

УДК 519.854

## О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КОМПАКТНОГО СУММИРОВАНИЯ ВЕКТОРОВ\*)

*Р. А. Корякин, С. В. Севастьянов*

Рассматриваются многостадийные задачи теории расписаний в стохастической постановке, когда все длительности операций заданы в виде независимых одинаково распределенных случайных величин с заданным распределением. Предлагается новый эффективный алгоритм, который решает такие задачи с существенно лучшими оценками, гарантированными «почти всегда» (т. е. для почти всех примеров при возрастающем числе работ) и для широкого класса распределений. Новый метод основан на приближенном сведении рассматриваемых задач теории расписаний к задаче компактного суммирования векторов (КСВ), разработанном ранее одним из авторов, а также на новом эффективном алгоритме решения задачи КСВ.

### 1. Общая постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний: работы  $J_1, \dots, J_n$  выполняются на машинах  $M_1, \dots, M_m$ ; работа  $J_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) состоит из  $m$  операций  $o_{1j}, \dots, o_{mj}$ ; операция  $o_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) выполняется на машине  $M_i$  в течение времени  $p_{ij} \geq 0$ .

Обозначим через  $p_{\max}$  длительность наиболее продолжительной операции, а через  $l_{\max}$  максимальную машинную нагрузку, т. е.

$$p_{\max} = \max_{i,j} p_{ij}; \quad l_{\max} = \max_i l_i,$$

где  $l_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$  — нагрузка машины  $M_i$ .

Точных постановок задач теории расписаний мы пока приводить не будем. Введенных выше обозначений вполне достаточно для освещения основной темы данной статьи. Мы ограничиваемся лишь рассмотрением задачи, возникающей при построении некоторых алгоритмов решения задач теории расписаний, решения которых напрямую влияют на длину построенных с помощью этих алгоритмов расписаний. Речь идет о следующей задаче компактного суммирования векторов.

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00039).

Пусть  $s$  — некоторая норма в  $\mathbb{R}^d$ , и пусть конечное семейство векторов  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad (1)$$

Требуется решить следующую задачу минимизации:

$$\max_{k=1, \dots, n} \left\| \sum_{i=1}^k x_{\pi_i} \right\|_s \longrightarrow \min_{\pi=(\pi_1, \dots, \pi_n)}. \quad (2)$$

Иными словами, необходимо отыскать такой порядок суммирования векторов  $x_1, \dots, x_n$ , чтобы все частичные суммы оставались в пределах шара (в норме  $s$ ) минимально возможного радиуса.

Конструктивное (приближенное) решение задачи компактного суммирования векторов предложено С. В. Севастьяновым в [5]. Мы приведем этот результат в следующей форме.

**Теорема 1.** Для решения задачи (2) строится алгоритм  $\mathcal{A}_1$ , который для любой нормы  $s$  в  $\mathbb{R}^d$  и любого  $n$ -элементного семейства векторов  $X$ , удовлетворяющего (1), с временной сложностью  $O(d^2 n^2)$  находит перестановку  $\pi$ , обеспечивающую суммирование векторов семейства  $X$  в шаре радиуса

$$C_{s,d}(\mathcal{A}_1, X) = \left( d - 1 + \frac{1}{d} \right) \max_{x_i \in X} \|x_i\|_s.$$

Теперь о связи задачи компактного суммирования векторов с задачами теории расписаний. При решении цеховых задач теории расписаний часто возникает следующая подзадача (см., например, [8], [9]):

$$\max_{i_1, i_2 \in \{1, \dots, m-1\}} \max_{k=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^k (p_{i_1 \pi_j} - p_{i_2 \pi_j}) \right| \longrightarrow \min_{\pi=(\pi_1, \dots, \pi_n)}. \quad (3)$$

Если ввести семейство векторов  $E_n = \{e_j\}_{j=1}^n$ , где

$$e_j = (p_{2j} - p_{1j}, p_{3j} - p_{1j}, \dots, p_{mj} - p_{1j}) \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad (4)$$

и определить норму  $\hat{s}$  соотношением

$$\|x\|_{\hat{s}} = \max \left\{ \max_i |x(i)|, \max_{i,j} |x(i) - x(j)| \right\}, \quad (5)$$

то единственное, что мешает объявить задачу (3) задачей компактного суммирования векторов  $\{e_j\}_{j=1}^n$  в норме  $\hat{s}$ , это невыполнение условия (1).

Для устранения этой «помехи» используется следующая процедура выравнивания машинных нагрузок [8]. На машине  $M_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) длительности некоторых операций увеличиваются так, что величины  $p_{\max}$  и  $l_{\max}$  остаются неизменными, но при этом выполняется равенство

$$l_i = l_{\max}. \quad (6)$$

Ясно, что расписание, построенное для нового входа, полученное в результате применения процедуры выравнивания и удовлетворяющее (6), будет допустимым и для начального входа задачи (до процедуры выравнивания); более того, для начального входа задачи остается верной и оценка длины этого расписания.

