последовательности, состоящей из наборов множества $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, образующих одноэлементные связки, уменьшается число возможностей для выбора аналогичных последовательностей длины k_2, состоящих из наборов множества $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, и наоборот. Вместе с тем k_1^0 и k_2^0 следует выбрать такими, чтобы произведение $\varphi_1(n)\cdot\varphi_2(n)$ оказалось максимальным. Поэтому сначала не будем фиксировать k_1^0 и k_2^0, а определим их в последнем параграфе статьи.

Ниже будут использоваться обозначения:

$$\lambda = \lambda(n) = \frac{1}{4}(n^2 - 2n - 11), \quad \nu = \nu(n) = \frac{1}{4}(n^2 - 2n + 9). \qquad (66)$$

Величина λ равна числу наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, принадлежащих шару радиуса 2, центром которого является произвольный набор из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ — произвольный набор из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ и $S(\widetilde{\alpha}, 2)$ — множество наборов из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, принадлежащих шару радиуса 2 с центром $\widetilde{\alpha}$. Тогда

$$\nu = |S(\widetilde{\alpha}, 2) \cup \{(0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)\}|.$$

§ 7. Вспомогательные сведения, связанные с функцией $\varphi_1(n)$

Пусть в $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ отобраны r_1 двухэлементных и s_1 линейных трехэлементных связок, t_1 треугольных связок первого вида и v_1 треугольных связок второго вида, а в $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ отобраны r_2 двухэлементных и s_2 линейных трехэлементных связок, t_2 треугольных связок первого вида и v_2 треугольных связок второго вида. При этом предполагается, что

$$|r_1 - r_1^0| \leqslant n\sqrt{r_1^0},\ |s_1 - s_1^0| \leqslant n\sqrt{s_1^0},\ |t_1 - t_1^0| \leqslant n\sqrt{t_1^0},\ |v_1 - v_1^0| \leqslant n\sqrt{v_1^0},$$

$$|r_2 - r_2^0| \leqslant n\sqrt{r_2^0},\ |s_2 - s_2^0| \leqslant n\sqrt{s_2^0},\ |t_2 - t_2^0| \leqslant n\sqrt{t_2^0},\ |v_2 - v_2^0| \leqslant n\sqrt{v_2^0},$$

а r_1^0, s_1^0, t_1^0, v_1^0, r_2^0, s_2^0, t_2^0, v_2^0 определены в (3)–(10).

Последовательность $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \dots \widetilde{\alpha}_{2k}$ двухэлементных связок из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ или $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ назовем *разделенной,* если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 2k$, не принадлежащих одной связке, справедливо неравенство $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) > 4$. В противном случае $\vec{C}$ назовем *неразделенной.*

Как при доказательстве леммы 12 убеждаемся, что можно ограничиться случаем, когда при любом r_1 таком, что $|r_1 - r_1^0| \leqslant n\sqrt{r_1^0}$, в $\vec{R}_P^1(r_1)$ имеется менее $\dfrac{1}{2^7} an^6 (2/3)^{2n} |\vec{R}_P^1(r_1)|$ неразделенных последовательностей. Аналогично можно ограничиться случаем, когда при любом r_2 таком, что $|r_2 - r_2^0| \leqslant n\sqrt{r_2^0}$, в $\vec{R}_P^5(r_2)$ имеется менее $\dfrac{1}{2^7} bn^6 (2/3)^{2n} |\vec{R}_P^5(r_2)|$ неразделенных последовательностей. Поэтому при подсчете числа последовательностей длины не более $a(2/3)^{n/2}$, каждая из которых состоит из наборов множества $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, принадлежащих одноэлементным связкам, можно ограничиться рассмотрением только разделенных последовательностей из $\vec{R}_P^1(r_1)$ и $\vec{R}_P^5(r_2)$.

Пусть выбраны разделенная последовательность $\vec{C}_1$ из $\vec{R}_P^1(r_1)$ и разделенная последовательность $\vec{C}_2$ из $\vec{R}_P^5(r_2)$. Обозначим через T_1 множество наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, принадлежащих объединению шаров радиуса 2, центрами которых являются наборы из $\vec{C}_1$, а через T_2 множество наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, которые принадлежат 2-проекции множества наборов из $E_{1,1}^{n,(n+1)/2}$, являющихся противоположными к наборам из $\vec{C}_2$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$|T_1| = \left(\frac{1}{2}(n-5)(n+3) - (n-3) \right) r_1 = \frac{1}{2}(n^2 - 4n - 9) r_1, \tag{67}$$

$$|T_2| = \frac{1}{4}(n-3)^2 r_2. \tag{68}$$

Так как $|r_1 - r_1^0| \leqslant n\sqrt{r_1^0}$ и $|r_2 - r_2^0| \leqslant n\sqrt{r_2^0}$, а $n\sqrt{r_1^0} < n^{-7}(3/2)^{n/2}$ и $n\sqrt{r_2^0} < n^{-7}(3/2)^{n/2}$ при $n \to \infty$, то согласно лемме 3 величины r_1 и r_2 из (67) и (68) можно заменить соответственно на r_1^0 и r_2^0. Положим

$$\tau = |T_1| + |T_2| = \frac{1}{2}(n^2 - 4n - 9) r_1^0 + \frac{1}{4}(n-3)^2 r_2^0. \tag{69}$$

Далее, обозначим через T_3 множество наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, принадлежащих объединению шаров радиуса 2, центрами которых являются наборы из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, входящие в трехэлементные связки, а через T_4 множество наборов из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, которые принадлежат 2-проекции множества наборов из $E_{1,1}^{n,(n+1)/2}$, являющихся противоположными к наборам из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, принадлежащим трехэлементным связкам.

При разделенных $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ оценим сверху и снизу число последовательностей $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{R}_P^9(k)$ при $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$. Ясно, что в $\vec{C}$ не могут присутствовать наборы из множества $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, а любой набор из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ является 2-неразделенным с любым уже отобранным набором. Вместе с этим наборы из $T_3 \cup T_4$ можно «не замечать», поскольку s_1, t_1, v_1, s_2, t_2 и v_2 удовлетворяют условию леммы 3.

Далее будем полагать, что наборы в последовательностях из $\vec{R}_P^9(k)$ находятся на расстоянии не менее 6 от любого набора из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, принадлежащего произвольной двухэлементной связке, и от всех наборов из T_2. Такое допущение возможно в силу леммы 3 и того факта, что при любом $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ в $\vec{R}_P^9(k)$ имеется не более $2^{-5}kn^6(2/3)^n|\vec{R}_P^9(k)|$ последовательностей длины k, в каждой из которых содержится более $2^{-5}kn^6(2/3)^n$ наборов, о которых только что говорилось (доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 14).

Наконец, будем рассматривать только такие последовательности из $\vec{R}_P^9(k)$, в каждой из которых имеется не более $\dfrac{1}{2^{10}}an^8(2/3)^{3n/2}$ трехэлементных псевдосвязок. Такое ограничение допустимо в силу следствия 1. Вместе с тем согласно лемме 3 можно «не замечать» такие псевдосвязки.

Все последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{R}_P^9(k)$ с перечисленными ограничениями можно получить следующим способом. Сначала отбирается произвольный набор $\widetilde{\alpha}_1$ (имеется $a-\tau$ возможностей, где τ взято из (69)). Затем отбирается набор $\widetilde{\alpha}_2$. Число способов его выбора равно $a - \tau - |S(\widetilde{\alpha}_1, 2)| = (\text{см. } (66)) = a - \tau - \nu = a - \tau - \dfrac{1}{4}(n^2 - 2n - 11)$.

Пусть наборы $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_j$ уже отобраны. Тогда для выбора набора $\widetilde{\alpha}_{j+1}$ имеется

$$a - \tau - \left| \left(\bigcup_{\ell=1}^{j} S(\widetilde{\alpha}_\ell, 2) \right) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2} \right|$$

возможностей.

Если наборы $\widetilde{\alpha}_j$ и $\widetilde{\alpha}_h$ таковы, что $\rho(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_h) > 4$, то

$$\begin{aligned}|(S(\widetilde{\alpha}_j, 2) \cup S(\widetilde{\alpha}_h, 2)) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}| &= 2|(S(\widetilde{\alpha}_j, 2) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}| \\ &= 2\lambda = \frac{1}{2}(n^2 - 2n - 11). \quad (70)\end{aligned}$$

Если $\rho(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_h) = 4$, то

$$|(S(\widetilde{\alpha}_j, 2) \cup S(\widetilde{\alpha}_h, 2)) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}| = 2\lambda - 4. \tag{71}$$

Следовательно, если в $\vec{C}$ имеется y двухэлементных псевдосвязок, то

$$\left|\left(\bigcup_{\ell=1}^{j} S(\widetilde{\alpha}_\ell, 2)\right) \cap E_{1,1}^{n,(n-3)/2}\right| = \lambda j - 4y.$$

Согласно следствию 2 можно ограничиться рассмотрением только таких $\vec{C}$, что в i-м блоке последовательности $\vec{C}$, $i \geqslant 1$, имеется не менее $w_i^0 + z_i^0 - n\left(\sqrt{w_i^0} + \sqrt{z_i^0}\right)$ и не более $w_i^0 + z_i^0 + n\left(\sqrt{w_i^0} + \sqrt{z_i^0}\right)$ особых наборов, где w_i^0 и z_i^0 взяты из (52).