Таким образом, без ограничения общности для любого примера рассматриваемой задачи теории расписаний условие (6) можно считать выполненным. Тогда  $\sum e_j = 0$  и задача (3) представляет собой задачу компактного суммирования  $(m-1)$ -мерных векторов (4) в норме (5). Применяя к этой задаче алгоритм  $\mathcal{A}_1$  из теоремы 1, за полиномиальное время находим перестановку  $\pi$ , согласно которой векторы  $\{e_j\}_{j=1}^n$  суммируются в шаре радиуса

$$C_{\hat{s}, m-1}(\mathcal{A}_1, E_n) = \left(m - 2 + \frac{1}{m-1}\right) \max_{i=1, \dots, n} \|e_i\|_{\hat{s}}. \quad (7)$$

Оценка радиуса (7) справедлива для любого семейства векторов  $E_n \subset \mathbb{R}^{m-1}$ , сумма которых равна нулю. Существует ли полиномиальный алгоритм, который находит сумму любого такого семейства векторов в пределах меньшего радиуса?

В настоящей статье дается ответ на этот вопрос в стохастической постановке исходной задачи теории расписаний: длительности операций  $p_{ij}$  предполагаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. При некоторых условиях на распределения  $p_{ij}$  оказывается возможным построить полиномиальный алгоритм  $\mathcal{A}_2$ , который *почти всегда* (термин определен в следующем разделе) осуществляет такое преобразование величин  $\{p_{ij}\}$  в величины  $\{p_{ij}^*\}$ , которое, во-первых, выравнивает нагрузку всех машин (позволяя, таким образом, перейти к рассмотрению векторов вида (4), удовлетворяющих условию (1)), а во-вторых, функция распределения величин  $\{p_{ij}^*\}$  сохраняет важные свойства распределения величин  $\{p_{ij}\}$ . Далее при  $n \rightarrow \infty$  строится алгоритм  $\mathcal{A}_3$ , который почти всегда (с вероятностью 1) суммирует достаточно

большое число этих векторов в пределах существенно меньшего радиуса чем (7). Иными словами, алгоритм  $\mathcal{A}_3$  за полиномиальное время находит такую перестановку  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_{k=1, \dots, n} \left\| \sum_{i=1}^k e_{\pi_i} \right\|_{\hat{s}} \leq C_{\hat{s}, m-1}(\mathcal{A}_3, E_n) \right) = 1,$$

где  $C_{\hat{s}, m-1}(\mathcal{A}_3, E_n) \ll C_{\hat{s}, m-1}(\mathcal{A}_1, E_n)$ . В дальнейшем, если это специально не оговаривается, под нормой  $\|\cdot\|$  понимается норма  $\|\cdot\|_{\hat{s}}$ .

## 2. Формулировка результатов

Рассмотрим прямоугольную матрицу  $P = (p_{ij})$  размера  $m \times n$ , элементы которой суть неотрицательные случайные величины. Введем обозначения:  $p_{\max} = \max p_{ij}$ ,  $l_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$ ,  $l_{\max} = \max l_i$ . Пусть выполняются следующие условия на распределение величин  $p_{ij}$ .

**I.**  $\{p_{ij}\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) — независимые одинаково распределенные случайные величины с невырожденным абсолютно непрерывным распределением  $F$ .

**II.** Закон распределения  $F$  таков, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(p_{11} > n) \sim \frac{1}{f(n)},$$

где  $f(n)$  — правильно меняющаяся функция порядка  $k \in (2+\varepsilon, \infty)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Определение и необходимые в статье свойства правильно меняющихся функций приведены в приложении. Более детально об этих функциях написано в [3, с. 501] и [6, с. 287].

В частности, условие **II** означает, что случайная величина, распределенная по закону  $F$ , может принимать неограниченно большие значения с ненулевой вероятностью. Заметим также, что из условия **II** следует существование конечного момента порядка  $(2+\varepsilon)$  случайной величины  $p_{11}$ :  $\mathbb{E}p_{11}^{2+\varepsilon} < \infty$ .

Определим *корректную процедуру выравнивания* как процедуру  $\mathcal{Z}(P, P^*)$  преобразования матрицы  $P = (p_{ij})$  в матрицу  $P^* = (p_{ij}^*)$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- a)  $p_{ij}^* \geq p_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ );
- b)  $p_{ij}^* \leq p_{\max}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ );
- c)  $\sum_{j=1}^n p_{ij}^* = l_{\max}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Пусть матрица  $P^* = (p_{ij}^*)$  получена в результате применения процедуры  $\mathcal{Z}(P, P^*)$  к матрице  $P$ . Определим семейство векторов  $E_n^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$ , где

$$e_j^* = (p_{2j}^* - p_{1j}^*, \dots, p_{mj}^* - p_{1j}^*). \quad (8)$$

Заметим, что при  $j = 1, \dots, n$  выполнено неравенство  $\|e_j^*\| \leq p_{\max}$ .