Пусть уже имеется последовательность $\vec{C}$, состоящая из $r-1$ блоков длины d такая, что в h-м блоке, $1 \leqslant h \leqslant r-1$, имеется не менее $w_h^0 + z_h^0 - n\left(\sqrt{w_h^0} + \sqrt{z_h^0}\right)$ и не более $w_h^0 + z_h^0 + n\left(\sqrt{w_h^0} + \sqrt{z_h^0}\right)$ особых наборов.

Оценим сверху число способов получения r-го блока, в котором должно быть не менее $w_r^0 + z_r^0 - n\left(\sqrt{w_r^0} + \sqrt{z_r^0}\right)$ и не более $w_r^0 + z_r^0 + n\left(\sqrt{w_r^0} + \sqrt{z_r^0}\right)$ особых наборов. Ясно, что число способов заполнения позиций r-го блока не зависит от расположения особых наборов в предшествующих блоках, а зависит только от их числа. Вместе с тем при заданном числе особых наборов в r-м блоке число способов заполнения позиций в этом блоке максимально, когда все особые наборы находятся в его начале. Пользуясь этими двумя фактами и соотношениями (70), (71), получаем, что это число не превосходит величины

$$\prod_{\ell=1}^{d} \Big\{a - \tau - \lambda d(r-1) - \lambda(\ell - 1) + 4\sum_{h=1}^{r}\left(w_h^0 + z_h^0 + n\left(\sqrt{w_h^0} + \sqrt{z_h^0}\right)\right)\Big\}. \tag{72}$$

Если число блоков в последовательностях из $\vec{R}_P^9(k)$ равно p (ниже полагается, что $dp = k$; в случае, когда $dp \neq k$, доказательство аналогично), то из (72) следует, что

$$|\vec{R}_P^9(k)| < (1 + o(1)) \prod_{i=1}^{p} \prod_{\ell_i=1}^{d} \{a - \tau - \lambda d(i-1) - \lambda(\ell_i - 1)$$

$$+4\sum_{h_j=1}^{i}\left(w^0_{h_j}+z^0_{h_j}+4n\left(\sqrt{w^0_{h_j}}+\sqrt{z^0_{h_j}}\right)\right)\Bigg\}.$$

В свою очередь, из (52) следует, что при любом i, $1\leqslant i\leqslant p$, и $n\to\infty$

$$\sum_{h_j=1}^{d}\left(4n\left(\sqrt{w^0_{h_j}}+\sqrt{z^0_{h_j}}\right)\right)<4nd\left(\sqrt{w^0_p}+\sqrt{z^0_p}\right).$$

Поэтому при $n\to\infty$ имеем

$$|\vec{R}^9_P(k)|<(1+o(1))\prod_{i=1}^{p}\prod_{\ell_i=1}^{d}\Bigg\{a-\tau-\lambda d(i-1)-\lambda(\ell_i-1)$$
$$+\,4\sum_{h_j=1}^{i}\left(w^0_{h_j}+z^0_{h_j}\right)\left(1+\frac{4nd\left(\sqrt{w^0_p}+\sqrt{z^0_p}\right)}{a-\tau-\lambda k}\right)\Bigg\}. \qquad (73)$$

Пользуясь (50)–(52) нетрудно убедиться, что если $k\leqslant a(2/3)^{n/2}$, то при $n\to\infty$

$$1+\frac{4nd\left(\sqrt{w^0_p}+\sqrt{z^0_p}\right)}{a-\tau-\lambda k}=1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right). \qquad (74)$$

Из (73) и (74) следует, что при $n\to\infty$

$$|\vec{R}^9_P(k)|<(1+o(1))\prod_{i=1}^{p}\prod_{\ell_i=1}^{d}\Bigg\{a-\tau-\lambda d(i-1)-\lambda(\ell_i-1)$$
$$+\,4\sum_{h_j=1}^{i}\left(w^0_{h_j}+z^0_{h_j}\right)\Bigg\}<a^k(1+o(1))\prod_{i=1}^{p}\prod_{\ell_i=1}^{d}\Bigg\{1-\Bigg[\tau+\lambda d(i-1)$$
$$+\,\lambda(\ell_i-1)-4\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w^0_{h_j}+z^0_{h_j}\right)\Bigg]a^{-1}\Bigg\}$$
$$=a^k(1+o(1))\exp\Bigg\{\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\ln\Bigg[1-\Bigg[\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1)$$
$$-\,4\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w^0_{h_j}+z^0_{h_j}\right)\Bigg]a^{-1}\Bigg\}$$
$$\sim a^k\exp\Bigg\{-\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\sum_{s=1}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1)$$

$$- 4\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)\Big]^s/(sa^s)\Big\}\Big\}$$

$$\sim a^k\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\sum_{s=1}^{2}\Big\{\Big[\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1)$$

$$- 4\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)\Big]^s\Big/(sa^s)\Big\}\Big\}$$

$$= a^k\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\Big[\frac{1}{a}\Big(\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1)$$

$$- 4\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)\Big)+\frac{1}{2a^2}(\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1))^2$$

$$- \frac{4}{a^2}(\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1))\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)$$

$$+ \frac{8}{a^2}\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\left(\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)\right)^2\Big]\Big\}. \qquad (75)$$

В свою очередь, пользуясь (52), при $n\to\infty$ получаем

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\left\{\frac{1}{a}\Big(\tau+\lambda d(i-1)+\lambda(\ell_i-1)\Big)\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\tau k+\frac{1}{2}\lambda k^2\right)+o(1), \qquad (76)$$

$$\frac{4}{a^2}\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\sum_{h_j=1}^{i}\left(w_{h_j}^0+z_{h_j}^0\right)$$

$$=\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}\sum_{h_j=1}^{i}\frac{4d^2q}{a^2}\left(h_j+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}2d^2qi(i+2)a^{-2}$$

$$=\left(1+o\left(\frac{a^2}{qk^3}\right)\right)\sum_{i=1}^{p}2d^3qi(i+2)a^{-2}$$

$$= \frac{2d^3p^3q}{3a^2} + o(1) = \frac{2qk^3}{3a^2} + o(1), \tag{77}$$

$$\frac{1}{2a^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}(\tau + \lambda d(i-1) + \lambda(\ell_i - 1))^2$$
$$= \frac{1}{2a^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{d}(\lambda d(i-1))^2 + o(1) = \frac{1}{2a^2}\sum_{i=1}^{p}\lambda^2 d^3 i^2 + o(1)$$
$$= \frac{\lambda^2 k^3}{6a^2} + o(1), \tag{78}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell_i=1}^{i}\Biggl\{ \frac{4}{a^2}(\tau + \lambda d(i-1) + \lambda(\ell_i - 1))\sum_{h_j=1}^{i}\Bigl(w^0_{h_j} + z^0_{h_j}\Bigr)$$
$$-\frac{8}{a^2}\left(\sum_{h_j=1}^{i}\Bigl(w^0_{h_j} + z^0_{h_j}\Bigr)\right)^2\Biggr\} = o(1). \tag{79}$$

Поставив (76)–(79) в (75), при $n \to \infty$ получаем

$$|\vec{R}^9_P(k)| < a^k(1 + o(1))\exp\left(-\frac{\tau k}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k^3}{6a^2} + \frac{2qk^3}{3a^2}\right). \tag{80}$$

Ясно, что при заданном заполнении первых $r-1$ блоков последовательности число заполнений в r-м блоке минимально, когда все особые наборы этого блока находятся в его конце. Пользуясь этим фактом и рассуждениями, которые были использованы при доказательстве неравенства (80), нетрудно убедиться, что если $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ и $n \to \infty$, то

$$|\vec{R}^9_P(k)| > a^k(1 - o(1))\exp\left(-\frac{\tau k}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k^3}{6a^2} + \frac{2qk^3}{3a^2}\right). \tag{81}$$

Из (80) и (81) следует, что при любом $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ и $n \to \infty$

$$|\vec{R}^9_P(k)| \sim a^k \exp\left(-\frac{\tau k}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k^3}{6a^2} + \frac{2qk^3}{3a^2}\right). \tag{82}$$