Прежде чем сформулировать основной результат, введем определение термина *почти всегда*, введенного в предыдущем разделе. Событие  $A(x)$  происходит *почти всегда*, если  $\mathbb{P}(A(x)) = 1$ . При этом если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A(x)) = 1,$$

то будем говорить, что событие  $A(x)$  происходит *почти всегда при*  $x \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть матрица  $P = (p_{ij})$  размера  $m \times n$  состоит из неотрицательных случайных величин, удовлетворяющих условиям **I**—**II**. Тогда

- 1) существует алгоритм  $\mathcal{A}_2$ , который при фиксированном  $m$  и  $n \rightarrow \infty$  почти всегда выполняет процедуру  $\mathcal{Z}(P, P^*)$ ;
- 2) существует алгоритм  $\mathcal{A}_3$ , который при фиксированном  $m$  и  $n \rightarrow \infty$  почти всегда находит такой порядок  $\pi$  суммирования векторов из семейства  $E_n^*$ , что

$$\max_{k=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^k e_{\pi_j}^* \right\| \leq \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) \max_{i=1, \dots, n} \|e_i^*\|. \quad (9)$$

Временная сложность алгоритмов  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{A}_3$  не превышает  $O(n^2 m^2)$ .

### 3. Алгоритмы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$

#### 3.1. Необходимые обозначения

Пусть  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$  — семейство векторов (4). Определим величину  $y$  соотношением

$$\mathbb{P}(\|e_1\| \geq y) = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \quad (10)$$

Ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = \infty. \quad (11)$$

Пусть  $\mathbf{x}(i)$  есть  $i$ -ю координата вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-1}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ). В  $\mathbb{R}^{m-1}$  введем следующие подмножества:

$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \|\mathbf{x}\| \geq y\}$  — множество «больших» векторов (векторы из множества  $S = \mathbb{R}^{m-1} \setminus L$  будем называть «малыми»);

$L^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \exists i : \mathbf{x}(i) \geq y\}$  — множество «больших» векторов, в которых имеется большая положительная координата;

$L_i^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \mathbf{x}(i) \leq -y\}$  — множество «больших» векторов, в которых  $i$ -й координата отрицательна и большая по модулю.

Пусть  $I = (i_1, \dots, i_{m-1})$  — некоторая перестановка индексов  $\{1, \dots, m-1\}$ ;  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ . Введем множества  $S(I, k) \subset \mathbb{R}^{m-1}$  следующим образом:

$$S(I, k) = \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_1} \geq \dots \geq x_{i_k} \geq 0 \geq x_{i_{k+1}} \geq \dots \geq x_{i_{m-1}}\}. \quad (12)$$

Каждое множество  $S(I, k) \cap S$  (число их равно  $m!$ ) разобьем на  $n_0 = \lfloor n^\lambda \rfloor$  сегментов  $G_i(I, k)$ , где  $\lambda = \varepsilon / (4(m-1)(2+\varepsilon))$ , а число  $\varepsilon$  определено в условии II:

$$G_i(I, k) = \{\mathbf{x} \in S(I, k) \mid y_{i-1} \leq \|\mathbf{x}\| < y_i\}, \quad (13)$$

где  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_0-1} < y_{n_0} = y$  выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbb{P}(e_1 \in G_i(I, k)) = p_n \quad (i = 1, \dots, n_0). \quad (14)$$

Точное значение  $p_n$  будет определено по окончании доказательства леммы 2. Выбор величины  $\lambda$  продиктован причинами, которые станут очевидными в разделе 4.3. В предшествующих разделах для нас принципиально важно только то, что  $\lambda > 0$  и, следовательно,  $n_0 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При описании алгоритма  $\mathcal{A}_2$  без ограничения общности будем предполагать, что величины  $p_{ij}$  сгенерировались так, что выполняются неравенства

$$l_{\max} \geq l_{i_1} \geq l_{i_2} \geq \dots \geq l_{i_{m-1}}, \quad (15)$$

где  $\{i_1, \dots, i_{m-1}\} = \{2, \dots, m\}$ . В дальнейшем под пересечением некоторого множества  $A \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  с семейством векторов  $B$  будем понимать семейство  $A \cap B = \{e_j \in B \mid e_j \in A\}$ .

### 3.2. Описание алгоритма $\mathcal{A}_2$

0. *Вход*. Натуральные числа  $m$  и  $n$ ; неотрицательные вещественные  $\{p_{ij}\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ).

1. *Инициализация переменных*. Вычисляются числа  $\{l_i \mid i = 1, \dots, m\}$  и нумеруются согласно (15); по заданному  $n$  и заданному распределению вектора  $e_1$  находится число  $y$  согласно (10); определяется семейство

векторов  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{m-1}$  согласно (4); присваиваются начальные значения следующим переменным:  $\hat{p}_{ij} := p_{ij}$ ;  $\hat{l}_i := l_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ).

2. Процедура выравнивания.

Шаг 0. Доведение нагрузки машины  $M_1$  до  $l_{\max}$ .

Если  $\hat{l}_{i_1} \leq \hat{l}_1$ , то переход на шаг 1.