Пусть

$$g(k) = \frac{a^k}{k!2^k}(2/3)^{(n+3)k/2}\exp\left(-\frac{\tau k}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k^3}{6a^2} + \frac{2qk^3}{3a^2}\right), \tag{83}$$

$$z(n) = \frac{\tau}{a} + \frac{1}{2}\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{2}q(2/3)^{n+3} - \frac{1}{4}\lambda^2(2/3)^{n+3}, \tag{84}$$

$$h(k) = g(k)/g(k-1) = \frac{a}{2k\exp\, z_1(k)}(2/3)^{(n+3)/2}, \tag{85}$$

где

$$z_1(k) = \frac{\tau}{a} + \frac{\lambda k}{a} + \frac{\lambda^2 k^2}{2a^2} - \frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^2 k}{2a^2} + \frac{\lambda^2}{6a^2} - \frac{2qk^2}{a^2} + \frac{2qk}{a^2} - \frac{2q}{3a^2}. \tag{86}$$

Лемма 16. *В интервале* $[1,a]$ *функция*

$$h(x) = \frac{a}{2x \exp\, z_1(x)} (2/3)^{3(n+3)/2}$$

от действительной переменной x *убывает и равна* 1 *при*

$$x = x_1 = \frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} (1 - z(n) + \mu_1 \lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2}), \tag{87}$$

где $|\mu_1| < c$, *а* c *— не зависящая от* n *подходящая положительная константа.*

Доказательство. Пусть $\psi(x) = \ln\, x + z_1(x)$. Тогда при $n \to \infty$ первая производная $\psi'(x)$ равна

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda^2 x}{a^2} - \frac{\lambda^2}{2a^2} - \frac{4qx}{a^2} + \frac{2q}{a^2} > \frac{\lambda^2 x}{a^2} - \frac{4qx}{a^2} > 0,$$

поскольку $\lambda^2 - 4q > 0$ (см. (51) и (66)). Следовательно, в интервале $[1,a]$ при $n \to \infty$ функция $\psi(x)$ возрастает и положительна. Поэтому в этом интервале функция $h(x)$ убывает. Вместе с этим $h(2) = g(2)/g(1) > 1$ и $h(a) < 1$. Следовательно, в интервале $[1,a]$ функция $h(x)$ равна 1 при единственном x.

Убедимся, что $h(x) = 1$ при $x = x_1$. Действительно, из (86) и (87) следует, что

$$h(x_1) = 1/\{(1 - z(n) + \mu_1 \lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2}) \exp\, z_1(x_1)\}. \tag{88}$$

Положим

$$z_2(n) = z(n) - \mu_1 \lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&1 - z(n) + \mu_1 \lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2} = 1 - z_2(n) = \exp(\ln(1 - z_2(n)))\\
&= \exp\left(-\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} z_2^s(n)\right)\right) = \exp\left(-\sum_{s=1}^{2} \left(\frac{1}{s} z_2^s(n)\right)\right.\\
&+ O\left(\lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2}\right)\Bigg) = \exp\Bigg(-\frac{\tau}{a} - \frac{1}{2}\lambda (2/3)^{(n+3)/2} + \frac{1}{2} q (2/3)^{n+3}\\
&+ \frac{1}{8}\lambda^2 (2/3)^{n+3} + \mu_1 \lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2} + O(\lambda^3 (2/3)^{3(n+3)/2})\Bigg).
\end{aligned} \tag{89}$$

В свою очередь, из (86) следует, что при $k = \lfloor x_1 \rfloor$ и $n \to \infty$

$$\begin{aligned} z_1(k) = {} & \frac{\tau}{a} + \frac{\lambda k}{a} + \frac{\lambda^2 k^2}{2a^2} - \frac{2qk^2}{a^2} + O((2/3)^{3(n+3)/2}) \\ = {} & \frac{\tau}{a} + \frac{1}{2}\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{8}\lambda^2(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2}q(2/3)^{n+3} \\ & + O(\lambda^3(2/3)^{3(n+3)/2}). \end{aligned} \tag{90}$$

Подставив (89) и (90) в (88), получаем

$$h(x_1) = \exp(-\mu_1\lambda^3(2/3)^{3(n+3)/2} + O(\lambda^3(2/3)^{3(n+3)/2})). \tag{91}$$

В зависимости от выбора параметра μ_1, $|\mu_1| < c$, правая часть из (91) может оказаться либо больше, либо меньше 1. Отсюда следует справедливость второго утверждения леммы. Лемма 16 доказана.

Выше отмечалось, что в качестве k_1 надо брать величину, меньшую правой части равенства (87). В дальнейшем убедимся, что эта величина меньше правой части из (87) на величину, по порядку равную $n^2a(2/3)^{n+3}$.

Лемма 17. *Пусть*

$$y = y(n) = \frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2}(1 - z_3(n)), \tag{92}$$

где

$$\begin{aligned} z_3(n) = {} & \frac{\tau}{a} + \frac{1}{2}\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{2}q(2/3)^{n+3} - \frac{1}{4}\lambda^2(2/3)^{n+3} \\ & + x(2/3)^{(n+3)/2} = z(n) + x(2/3)^{(n+3)/2}, \end{aligned} \tag{93}$$

$$k_0 = \lfloor y \rfloor \ \textit{и}\ \alpha = y - \lfloor y \rfloor = y - k_0. \tag{94}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} g(k_0) \sim {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0}} \exp\bigg(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{8}\lambda a(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2} \\ & + \frac{1}{24}\lambda^2 a(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{1}{12}qa(2/3)^{3(n+3)/2} - \frac{1}{4}x^2a(2/3)^{3(n+3)/2}\bigg). \end{aligned} \tag{95}$$

Доказательство. Пользуясь формулой Стирлинга (см., например, [5]), при $k_0 \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0!} \sim \frac{e^{k_0}}{\sqrt{2\pi k_0}k_0^{k_0}} = {} & \frac{e^{y-\alpha}}{\sqrt{2\pi k_0}(y-\alpha)^{y-\alpha}} \\ & = \frac{e^{y-\alpha}}{\sqrt{2\pi k_0}y^{y-\alpha}(1-\frac{\alpha}{y})^{y-\alpha}} \sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi k_0}y^{k_0}}. \end{aligned} \tag{96}$$

Следовательно,

$$g(k_0) \sim \frac{a^{k_0}}{\sqrt{2\pi k_0} y^{k_0} 2^{k_0}} (2/3)^{(n+3)k_0/2} \exp\left(y - \frac{\tau k_0}{a} - \frac{\lambda k_0^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k_0^3}{6a^2} + \frac{2qk_0^3}{3a^2} \right)$$
$$= (\text{см. (92)–(94)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0}(1-z_3)^{k_0}} \exp\left(y - \frac{\tau k_0}{a} - \frac{\lambda k_0^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k_0^3}{6a^2} + \frac{2qk_0^3}{3a^2} \right). \quad (97)$$

Далее имеем

$$(1-z_3)^{k_0} = \exp(k_0 \ln(1-z_3)) = \exp\left(-k_0 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} z_3^s \right) \right)$$
$$\sim \exp\left(-k_0 \sum_{s=1}^{2} \left(\frac{1}{s} z_3^s \right) \right) = \exp\left(-\frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} (1-z_3) \left(z_3 + \frac{1}{2} z_3^2 \right) \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} \left(z_3 - \frac{1}{2} z_3^2 - \frac{1}{2} z_3^3 \right) \right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} \left(z_3 - \frac{1}{2} z_3^2 \right) \right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} \left(z_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \lambda (2/3)^{(n+3)/2} + x (2/3)^{(n+3)/2} \right)^2 \right) \right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2} a (2/3)^{(n+3)/2} z_3 + \frac{1}{4} a (2/3)^{3(n+3)/2} \left(\frac{1}{2} \lambda + x \right)^2 \right)$$
$$= \exp\Bigg(-\frac{1}{2} \tau (2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{4} \lambda a (2/3)^{n+3} - \frac{1}{2} x a (2/3)^{n+3}$$
$$+ \frac{3}{16} \lambda^2 a (2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{1}{4} q a (2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{1}{4} x \lambda a (2/3)^{3(n+3)/2}$$
$$+ \frac{1}{4} x^2 a (2/3)^{3(n+3)/2} \Bigg). \quad (98)$$

Теперь найдем асимптотику для величины

$$z_4 = \exp\left(y - \frac{\tau k_0}{a} - \frac{\lambda k_0^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k_0^3}{6a^2} + \frac{2qk_0^3}{3a^2} \right). \quad (99)$$

Воспользовавшись (92)–(94), имеем

$$\exp y = \exp\left(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2}(1-z_3)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{4}\lambda a(2/3)^{n+3} + \frac{1}{4}qa(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{1}{8}\lambda^2 a(2/3)^{3(n+3)/2} - \frac{1}{2}xa(2/3)^{n+3}\right), \tag{100}$$

$$\exp\left(-\frac{\tau k_0}{a}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2}(1-z_3)\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2}\right), \tag{101}$$

$$\exp\left(-\frac{\lambda k_0^2}{2a}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{8}\lambda a(2/3)^{n+3}(1-z_3)^2\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{8}\lambda a(2/3)^{n+3}\left(1-\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - 2x(2/3)^{(n+3)/2}\right)\right), \tag{102}$$

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2 k_0^3}{6a^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{48}\lambda^2 a(2/3)^{3(n+3)/2}(1-z_3)^3\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{48}\lambda^2 a(2/3)^{3(n+3)/2}\right), \tag{103}$$

$$\exp\left(\frac{2qk_0^3}{3a^2}\right) \sim \exp\left(\frac{1}{12}qa(2/3)^{3(n+3)/2}\right). \tag{104}$$

Подставив (100)–(104) в (99), получаем

$$z_4 \sim \exp\left(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{3}{8}\lambda a(2/3)^{n+3} - \tau(2/3)^{(n+3)/2} + \frac{11}{48}\lambda^2 a(2/3)^{3(n+3)/2} + \frac{1}{3}qa(2/3)^{3(n+3)/2} - \frac{1}{2}xa(2/3)^{n+3} + \frac{1}{4}x\lambda a(2/3)^{3(n+3)/2}\right). \tag{105}$$

Наконец, подставив (98) и (105) в (97), получаем (95). Лемма 17 доказана.

§ 8. Вспомогательные сведения, связанные с функцией $\varphi_2(n)$

Пусть заданы разделенная последовательность $\vec{C}_1$ из $\vec{R}_P^1(r_1^0)$, разделенная последовательность $\vec{C}_2 = \widetilde{\alpha}_1 \dots \widetilde{\alpha}_{r_2^0}$ из $\vec{R}_P^5(r_2^0)$ и последовательность $\vec{C}_3$ из $\vec{R}_P^9(k_0)$, в которой нет псевдосвязок размера не менее 4. Используя рассуждения из § 7, «забудем» про наличие в $\vec{C}_3$ трехэлементных псевдосвязок и будем полагать, что в $\vec{C}_3$ имеется

$$u = \left\lfloor \frac{1}{2}\binom{(n-5)/2}{2}\binom{(n+3)/2}{2}k_0^2a^{-1}\right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{1}{2^7}(n+3)(n+1)(n-5)(n-7)k_0^2a^{-1}\right\rfloor \tag{106}$$

двухэлементных псевдосвязок (эта величина равна среднему числу двухэлементных псевдосвязок в случайной последовательности из $\vec{R}_P^9(k_0)$).

Вместо T_1 из (67) и T_2 из (68) будем рассматривать множества T_5, T_6 и T_7 такие, что

$$T_5 = P^2(\overline{\vec{C}}_1),\ T_6 = P^2(\overline{\vec{C}}_3),\ T_7 = \bigcup_{\widetilde{\alpha}_i \in \vec{C}_2} ((S(\widetilde{\alpha}_i, 2) \cap E^{n,(n-1)/2}) \cup \{\widetilde{\beta}_i\}),$$

где $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\beta}_i$ различаются в каждой компоненте, начиная со второй (первые компоненты в $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\beta}_i$ равны 0).

Нетрудно понять, что при соблюдении перечисленных ограничений множества T_5, T_6 и T_7 не пересекаются и справедливы равенства:

$$|T_5| = \left(\binom{(n+3)/2}{2} + \binom{(n+1)/2}{2}\right) r_1^0 = \frac{1}{4}(n+1)^2 r_1^0, \tag{107}$$

$$|T_6| = \binom{(n+3)/2}{2}k_0 - u = \frac{1}{8}(n+1)(n+3)k_0 - u, \tag{108}$$

$$|T_7| = \nu r_2^0, \tag{109}$$

где ν взято из (66).

Положим

$$\tau_1 = |T_5| + |T_6| + |T_7|. \tag{110}$$

Перейдем к рассматрению последовательностей из $\vec{R}_P^{10}(k)$ при $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$. Сначала перечислим ограничения, которым удовлетворяют рассматриваемые последовательности.

Во-первых, для последовательностей из $\vec{R}_P^{10}(k)$ справедлив аналог леммы 13. Поэтому рассматриваются только такие последовательности, в которых нет псевдосвязок размера не менее 4.

Во-вторых, разъяснения из § 7, относящиеся к трехэлементным псевдосвязкам в последовательностях из $\vec{R}_P^9(k)$, остаются в силе для последовательностей из $\vec{R}_P^{10}(k)$. Поэтому в рассматриваемых последовательностях из $\vec{R}_P^{10}(k)$ мы не будем «замечать» трехэлементные псевдосвязки.

В-третьих, можно пользоваться аналогом леммы 15, который получается из нее заменой множества $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ на $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ и величины q из (51) на величину

$$q_1 = \binom{(n-1)/2}{2}^2 = \frac{1}{2^6}(n^4 - 8n^3 + 22n^2 - 24n + 9), \qquad (111)$$

равную числу наборов в $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, находящихся на расстоянии 4 от произвольного набора из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$. При этом надо заменить a на b из (2) и положить

$$w_i^0 = \lceil d^2 q_1/(2b)\rceil, \quad z_i^0 = \lceil d^2 q_1 (i-1) b^{-1}\rceil, \quad i \geqslant 1.$$

В-четвертых, в последовательностях из $\vec{R}_P^{10}(k)$, как правило, присутствуют пары далеких наборов, т. е. таких двух наборов, в которых имеется точно одна общая единичная компонента (потребность рассмотрения далеких наборов в последовательностях из $\vec{R}_P^9(k)$ не возникала).

Пусть $\widetilde{\alpha} = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (0, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — далекие наборы из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, $\widetilde{\alpha}' = (0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ и $\widetilde{\beta}' = (0, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n)$. Тогда $\widetilde{\alpha}' \in S(\widetilde{\beta}, 2)$ и $\widetilde{\beta}' \in S(\widetilde{\alpha}, 2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |(S(\widetilde{\alpha},2) \cup S(\widetilde{\beta},2) \cup \{\widetilde{\alpha}'\} \cup \{\widetilde{\beta}'\}) \cap E_{1,0}^{n,(n-1)/2}| &= 2|S(\widetilde{\alpha},2) \cap E_{1,0}^{n,(n-1)/2}| \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 5) = ((\text{см. } (66)) = 2\nu - 2. \qquad (112) \end{aligned}$$

Если наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ не являются далекими и $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) > 4$, то $\widetilde{\alpha}' \notin S(\widetilde{\beta}, 2)$ и $\widetilde{\beta}' \notin S(\widetilde{\alpha}, 2)$. Следовательно,

$$|(S(\widetilde{\alpha},2) \cup S(\widetilde{\beta},2) \cup \{\widetilde{\alpha}'\} \cup \{\widetilde{\beta}'\}) \cap E_{1,0}^{n,(n-1)/2}| = 2\nu. \qquad (113)$$

Пусть $\vec{C}$ — такая последовательность из $\vec{R}_P^{10}(k)$, в которой нет пересекающихся пар далеких наборов, и пусть $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ — пара таких далеких наборов, что $\widetilde{\alpha}$ предшествует $\widetilde{\beta}$ в $\vec{C}$. Тогда набор $\widetilde{\beta}$ назовем *парным* в $\vec{C}$ (как и в случае особых наборов различаются парные наборы первого и второго типов).

Обозначим через q_2 число наборов в $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, далеких от произвольного набора из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$. Очевидно, что

$$q_2 = \frac{1}{4}(n-1)^2. \tag{114}$$

Теперь можно воспользоваться аналогом леммы 15, который получается из нее заменой $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$ на $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$, a на b (см. (2)), q на q_2, и считать, что в блоке B_i, $i \geqslant 1$, содержится $w_i^0 = \lceil d^2 q_2/(2b)\rceil$ парных наборов первого типа и $z_i^0 = \lceil d^2 q_2 (i-1) b^{-1}\rceil$ парных наборов второго типа.