Просматриваются (в произвольном порядке) векторы  $e_j \in L^+ \cap E_n$ ; для каждого вектора  $e_j$  вычисляются величины  $\Delta := \min\{y, \hat{l}_{i_1} - \hat{l}_1\}$ ;  $\hat{l}_1 := \hat{l}_1 + \Delta$ ;  $\hat{p}_{1j} := \hat{p}_{1j} + \Delta$  и если  $\Delta = 0$ , то переход на шаг 1. Если  $\hat{l}_{i_1} \neq \hat{l}_1$ , то STOP («неудача»).

Шаг  $k$ . Доведение нагрузки машины  $M_{i_k}$  до  $l_{\max}$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ .

Просматриваются (в произвольном порядке) векторы  $e_j \in L_{i_k-1}^- \cap E_n$ ; для каждого вектора  $e_j$  вычисляются величины  $\Delta := \min\{y, \hat{l}_1 - \hat{l}_{i_k}\}$ ;  $\hat{l}_{i_k} := \hat{l}_{i_k} + \Delta$ ;  $\hat{p}_{i_k j} := \hat{p}_{i_k j} + \Delta$  и если  $\Delta = 0$ , то переход на шаг  $k+1$ . Если  $\hat{l}_{i_k} \neq \hat{l}_1$ , то STOP («неудача»).

Шаг  $m$ . Инициализация выходных данных.

$p_{ij}^* := \hat{p}_{ij}$ ;  $l_i^* := \hat{l}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ).

3. Выход. Числа  $\{p_{ij}^*\}$ ;  $\{l_i^*\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ).

### 3.3. Описание алгоритма $\mathcal{A}_3$

0. Вход.  $E_n^* = \{e_j^* \mid j = 1, \dots, n\}$ .  $E_n^*$  — семейство векторов, определенное в (8). Введем также переменные, которые будут использоваться в алгоритме:  $H \subseteq E_n^*$  — подсемейство векторов, еще не включенных в частичную сумму;  $\pi^j = (\pi_1^j, \dots, \pi_k^j)$  — перестановка  $k$  натуральных чисел из  $\{1, \dots, n\}$  ( $j = 1, \dots, |L \cap E_n^*|$ ), для каждого  $j$  величина  $k$  определяется в ходе работы алгоритма;  $h \in \mathbb{R}^{m-1}$  есть сумма некоторого подсемейства векторов из  $E_n^*$ , меняющаяся по ходу алгоритма;  $e_0^* \in \mathbb{R}^{m-1}$ .

1. Инициализация переменных.  $H := E_n^*$ ;  $e_0^* := \mathbf{0}$ ;  $h := \mathbf{0}$ .

Так как на старте ни один вектор из  $E_n^*$  еще не включен в частичную сумму,  $H$  совпадает с  $E_n^*$ . (Очевидно, что по окончании работы алгоритма  $H = \emptyset$ .)

2. Суммирование больших векторов. Векторы  $e_j^* \in E_n^*$  нумеруются так, что векторы из  $L \cap E_n^*$  получают номера  $1, \dots, |L \cap E_n^*|$ ; для  $j := 1, \dots, |L \cap E_n^*|$  выполняется  $\{ \setminus \setminus$  (цикл  $A_0$ )  $h := h + e_j^*/2$ ;  $k := 1$ ; повторяется

$\{\text{Add}(h, i); \pi_k^j := i; h := h + e_i^*; k := k + 1\} \setminus \setminus$  (цикл  $A_1$ ) пока не  $i = 0$ ;  
 $k_1 := k - 2$ ;  $\pi_{k-1}^j := j$ ;  $h := h + e_j^*/2$ ;  $H := H \setminus \{j\}$ ;

повторяется  $\{\text{Add}(h, i); \pi_k^j := i; h := h + e_i^*; k := k + 1\} \setminus \setminus$  (цикл  $A_2$ ) пока не  $i = 0$ ;

$k_2 := k - 2$ ;  $\pi^j := (\pi_1^j, \dots, \pi_{k-2}^j) \}$  \ \ конец цикла  $A_0$ .

На шаге 2 алгоритма  $\mathcal{A}_3$  для каждого «большого» вектора  $e_j^* \in L \cap E_n^*$  находятся такие неповторные последовательности «малых» векторов  $\{v_t^{(j)}\}_{t=1}^{k_1}$  и  $\{v_t^{(j)}\}_{t=k_1+2}^{k_2}$ , что

$$\|V\| \equiv \left\| h_j + \frac{1}{2} e_j^* + \sum_{t=1}^{k_1} v_t^{(j)} \right\| \leq y_2, \quad (16)$$

где  $h_j$  — значение переменной  $h$  непосредственно перед  $j$ -м выполнением цикла  $A_0$  и

$$\left\| V + \frac{1}{2} e_j^* + \sum_{t=k_1+2}^{k_2} v_t^{(j)} \right\| \leq y_2$$

(см. также текст процедуры Add). Номера векторов из последовательностей записываются в перестановку  $\pi^j$ .

3. *Суммирование малых векторов.* К векторам из  $H$  применяется алгоритм  $\mathcal{A}_1$ ; в результате получаем перестановку  $\pi^H$ .