Далее, пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из $\vec{C}_1$. Обозначим через $S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}))$ множество таких наборов $\widetilde{\beta}$ из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2} \backslash P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})$, что $\widetilde{\beta}$ находится на расстоянии 2 по крайней мере от одного набора из $P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})$. Нетрудно убедиться, что каждый набор из $S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}))$ находится на расстоянии 2 от трех наборов из $S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}))$ и

$$|S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}))| = \frac{1}{2}(n-5)\binom{(n+3)/2}{3} = \frac{1}{2^5 \cdot 3}(n+3)(n+1)(n-1)(n-5) \stackrel{def}{=} q_3.$$

По лемме 3 можно «забыть» про наборы из $\vec{C}_1$, расстояние между которыми не превосходит 8. В этом случае имеем

$$\left| \bigcup_{\widetilde{\alpha} \in \vec{C}_1} S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})) \right| = q_3 k_1.$$

Ясно, что при включении наборов из $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ в последовательность $\vec{C}_4$ длины k, состоящую из одноэлементных связок, можно ограничиться случаем, когда в $\vec{C}_4$ окажется не менее $q_3 k_1 k b^{-1} - n\sqrt{q_3 k_1 k b^{-1}}$ и не более $q_3 k_1 k b^{-1} + n\sqrt{q_3 k_1 k b^{-1}}$ наборов из $\bigcup\limits_{\widetilde{\alpha} \in \vec{C}_1} S_1(P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}))$, и считать, что эти наборы расположены в $\vec{C}_4$ «почти равноудаленно».

Воспользовавшись этим фактом, доказательством соотношения (82), а также равенствами (66) и (114), убеждаемся, что при $n \to \infty$

$$|\vec{R}_P^{10}(k)| \sim b^k \exp\biggl(-\frac{\nu k^2}{2b} - \frac{\tau_1 k}{b} - \frac{1}{2b^2}\sum_{i=1}^{k}(\tau_1 + \nu i)^2 + \frac{2q_1 k^3}{3b^2} + \frac{q_2 k^3}{3b^2} + \gamma\biggr),$$

где $\gamma = \dfrac{q_3k_1k}{b}\cdot\dfrac{3k}{2b}+o(1) = \dfrac{3}{2b^2}q_3k_1k^2+o(1)$.

Следовательно,

$$|\vec{R}_P^{10}(k)| \sim b^k \exp\biggl(-\frac{\nu k^2}{2b} - \frac{\tau_1 k}{b} - \frac{\tau_1^2 k}{2b^2} - \frac{\nu\tau_1 k^2}{2b^2} - \frac{\nu^2 k^3}{6b^2} + \frac{2q_1k^3}{3b^2} + \frac{q_2k^3}{3b^2} + \frac{3}{2b^2}q_3k_1k^2\biggr). \tag{115}$$

Пусть

$$g_1(k) = \frac{b^k}{k!2^k}(2/3)^{(n-1)k/2}\exp\biggl(-\frac{\nu k^2}{2b} - \frac{\tau_1 k}{b} - \frac{\tau_1^2 k}{2b^2} - \frac{\nu\tau_1 k^2}{2b^2} + \frac{3q_3k_1k^2}{2b^2} - \frac{\nu^2k^3}{6b^2} + \frac{2q_1k^3}{3b^2} + \frac{q_2k^3}{3b^2}\biggr), \tag{116}$$

$$z_5 = z_5(n) = \frac{\tau_1}{b} + \frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{2}q_1(2/3)^{n-1} - \frac{1}{4}q_2(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2b}\nu\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{4}\nu^2(2/3)^{n-1} - \frac{3}{2b}q_3k_1(2/3)^{(n-1)/2}, \tag{117}$$

$$h_1(k) = g_1(k)/g_1(k-1) = \frac{b}{2k\exp\, z_6(k)}(2/3)^{(n-1)/2}, \tag{118}$$

где

$$z_6 = z_6(k) = \frac{\nu k}{b} + \frac{\tau_1}{b} + \frac{\tau_1^2}{2b^2} - \frac{\nu}{2b} + \frac{\nu\tau_1 k}{b^2} - \frac{\nu\tau_1}{2b^2} + \frac{\nu^2k^2}{2b^2} - \frac{\nu^2 k}{2b^2} + \frac{\nu^2}{6b^2} - \frac{2q_1k^2}{b^2} + \frac{2q_1k}{b^2} - \frac{2q_1}{3b^2} - \frac{q_2k^2}{b^2} + \frac{q_2k}{b^2} - \frac{q_2}{3b^2} - \frac{3q_3k_1k}{b^2} + \frac{3q_3k_1}{2b^2}. \tag{119}$$

Лемма 18. *В интервале $[1,b]$ функция*

$$h_1(x) = \frac{b}{2x\exp\, z_6(x)}(2/3)^{(n-1)/2} \tag{120}$$

от действительной переменной x убывает и равна 1 при

$$x = x_2 = \frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}(1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2}),$$

где $|\mu_2| \leqslant c$, а c — не зависящая от n подходящая положительная константа.

Доказательство. Как при доказательстве леммы 16 убеждаемся, что в интервале $[1, b]$ функция $\psi_1(x) = \ln x + z_6(x)$ возрастает и положительна. Следовательно, в этом интервале функция $h_1(x)$ убывает. Вместе с этим $h_1(2) = g_1(2)/g_1(1) > 1$ и $h_1(b) < 1$. Поэтому в интервале $[1, b]$ функция $h_1(x)$ равна 1 при единственном x.

Убедимся в том, что $h_1(x) = 1$ при $x = x_2$. Действительно, из (120) следует, что

$$h_1(x_2) = 1/\{(1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})\exp z_6(x_2)\}. \tag{121}$$

Пользуясь рассуждениями из доказательства соотношения (90), получаем

$$\begin{aligned} 1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2} = \exp\Big(- z_5(n) - \frac{1}{2}z_5^2(n) \\ + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2} + O(\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})\Big) = \exp\Big(- \frac{\tau_1}{b} - \frac{\tau_1^2}{2b^2} \\ - \frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{8}\nu^2(2/3)^{n-1} + \frac{1}{2}q_1(2/3)^{n-1} + \frac{1}{4}q_2(2/3)^{n-1} \\ + \frac{3}{2b}q_3k_1(2/3)^{(n-1)/2} + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2} + O(\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})\Big). \end{aligned} \tag{122}$$

В свою очередь, пользуясь (119), при $n \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} z_6(k_3) = \frac{\tau_1}{b} + \frac{\tau_1^2}{2b^2} + \frac{\nu k_3}{b} + \frac{\nu\tau_1 k_3}{b^2} + \frac{\nu^2 k_3^2}{2b^2} - \frac{2q_1k_3^2}{b^2} - \frac{q_2k_3^2}{b^2} \\ - \frac{3}{2b}q_3k_1(2/3)^{(n-1)/2} + O(\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2}) = \frac{\tau_1}{b} + \frac{\tau_1^2}{2b^2} \\ + \frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{8}\nu^2(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2}q_1(2/3)^{n-1} - \frac{1}{4}q_2(2/3)^{n-1} \\ - \frac{3q_3k_1}{2b}(2/3)^{(n-1)/2} + O(\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2}). \end{aligned} \tag{123}$$

Подставив (122) и (123) в (120), получаем

$$h_1(x_2) = \exp(-\mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2} + O(\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})). \tag{124}$$

В зависимости от выбора параметра μ_2, $|\mu_2| < c$, правая часть из (124) может оказаться либо больше, либо меньше 1. Отсюда следует, что $h_1(x) = 1$ при $x = x_2$. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Пусть*

$$y_1 = y_1(n) = \frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}(1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2}) \text{ и } k_3 = \lfloor y_1 \rfloor.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$g_1(k_3) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_3}} \exp\biggl(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1} + \biggl(\frac{1}{24}\nu^2 + \frac{1}{12}q_1 + \frac{1}{24}q_2 + \frac{1}{2^7\cdot 3^2}(n^4 - 10n^3 + 32n^2 - 38n + 15)\biggr)b(2/3)^{3(n-1)/2}\biggr). \qquad (125)$$

Доказательство. Как при доказательстве соотношения (97) убеждаемся, что

$$g_1(k_3) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_3}(1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})^{k_3}} h_2(y_1), \qquad (126)$$