4. *Инициализация выходных данных.* Составляется перестановка  $\pi$  последовательной конкатенацией перестановок  $\pi^1, \dots, \pi^\theta, \pi^H$ , где  $\theta = |L \cap E_n^*|$ .

5. *Выход.* Перестановка  $\pi$ .

6. *Процедура Add( $a, i$ )* имеет два параметра. Первый параметр  $a$  подается на вход. Второму параметру  $i$  значение присваивается в процедуре: по значению переменной  $a$  процедура присваивает значение переменной  $i$ .

В тексте процедуры и в дальнейшем угол между векторами  $x_1$  и  $x_2$  из  $\mathbb{R}^{m-1}$  определяется соотношением  $\cos \angle(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2)}{|x_1| \cdot |x_2|}$ , где  $|\cdot|$  — евклидова норма, а  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в евклидовом пространстве. Под словами «величина угла» понимается величина этого угла в радианах.

*Вход.*  $a \in \mathbb{R}^{m-1}$ ,  $H \subseteq E_n^*$ .  $H$  — глобальная переменная, инициализируемая в пункте 1 алгоритма.

Находится  $J = (j_1, \dots, j_{m-1})$  и  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  такие, что  $-a \in S(J, k)$ ; если  $-a \in S(J, k) \cap L$ , то  $i$  — индекс, на котором достигается минимум, т. е.

$$\min_{e_i^* \in G_{n_0}(J, k) \cap H} \angle(-a, e_i^*);$$



если  $-a \in G_l(J, k)$  ( $3 \leq l \leq n_0$ ), то  $i$  — индекс, на котором достигается минимум, т. е.

$$\min_{e_i^* \in G_{l-1}(J, k) \cap H} \angle(-a, e_i^*);$$

если  $-a \in G_1(J, k) \cap G_2(J, k)$ , то  $i := 0$ ;

если  $i > 0$ , то  $H := H \setminus \{e_i^*\}$ .

*Выход.* Число  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

#### 4. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 состоит из пяти основных этапов. В разд. 4.1 содержатся предварительные замечания, касающиеся разброса векторов из семейства  $E_n$  в пространстве  $\mathbb{R}^{m-1}$ , которое в разд. 3.1 условно было разбито на секторы. Далее каждый сектор разбивается на сегменты, число которых зависит от пространства и величины  $n_0$ . После этого устанавливаются асимптотические оценки мощности подсемейств  $E_n$ , содержащихся в каждом из этих сегментов. Информация о мощностях этих подсемейств играет решающую роль при обосновании выполнимости алгоритма  $\mathcal{A}_2$  (разд. 4.2), а также шага «суммирование больших векторов» алгоритма  $\mathcal{A}_3$  (разд. 4.3).

В разд. 4.4 доказывается, что приведенная в теореме 2 оценка радиуса суммирования справедлива с вероятностью, стремящейся к единице при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что в том же смысле утверждения формулировались и доказывались во всех уже перечисленных разделах, но по отдельности. Поскольку вероятность каждого из событий стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ , не всегда следует, что вероятность одновременного наступления этих событий также стремится к 1, особенно если число событий зависит от  $n$ . Поэтому в разд. 4.5, в котором завершается доказательство, показывается, что упомянутое следствие все-таки имеет место.

##### 4.1. Разброс векторов из $E_n$ в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$

Докажем несколько утверждений, которые используются в доказательстве теоремы 2 и уточняют характер разброса векторов из  $E_n$  в пространстве  $\mathbb{R}^{m-1}$ .

**Лемма 1.** При любых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  мощность семейства векторов  $L \cap E_n$  удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n < |L \cap E_n| < \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n \quad (17)$$

почти всегда при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно (10) вероятность  $p$  того, что вектор  $e_j$

попадает в множество  $L$ , равна  $n^{-1/2} \ln n$ . Введем случайные величины

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{если } e_j \in L, \\ 0, & \text{если } e_j \in \mathbb{R}^{m-1} \setminus L. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\mathbb{E}\xi_j = p, \quad S_n \doteq \sum_{j=1}^n \xi_j = |L \cap E_n|, \quad \mathbb{E}S_n = np.$$

Для доказательства правого неравенства из (17) воспользуемся неравенством Чебышева  $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{E}X/x$  [1, с. 81]. В данном случае  $X = S_n$ ,  $x = \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n < \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n) &= 1 - \mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n) \geq 1 - \frac{pn}{\sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n} \\ &= 1 - \ln^{-\alpha_2} n \longrightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для доказательства левого неравенства из (17) введём случайные величины  $\tilde{\xi}_j \doteq 1 - \xi_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Тогда

$$\tilde{S}_n \doteq \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}_j = n - |L \cap E_n|, \quad \mathbb{E}\tilde{S}_n = n(1-p), \quad \mathbb{D}\tilde{S}_n = np(1-p).$$

Воспользуемся вторым неравенством Чебышева. В данном случае  $X = \tilde{S}_n$ ,  $x = \sqrt{n}(\ln n - \ln^{1-\alpha_1} n)$ . Получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|L \cap E_n| > \sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n) &= \mathbb{P}(\tilde{S}_n \leq n - \sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\tilde{S}_n > \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n) = 1 - \mathbb{P}(\tilde{S}_n - n(1-p) > np - \sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\tilde{S}_n - n(1-p) > \sqrt{n}(\ln n - \ln^{1-\alpha_1} n)) \\ &\geq 1 - \frac{(\sqrt{n} - \ln n) \ln n}{n(\ln n - \ln^{1-\alpha_1} n)^2} \longrightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

В доказательстве леммы 1 и в дальнейшем выражение  $g \sim f$  означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g}{f} = 1$ .