где

$$h_2(y_1) = \exp\biggl(y_1 - \frac{\nu k_3^2}{2b} - \frac{\tau_1 k_3}{b} - \frac{\tau_1^2 k_3}{2b^2} - \frac{\nu\tau_1 k_3^2}{2b^2} - \frac{\nu^2 k_3^3}{6b^2} + \frac{2q_1 k_3^3}{3b^2} + \frac{q_2 k_3^3}{3b^2} + \frac{3}{2b^2}q_3 k_1 k_3^2\biggr). \qquad (127)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\exp\, y_1 = \exp\biggl(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}(1 - z_5(n) + \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})\biggr) \sim \exp\biggl(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}(1 - z_5)\biggr), \qquad (128)$$

$$\exp\biggl(-\frac{\nu k_3^2}{2b}\biggr) \sim \exp\biggl(-\frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1}(1 - z_5)^2\biggr) \sim \exp\biggl(-\frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1}(1 - 2z_5)\biggr), \qquad (129)$$

$$\exp\left(-\frac{\tau_1 k_3}{b}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2}(1-z_5)\right), \tag{130}$$

$$\exp\left(-\frac{\tau_1^2 k_3}{2b^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{4b}\tau_1^2(2/3)^{(n-1)/2}\right), \tag{131}$$

$$\exp\left(-\frac{\nu\tau_1 k_3^2}{2b^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1}\right), \tag{132}$$

$$\exp\left(-\frac{\nu^2 k_3^3}{6b^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{48}\nu^2 b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \tag{133}$$

$$\exp\left(\frac{2q_1 k_3^3}{3b^2}\right) \sim \exp\left(\frac{1}{12}q_1 b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \tag{134}$$

$$\exp\left(\frac{q_2 k_3^3}{3b^2}\right) \sim \exp\left(\frac{1}{24}q_2 b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \tag{135}$$

$$\exp\left(\frac{3}{2b^2}q_3 k_1 k_3^2\right) \sim \exp\left(\frac{3}{8}q_3 k_1(2/3)^{n-1}\right). \tag{136}$$

Подставив (128)–(136) в (127), получаем

$$\begin{aligned} h_2(y_1) \sim \exp\Bigg(& \frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} \\ & - \frac{1}{4b}\tau_1^2(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1} - \frac{1}{48}\nu^2 b(2/3)^{3(n-1)/2} \\ & + \frac{1}{12}q_1 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{1}{24}q_2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{3}{8}q_3 k_1(2/3)^{n-1} \\ & + z_5\left(-\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{4}\nu b(2/3)^{n-1}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{137}$$

В свою очередь, при $n \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} & \exp\left(z_5\left(-\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{4}\nu b(2/3)^{n-1}\right)\right) \\ & \quad \sim \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{4}\nu b(2/3)^{n-1} + \frac{1}{4}q_1 b(2/3)^{3(n-1)/2} \\ & \quad + \frac{1}{8}q_2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{1}{4}\nu^2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{3}{4}\nu\tau_1(2/3)^{n-1} \\ & \quad + \frac{1}{2b}\tau_1^2(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{3}{4}q_3 k_1(2/3)^{n-1}\Bigg). \end{aligned} \tag{138}$$

Из (127), (137) и (138) следует, что

$$\begin{aligned} h_2(y_1) \sim \exp\Big(& \frac{1}{2} b(2/3)^{(n-1)/2} - \tau_1(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{3}{8}\nu b(2/3)^{n-1} \\ & + \frac{11}{48}\nu^2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{5}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1} + \frac{1}{3} q_1 b(2/3)^{3(n-1)/2} \\ & + \frac{1}{6} q_2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{9}{8} q_3 k_1 (2/3)^{n-1} + \frac{1}{4b}\tau_1^2(2/3)^{(n-1)/2}\Big). \end{aligned} \tag{139}$$

Наконец, воспользовавшись (122), получаем

$$\begin{aligned} & (1 - z_5 - \mu_2\nu^3(2/3)^{3(n-1)/2})^{k_3} \sim (1 - z_5)^{k_3} \sim \exp\Big(k_3\Big(-\frac{\tau_1}{b} - \frac{\tau_1^2}{2b^2} \\ & - \frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{1}{8}\nu^2(2/3)^{n-1} + \frac{1}{2} q_1(2/3)^{n-1} + \frac{1}{4} q_2 (2/3)^{n-1} \\ & + \frac{3}{2b} q_3 k_1 (2/3)^{(n-1)/2}\Big)\Big) \\ & \sim \exp\Big(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{4}\nu b(2/3)^{n-1} + \frac{1}{4} q_1 b(2/3)^{3(n-1)/2} \\ & + \frac{1}{8} q_2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{1}{4b}\tau_1^2(2/3)^{(n-1)/2} + \frac{3}{4} q_3 k_1 (2/3)^{n-1} \\ & + \frac{3}{16}\nu^2 b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{1}{2}\nu\tau_1(2/3)^{n-1}\Big). \end{aligned} \tag{140}$$

Подставив (139), (140) в (126) и воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned} & \exp\Big(\frac{3}{8} q_3 k_1 (2/3)^{n-1}\Big) \sim \exp\Big(\frac{3}{16} q_3 a (2/3)^{(n+3)/2+n-1}\Big) \\ & \sim \exp\Big(\frac{1}{2^2 3} q_3 a(2/3)^{3(n-1)/2}\Big) \sim (\text{ибо } q_3 = \frac{1}{2^5 3}(n+3)(n+1)(n-1)(n-5)) \\ & \sim \exp\Big(\frac{1}{2^7 3^2}(n-1)^2(n-3)(n-5) b(2/3)^{3(n-1)/2}\Big) \\ & = \exp\Big(\frac{1}{2^7 3^2}(n^4 - 10n^3 + 32n^2 - 38n + 15) b(2/3)^{3(n-1)/2}, \end{aligned}$$

убеждаемся в справедливости (125). Лемма 19 доказана.

§ 9. Завершение доказательства теоремы 1

Начнем с преобразования правой части из (125). Сначала заметим, что величины a и b из (2) связаны соотношением

$$a = \frac{(n-1)(n-3)}{(n+1)(n+3)} b. \tag{141}$$

Найдем асимптотики для выражений из (125), содержащих параметр τ_1. Пользуясь (107)–(110), при $n \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1}\right) &\sim \exp\left(\frac{1}{2^6}\nu(n+1)(n+3)(2/3)^{n-1}k_0\right)\\
&\sim \exp\left(\frac{1}{2^5 3^2}\nu(n+1)(n+3)a(2/3)^{3(n-1)/2}\right) = (\text{см. } (141))\\
&= \exp\left(\frac{1}{2^5 3^2}\nu(n-1)(n-3)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \qquad (142)\\
\exp\left(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2}\right) &\sim \exp\left(-\frac{1}{8}(n+1)^2(2/3)^{(n-1)/2}r_1^0\right.\\
&\quad -\frac{1}{16}(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}k_0 + \frac{1}{2}(2/3)^{(n-1)/2}u\\
&\quad \left.-\frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2}r_2^0\right). \qquad (143)
\end{aligned}$$

В свою очередь, при $n \to \infty$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{8}(n+1)^2(2/3)^{(n-1)/2}r_1^0\right) \sim (\text{см. } (3))\\
&\quad\sim \exp\left(-\frac{3}{2^9}(n+1)^2(n+3)(n-5)a(2/3)^{(n-1)/2+n+3}\right)\\
&\quad\sim \exp\left(-\frac{1}{2^5 3^3}(n+1)^2(n+3)(n-5)a(2/3)^{3(n-1)/2}\right) = (\text{см. } (141))\\
&\quad= \exp\left(-\frac{1}{2^5 3^3}(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right)\\
&\quad= \exp\left(-\frac{1}{2^5 3^3}(n^4-8n^3+14n^2+8n-15)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \qquad (144)\\
&\exp\left(-\frac{1}{16}(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}k_0\right) \sim (\text{см. } ((92)\text{–}(94))\\
&\quad\sim \exp\left(-\frac{1}{2^5}(n+1)(n+3)a(2/3)^{(n-1)/2+(n+3)/2}\right.\\
&\quad\times\left.\left(1-\frac{1}{2}\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - x(2/3)^{(n+3)/2}\right)\right) = (\text{см. } (141))\\
&\quad= \exp\left(-\frac{1}{2^3 3^2}(n-1)(n-3)b(2/3)^{n-1} + \frac{1}{2^2 3^4}\lambda(n-1)(n-3)\right.
\end{aligned}$$

$$\times\, b(2/3)^{3(n-1)/2} + \frac{9}{2^7} x(n+1)(n+3)a(2/3)^{3(n+3)/2}\Bigg), \tag{145}$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}(2/3)^{(n-1)/2}u\right) \sim (\text{см. (106)})$$
$$\sim \exp\left(\frac{1}{2^6 3^4}(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2^6 3^4}(n^4 - 16n^3 + 86n^2 - 176n + 105)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right), \tag{146}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\nu(2/3)^{(n-1)/2}r_2^0\right) \sim (\text{см. (7)})$$
$$\sim \exp\left(-\frac{3}{2^7}\nu(n-1)^2 b(2/3)^{3(n-1)/2}\right). \tag{147}$$