**Лемма 2.** Для любых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  найдутся такие числа  $C_1, C_2 > 0$ , зависящие от  $m$ , что мощность семейства векторов  $S(I, k) \cap L \cap E_n$  удовлетворяет неравенствам

$$C_1 \sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n < |S(I, k) \cap L \cap E_n| < C_2 \sqrt{n} \ln^{1+\alpha_2} n$$

почти всегда при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Покажем, что для любой пары  $(I, k)$

$$\mathbb{P}(e_j \in L \cap S(I, k)) = \frac{\ln n}{m! \sqrt{n}}. \quad (18)$$

Действительно, из (10) следует, что

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \mathbb{P}(e_j \in L) = \sum_{I, k} \mathbb{P}(e_j \in L \cap S(I, k)).$$

Поскольку число различных пар  $(I, k)$  равно  $m!$  и для всех пар  $(I, k)$  вероятности попадания вектора  $e_j \in E_n$  в множества  $L \cap S(I, k)$  одинаковы, получаем соотношение (18). Используя (18) и центральную предельную теорему в одномерном случае, аналогично доказательству леммы 1 убеждаемся в справедливости утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

После того, как мы выяснили, чему равна вероятность попадания вектора  $e_j$  в сектор  $S(I, k)$ , можно найти величину  $p_n$ , определенную соотношением (14). Найденная вероятность равна сумме вероятностей попадания вектора  $e_j$  в каждое из непересекающихся подмножеств  $G_i$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) и  $L \cap S(I, k)$  сектора  $S(I, k)$ :

$$\frac{\ln n}{m! \sqrt{n}} + n_0 p_n = \frac{1}{m!}.$$

Отсюда по определению величины  $n_0$  следует, что

$$p_n = \frac{1}{m! \lfloor n^{\varepsilon/(4(m-1)(2+\varepsilon))} \rfloor} \left( 1 - \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right).$$

#### 4.1.1. Соотношения между числами $y_1, \dots, y_{n_0}$

В этом разделе будут установлены соотношения между величинами  $y_1, \dots, y_{n_0}$ , а также величиной  $y_{\max}$ , определяемой равенством

$$\mathbb{P}(\|e_1\| > y_{\max}) = \frac{1}{n \ln n}. \quad (19)$$

Эти соотношения понадобятся при доказательстве сходимости алгоритма  $\mathcal{A}_3$ . Величина  $y_{\max}$  обладает следующим свойством.

**Лемма 3.** Каждый вектор  $e_j$  семейства  $E_n$  почти всегда при  $n \rightarrow \infty$  не превышает по норме  $y_{\max}$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_{j=1, \dots, n} \|e_j\| > y_{\max} \right) = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Справедливость леммы следует из равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{j=1,\dots,n} \|e_j\| \leq y_{\max}\right) &= \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\|e_j\| \leq y_{\max}) \\ &= (1 - \mathbb{P}(\|e_1\| > y_{\max}))^n = \left(1 - \frac{1}{n \ln n}\right)^n \rightarrow 1 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма 3 доказана.

Заметим, что в силу условия **I** координаты векторов  $\{e_j\}_{j=1}^n$  являются одинаково распределенными симметричными случайными величинами [1]. Обозначим через  $G$  их функцию распределения, которая однозначно определяется распределением  $F$ . Пусть  $\xi$  — случайная величина, распределенная по закону  $G$ . Следующая лемма устанавливает связь между распределением нормы вектора  $\|e_1\|$  и распределением  $\xi$ .

**Лемма 4.** При любом  $x \geq 0$  выполнены неравенства

$$\mathbb{P}(\xi > x) \leq \mathbb{P}(\|e_1\| > x) \leq m(m-1) \mathbb{P}(\xi > x).$$

Доказательство. Докажем левое неравенство:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|e_1\| > x) &= \mathbb{P}(\{|p_{21}-p_{11}| > x\} \vee \{|p_{31}-p_{11}| > x\} \vee \dots) \geq \mathbb{P}(|p_{21}-p_{11}| > x) \\ &> \mathbb{P}(p_{21} - p_{11} > x) = \mathbb{P}(\xi > x). \end{aligned}$$