Из (143)–(147) следует, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2}\right) \sim \exp\Bigg(-\frac{1}{2^3 3^2}(n^2 - 4n + 3)b(2/3)^{n-1}$$
$$+ \Bigg(-\frac{1}{2^5 3^3}(n^4 - 8n^3 + 14n^2 + 8n - 15) + \frac{1}{2^2 3^4}\lambda(n^2 - 4n + 3)$$
$$+ \frac{1}{2^6 3^4}(n^4 - 16n^3 + 86n^2 - 176n + 105) - \frac{3}{2^7}\nu(n-1)^2\Bigg)b(2/3)^{3(n-1)/2}$$
$$+ \frac{9}{2^7}x(n+1)(n+3)a(2/3)^{3(n+3)/2}\Bigg). \tag{148}$$

Заменив в (125) выражения

$$\exp\left(\frac{1}{8}\nu\tau_1(2/3)^{n-1}\right) \text{ и } \exp\left(-\frac{1}{2}\tau_1(2/3)^{(n-1)/2}\right)$$

на правые части из (142) и (148), получаем

$$g_1(k_3) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_3}} \exp\Bigg(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2} - \frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1}$$
$$- \frac{1}{2^3 3^2}(n^2 - 4n + 3)b(2/3)^{n-1} + \Bigg(\frac{1}{2^5 3^2}\nu(n^2 - 4n + 3) - \frac{1}{2^5 3^3}(n^4 - 8n^3$$
$$+ 14n^2 + 8n - 15) + \frac{1}{2^2 3^4}\lambda(n^2 - 4n + 3) + \frac{1}{2^6 3^4}(n^4 - 16n^3 + 86n^2 - 176n$$
$$+ 105) - \frac{3}{2^7}\nu(n^2 - 2n + 1) + \frac{1}{24}\nu^2 + \frac{1}{12}q_1 + \frac{1}{24}q_2 + \frac{1}{2^7 3^2}(n^4 - 10n^3$$
$$+ 32n^2 - 38n + 15)\Bigg)b(2/3)^{3(n-1)/2}$$

$$+\frac{9}{2^7}x(n+1)(n+3)a(2/3)^{3(n+3)/2}\Bigg). \tag{149}$$

В произведении правых частей из (95) и (149) содержится множитель $\exp((-\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{2^7}x(n+1)(n+3))a(2/3)^{3(n+3)/2})$. Он принимает максимальное значение при $x=x_0=\frac{9}{2^6}(n+1)(n+3)$. Поэтому при $x=x_0$ произведение правых частей из (95) и (149) максимально,

$$\exp\bigg(-\frac{1}{4}x_0^2a(2/3)^{3(n+3)/2}\bigg) = \exp\bigg(-\frac{3^4}{2^{14}}(n+1)^2(n+3)^2a(2/3)^{3(n+3)/2}\bigg), \tag{150}$$

$$\exp\bigg(\frac{9}{2^7}x_0(n+1)(n+3)a(2/3)^{3(n+3)/2}\bigg) = (\text{см. } (141)) = \exp\bigg(\frac{1}{2^7 3^2}(n^2-1)(n^2-9)b(2/3)^{3(n-1)/2}\bigg). \tag{151}$$

Тогда имеем

$$g(k_1^0) \sim (\text{см. } (95) \text{ и } (150)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^0}}\exp\bigg(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2}-\frac{1}{8}\lambda a(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2}+\bigg(\frac{1}{24}\lambda^2+\frac{1}{12}q-\frac{3^4}{2^{14}}(n+1)^2(n+3)^2\bigg) \times a(2/3)^{3(n+3)/2}\bigg), \tag{152}$$

$$g_1(k_2^0) \sim (\text{см. } (149)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2^0}}\exp\bigg(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}-\frac{1}{8}\nu b(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2^3 3^2}(n^2-4n+3)b(2/3)^{n-1}+\bigg(\frac{1}{2^5 3^2}\nu(n^2-4n+3) - \frac{1}{2^5 3^3}(n^4-8n^3+14n^2+8n-15)+\frac{1}{2^2 3^4}\lambda(n^2-4n+3) - \frac{3}{2^7}\nu(n^2-2n+1)+\frac{1}{2^6 3^4}(n^4-16n^3+86n^2-176n+105) + \frac{1}{24}\nu^2+\frac{1}{12}q_1+\frac{1}{24}q_2+\frac{1}{2^7 3^2}(n^4-10n^3+32n^2-38n+15) + \frac{1}{2^7 3^2}(n^2-1)(n^2-9)\bigg)b(2/3)^{3(n-1)/2}\bigg). \tag{153}$$

Остается изучить поведение функции $g(k_1)$, когда $|k_1 - k_1^0| \leqslant n\sqrt{k_1^0}$, и функции $g_1(k_2)$, когда $|k_2 - k_2^0| \leqslant n\sqrt{k_2^0}$.

Лемма 20. *Пусть* $k_1 = k_1^0 + u$, *где* k_1^0 *взято из* (94), *а* $|u| \leqslant n\sqrt{k_1^0}$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$g(k_1) \sim g(k_1^0)\exp\left(- \frac{u^2}{2k_1^0} + \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\right). \tag{154}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant u \leqslant n\sqrt{k_1^0}$. Воспользовавшись формулой Стирлинга и (96), при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{1}{k_1!} = \frac{1}{k_1^0! \prod\limits_{s=1}^{u}(k_1^0 + s)} \sim \frac{e^{k_1^0}}{\sqrt{2\pi k_1^0}(k_1^0)^{k_1^0+u}\prod\limits_{s=1}^{u}\left(1 + \frac{s}{k_1^0}\right)}$$
$$\sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi k_1^0}y^{k_1^0+u}}\exp\left(-\frac{u^2}{2k_1^0}\right). \tag{155}$$

Подставив правую часть из (155) в (83), при $n \to \infty$ получаем

$$g(k_1) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^0}y^{k_1}2^{k_1}}a(2/3)^{(n+3)k_1/2}\exp\left(-\frac{u^2}{2k_1^0}\right)$$
$$\times \exp\left(y - \frac{\tau k_1}{a} - \frac{\lambda k_1^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k_1^3}{6a^2} + \frac{2qk_1^3}{3a^2}\right) \sim (\text{см. } (92)\text{–}(94))$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^0}(1-z_3)^{k_1}}\exp\left(y - \frac{\tau(k_1^0+u)}{a} - \frac{\lambda(k_1^0+u)^2}{2a} - \frac{\lambda^2(k_1^0+u)^3}{6a^2}\right.$$
$$\left.+ \frac{2q(k_1^0+u)^3}{3a^2} - \frac{u^2}{2k_1^0}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^0}(1-z_3)^{k_1}}\exp\left(y - \frac{\tau k_1^0}{a} - \frac{\lambda(k_1^0)^2}{2a}\right.$$
$$\left.- \frac{\lambda k_1^0 u}{a} - \frac{\lambda^2(k_1^0)^3}{6a^2} + \frac{2q(k_1^0)^3}{3a^2} - \frac{u^2}{2k_1^0}\right)$$
$$\sim g(k_1^0)\exp\left(- \frac{\lambda k_1^0 u}{a} - \frac{u^2}{2k_1^0}\right)\Big/(1-z_3)^u. \tag{156}$$

В свою очередь, пользуясь (92)–(94), при $n \to \infty$ получаем

$$\exp\left(- \frac{\lambda k_1^0 u}{a}\right) \sim \exp\left(- \frac{1}{2}u\lambda(2/3)^{(n+3)/2}\right). \tag{157}$$

Далее, пользуясь (93) и доказательством соотношения (98), убеждаемся, что

$$(1-z_3)^u \sim \exp\left(- u\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{1}{s}z_3^s\right)\right) \sim \exp(-uz_3) \sim \exp\left(- \frac{1}{2}u\lambda(2/3)^{(n+3)/2}\right.$$

$$- ux(2/3)^{(n+3)/2}\Big) = (\text{ибо } x = x_0 = \frac{9}{2^6}(n+1)(n+3))$$
$$= \exp\bigg(-\frac{1}{2}u\lambda(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\bigg). \qquad (158)$$

Подставив (157) и (158) в правую часть соотношения (156), при $n \to \infty$ получаем

$$g(k_1) \sim g(k_1^0)\exp\bigg(-\frac{u^2}{2k_1^0} + \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\bigg). \qquad (159)$$

Тем самым справедливость соотношения (154) при любом u, где $0 \leqslant u \leqslant n\sqrt{k_1^0}$, доказана.

Пусть u таково, что $-n\sqrt{k_1^0} \leqslant u < 0$. Тогда, как в первом случае, убеждаемся, что

$$\frac{1}{k_1!} = \prod_{s=0}^{u-1}(k_1^0 - s)/k_1^0! \sim \frac{e^y\prod\limits_{s=0}^{u-1}\Big(1-\frac{s}{k_1^0}\Big)}{\sqrt{2\pi k_1^0}y^{k_1}} \sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi k_1^0}y^{k_1}}\exp\bigg(-\frac{u^2}{2k_1^0}\bigg).$$

Теперь, повторяя дальнейшие рассуждения из доказательства соотношения (159), убеждаемся в справедливости (154) при любом u таком, что $-n\sqrt{k_1^0} \leqslant u < 0$. Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Пусть* $k_1 = k_1^0 + u$ *и* $k_2 = k_2^0 + w$, *где* $|u| \leqslant n\sqrt{k_1^0}$ *и* $|w| \leqslant n\sqrt{k_2^0}$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$g_1(k_2) \sim g_1(k_2^0)\exp\bigg(-\frac{w^2}{2k_2^0} - \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\bigg). \qquad (160)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant w \leqslant n\sqrt{k_2^0}$. Пусть D — произвольное множество из $E_{1,1}^{n,(n-3)/2}$, состоящее из u одноэлементных псевдосвязок. Тогда в $E_{1,0}^{n,(n-1)/2}$ имеется $\frac{1}{8}u(n+1)(n+3)$ наборов, которые принадлежат множеству $P^2(\overline{D})$. Отсюда и из (116) следует, что

$$g_1(k_2) \sim \frac{b^{k_2}}{k_2!2^{k_2}}(2/3)^{(n-1)k_2/2}\exp\bigg(-\frac{\nu k_2^2}{2b} - \frac{(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))k_2}{b}$$
$$- \frac{(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))^2k_2}{2b^2} - \frac{\nu(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))k_2^2}{2b^2}$$
$$+ \frac{3q_3k_1k_2^2}{2b^2} - \frac{\nu^2k_2^3}{6b^2} + \frac{2q_1k_2^3}{3b^2} + \frac{q_2k_2^3}{3b^2}\bigg). \qquad (161)$$

В свою очередь, при $n \to \infty$ имеем

$$\exp\left(-\frac{\nu k_2^2}{2b}\right) \sim \exp\left(-\frac{\nu (k_2^0)^2}{2b} - \frac{w\nu k_2^0}{b}\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{\nu (k_2^0)^2}{2b} - \frac{1}{2}w\nu(2/3)^{(n-1)/2}\right), \tag{162}$$
$$\exp\left(-\frac{(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))k_2}{b}\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{\tau_1 k_2}{b} - \frac{1}{8b}u(n+1)(n+3)k_2^0\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{\tau_1 k_2^0}{b} - \frac{\tau_1 w}{b} - \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\right), \tag{163}$$
$$\exp\left(-\frac{(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))^2 k_2}{2b^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\tau_1^2 k_1^0}{2b^2}\right), \tag{164}$$
$$\exp\left(-\frac{\nu(\tau_1 + \frac{1}{8}u(n+1)(n+3))k_2^2}{2b^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\nu\tau_1 (k_2^0)^2}{2b^2}\right), \tag{165}$$
$$\exp\left(\frac{3q_3 k_1 k_2^2}{2b^2} - \frac{\nu^2 k_2^3}{6b^2} + \frac{2q_1 k_2^3}{3b^2} + \frac{q_2 k_2^3}{3b^2}\right)$$
$$\sim \exp\left(\frac{3}{8}q_3 k_1 (2/3)^{n-1} - \frac{\nu^2 (k_2^0)^3}{6b^2} + \frac{2q_1 (k_2^0)^3}{3b^2} + \frac{q_2 (k_2^0)^3}{3b^2}\right). \tag{166}$$

Далее, воспользовавшись формулой Стирлинга и рассуждениями из доказательства (96), при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{k_2!} = \frac{1}{k_2^0! \prod\limits_{s=1}^{w}(k_2^0 + s)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2^0} y_1^{k_2}} \exp\left(y_1 - \frac{w^2}{2k_2^0}\right),$$

где y_1 взято из леммы 18. Поэтому

$$\frac{b^{k_2}}{k_2! 2^{k_2}}(2/3)^{(n-1)k_2/2} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2^0}(1-z_5)^{k_2}} \exp\left(y_1 - \frac{w^2}{2k_2^0}\right). \tag{167}$$

В свою очередь, пользуясь доказательством соотношения (98) и (158), убеждаемся, что

$$(1-z_5)^w \sim \exp\left(-\frac{\tau_1 w}{b} - \frac{1}{2}w\nu(2/3)^{(n-1)/2}\right). \tag{168}$$

Подставив (162)–(168) в (161), получаем

$$g_1(k_2) \sim g_1(k_2^0) \exp\left(-\frac{w^2}{2k_2^0} - \frac{1}{16}u(n+1)(n+3)(2/3)^{(n-1)/2}\right).$$

Аналогично устанавливается справедливость соотношения (160) при $k_2 = k_2^0 + w$, где $-b\sqrt{k_2^0} \leqslant w < 0$. Лемма 21 доказана.

Из лемм 20 и 21 следует, что если $k_1 = k_1^0 + u$ и $k_2 = k_2^0 + w$, где $|u| \leqslant n\sqrt{k_1^0}$ и $|w| \leqslant n\sqrt{k_2^0}$, то

$$g(k_1)g_1(k_2) \sim g(k_1^0)g_1(k_2^0)\exp\left(-\frac{u^2}{2k_1^0} - \frac{w^2}{2k_2^0}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} \; \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} g(k_1)g_1(k_2)$$
$$\sim g(k_1^0)g_1(k_2^0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2k_1^0}\right)dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2k_2^0}\right)dy$$
$$= \sqrt{2\pi k_1^0}\sqrt{2\pi k_2^0}g(k_1^0)g_1(k_2^0) \sim (\text{см. (95) при } x = \frac{9}{2^6}(n+1)(n+3) \text{ и (153)})$$
$$\sim \exp\left(\frac{1}{2}a(2/3)^{(n+3)/2} - \frac{1}{8}\lambda a(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2}\tau(2/3)^{(n+3)/2} + \left(\frac{1}{24}\lambda^2 + \frac{1}{12}q\right.\right.$$
$$\left.\left.- \frac{3^4}{2^{14}}(n+1)^2(n+3)^2\right)a(2/3)^{3(n+3)/2}\right)\exp\left(\frac{1}{2}b(2/3)^{(n-1)/2}\right.$$
$$- \left(\frac{1}{8}\nu + \frac{1}{2^3 3^2}(n^2-4n+3)\right)b(2/3)^{n-1} + \left(\frac{1}{2^5 3^2}\nu(n^2-4n+3)\right.$$
$$- \frac{1}{2^5 3^3}(n^4 - 8n^3 + 14n^2 + 8n - 15) + \frac{1}{2^2 3^4}\lambda(n^2-4n+3)$$
$$- \frac{3}{2^7}\nu(n^2-2n+1) + \frac{1}{2^6 3^4}(n^4 - 16n^3 + 86n^2 - 176n + 105) + \frac{1}{24}\nu^2$$
$$+ \frac{1}{12}q_1 + \frac{1}{24}q_2 + \frac{1}{2^7 3^2}(n^4 - 10n^3 + 32n^2 - 38n + 15)$$
$$\left.\left.+ \frac{1}{2^7 3^2}(n^2-1)(n^2-9)\right)b(2/3)^{3(n-1)/2}\right) \sim (\text{см. (82), (83) и (114), (115)})$$
$$\sim \sum_{|k_1-k_1^0|\leqslant n\sqrt{k_1^0}} |\vec{R}_P^9(k_1)|(2/3)^{(n+3)k_1/2}(k_1!2^{k_1})^{-1}$$
$$\times \sum_{|k_2-k_2^0|\leqslant n\sqrt{k_2^0}} |\vec{R}_P^{10}(k_2)|(2/3)^{(n-1)k_2/2}(k_2!2^{k_2})^{-1}. \qquad (169)$$

Подставим (169) в (41), заменим параметры $q, \lambda, \nu, \tau, q_1$ и q_2 на их значения (см. (51), (66), (69), (111), (114)) и выполним тождественные преобразования. В результате получим соотношение (1). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коршунов А. Д.** Число k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделенных булевых функций). Часть I. Случай четных n и $k = 2$ // Дискретр. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 31–69.
2. **Коршунов А. Д.** О числе k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделенных булевых функций от n переменных) // Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004 г.) Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. С. 36–38.
3. **Коршунов А. Д.** О числе k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделенных булевых функций от n переменных) // Доклады РАН. 2004. Т. 397, № 5. С. 593–595.
4. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. М.: Мир, 1967.
6. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
7. **Post E.** The two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: korshun@math.nsc.ru

Статья поступила
27 сентября 2004 г.