Для доказательства правого неравенства многократно применим соотношение  $\mathbb{P}(A \vee B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ , а также определение нормы (5):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|e_1\| > x) &= \mathbb{P}(\{|p_{21}-p_{11}| > x\} \vee \{|p_{31}-p_{11}| > x\} \vee \dots \vee \{|p_{m1}-p_{11}| > x\} \\ &\quad \vee \{|p_{21}-p_{31}| > x\} \vee \dots \vee \{|p_{21}-p_{m1}| > x\} \vee \dots \vee \{|p_{m-1,1}-p_{m1}| > x\}) \\ &\leq \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(|p_{i_2 1} - p_{i_1 1}| > x) = 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \mathbb{P}(p_{i_2 1} - p_{i_1 1} > x) \\ &= m(m-1) \mathbb{P}(\xi > x). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Величины  $y_1, \dots, y_{n_0}, y_{\max}$  определялись соотношениями вида  $\mathbb{P}(\|e_1\| > y_i) = 1/g_i(n)$  (см. (10), (13), (14), (19)). Теперь согласно лемме 4 получаем соотношения между этими величинами, используя равенства вида  $\mathbb{P}(\xi > y_i) = C/g_i(n)$ . Здесь и в дальнейшем через  $C$  будем обозначать любую величину, зависящую только от  $m$ .

**Лемма 5.** Пусть закон распределения  $G$  таков, что

$$\mathbb{P}(\xi > n) = \frac{C}{f_1(n)}, \quad (21)$$

где  $C$  — не зависящая от  $n$  константа, а функция  $f_1(n)$  при некотором  $k > 2 + \varepsilon$  удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{n^{k+\delta_1}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{n^{k-\delta_1}} = \infty \quad \text{при всех } \delta_1 > 0. \quad (22)$$

Пусть величины  $z_1, z_2$  определены соотношениями

$$\mathbb{P}(\xi > z_i) = \frac{1}{g_i(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_i(n) = \infty \quad (i = 1, 2); \quad g_2(n) = o(g_1(n)). \quad (23)$$

Тогда при любом  $\delta > 0$  выполнено неравенство

$$\frac{z_1}{z_2} < \left( \frac{g_1(n)}{g_2(n)} \right)^{1/(2+\varepsilon)} \cdot g_1^\delta(n). \quad (24)$$

Кроме того, если для некоторого  $t > 1$  выполнено соотношение

$$g_2^t(n) = o(g_1(n)), \quad (25)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1}{z_2} = \infty. \quad (26)$$

Доказательство. Из (21) и (23) следует, что

$$f_1(z_i) = g_i(n), \quad i = 1, 2.$$

Если функция  $f_1(n)$  строго возрастающая при  $n \rightarrow \infty$ , то существует обратная функция  $f_1^{-1}(n)$  и  $z_i = f_1^{-1}(g_i(n))$ . Однако можно лишь гарантировать, что функция  $f_1(n)$  неубывающая. Введем обозначения:

$$z_{\max} \doteq \max\{z \mid f_1(z) = g_1(n)\}; \quad z_{\min} \doteq \min\{z \mid f_1(z) = g_2(n)\}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} \leq \frac{z_{\max}}{z_{\min}}. \quad (27)$$

Заметим, что

$$f_1(z_{\max}) = g_1(n), \quad f_1(z_{\min}) = g_2(n).$$

В силу условия (22) при  $\delta > 0$  и достаточно больших  $n$  имеем

$$(z_{\max})^{k-\delta} \leq g_1(n) \leq (z_{\max})^{k+\delta}; \quad (z_{\min})^{k-\delta} \leq g_2(n) \leq (z_{\min})^{k+\delta}.$$

Поэтому

$$\frac{z_{\max}}{z_{\min}} \leq \frac{(g_1(n))^{(1/(k-\delta))}}{(g_2(n))^{(1/(k+\delta))}} = \left[ \frac{g_1(n)}{g_2(n)} \right]^{1/k} \cdot \frac{(g_1(n))^{\delta/k(k-\delta)}}{(g_2(n))^{-\delta/k(k+\delta)}}. \quad (28)$$

Легко видеть, что при любом достаточно малом  $\delta$  выполнены неравенства

$$\frac{\delta}{k(k-\delta)} < \frac{\delta}{2}; \quad -\frac{\delta}{k(k+\delta)} > -\frac{\delta}{2}.$$

Учитывая, что  $g_2(n) < g_1(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  в силу условия (23), получаем

$$\left[ \frac{g_1(n)}{g_2(n)} \right]^{1/k} \cdot \frac{(g_1(n))^{\delta/k(k-\delta)}}{(g_2(n))^{-\delta/k(k+\delta)}} < \left[ \frac{g_1(n)}{g_2(n)} \right]^{1/(2+\varepsilon)} \cdot (g_1(n))^\delta. \quad (29)$$

В (29) мы воспользовались очевидным неравенством  $x^{1/k} < x^{1/(2+\varepsilon)}$ , которое следует из определения величины  $k$  в условии (22). Из неравенств (27)–(29) следует соотношение (24).

Переобозначим величины  $z_{\min}$  и  $z_{\max}$ :

$$z_{\min} \doteq \min\{z \mid f_1(z) = g_1(n)\}; \quad z_{\max} \doteq \max\{z \mid f_1(z) = g_2(n)\}.$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} \geq \frac{z_{\min}}{z_{\max}}. \quad (30)$$

Заметим, что

$$f_1(z_{\min}) = g_1(n), \quad f_1(z_{\max}) = g_2(n).$$

В силу условия (22) при любом  $\delta > 0$  имеем

$$(z_{\min})^{k-\delta} \leq g_1(n) \leq (z_{\min})^{k+\delta}; \quad (z_{\max})^{k-\delta} \leq g_2(n) \leq (z_{\max})^{k+\delta}.$$

Поэтому

$$\frac{z_{\min}}{z_{\max}} \geq \frac{(g_1(n))^{(1/(k+\delta))}}{(g_2(n))^{(1/(k-\delta))}} = \left[ \frac{g_1(n)}{g_2^*(n)} \right]^{1/(k+\delta)}, \quad (31)$$

где  $g_2^*(n) \doteq (g_2(n))^{\frac{k+\delta}{k-\delta}}$ . Легко видеть, что при любом достаточно малом  $\delta$  и  $t > 1$  выполнено неравенство  $\frac{k+\delta}{k-\delta} < t$ . Следовательно, с учетом условий (23) и (25) при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\left[ \frac{g_1(n)}{g_2^*(n)} \right]^{1/(k+\delta)} > \left[ \frac{g_1(n)}{(g_2(n))^t} \right]^{1/(k+\delta)} \longrightarrow \infty. \quad (32)$$

Из соотношений (30)–(32) следует соотношение (26). Лемма 5 доказана.

Так как величины  $y_{\max}$  и  $y_{n_0-1}$  определяются соотношениями  $\mathbb{P}(\xi > y_{\max}) = Cn^{-1} \ln^{-1} n$ ,  $\mathbb{P}(\xi > y_{n_0-1}) = C(n^{-1/2} \ln n + p_n)$  (которые напоминают соотношения (23)), то для оценки отношения  $y_{\max}/y_{n_0-1}$  достаточно установить, что распределение  $G$  удовлетворяет (22).

Пусть  $\delta_1 > 0$ . Из определения  $\xi$  следует, что

$$\mathbb{P}(\xi > n) = \mathbb{P}(p_{11} - p_{12} > n) \leq \mathbb{P}(p_{11} > n).$$

$$\text{Следовательно, } \frac{f_1(n)}{n^{k-\delta_1}} \sim \frac{C}{n^{k-\delta_1} \mathbb{P}(\xi > n)} \geq \frac{C}{n^{k-\delta_1} \mathbb{P}(p_{11} > n)} \sim \frac{Cf(n)}{n^{k-\delta_1}}.$$

Но в силу условия **II**  $f(n)$  — правильно меняющаяся функция (см. приложение). Поэтому  $\frac{Cf(n)}{n^{k-\delta_1}} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , что и доказывает первое соотношение из (22). Для доказательства второго соотношения из (22) воспользуемся неравенством симметризации (см. приложение). Заметим, что любая медиана  $\mu(p_{11})$  распределения  $F$ , удовлетворяющего условиям **I-II**, есть конечная величина, для которой точная верхняя оценка однозначно определяется функцией распределения. Поэтому при  $n \rightarrow \infty$  можно считать выполненным неравенство  $2\mu(p_{11}) < n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(p_{11} > n) &= \mathbb{P}(p_{11} > n - \mu(p_{11}) + \mu(p_{11})) \\ &\leq 2\mathbb{P}(\xi > n - \mu(p_{11})) \leq 2\mathbb{P}(\xi > n/2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{f_1(n)}{n^{k+\delta_1}} \sim \frac{C}{n^{k+\delta_1} \mathbb{P}(\xi > n)} &\leq \frac{C}{2n^{k+\delta_1} \mathbb{P}(p_{11} > n/2)} \\ &\sim \frac{Cf(n/2)}{2n^{k+\delta_1}} = \frac{Cf(n/2)}{2^{k+\delta_1+1}(n/2)^{k+\delta_1}}. \end{aligned}$$

Так как  $f(n)$  — правильно меняющаяся функция, то  $\frac{f(n/2)}{(n/2)^{k+\delta_1}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что завершает доказательство соотношения (22).

Теперь, установив правомерность применения леммы 5 к распределению  $G$ , можно оценить сверху отношения  $y_{\max}/y_{n_0-1}$  и  $y_i/y_{i-2}$ .

**Лемма 6.** При любом  $\delta > 0$  и  $n \rightarrow \infty$  имеют место неравенства:

$$\frac{y_{\max}}{y_{n_0-1}} < 2(np_n \ln n)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} (n \ln n)^\delta; \quad \frac{y_i}{y_{i-2}} < Cn^{\delta/2} \quad (i = 3, \dots, n_0). \quad (33)$$

Доказательство. Первое неравенство из (33) непосредственно следует из леммы 5. Докажем второе неравенство. Ясно, что

$$\mathbb{P}(\xi > y_k) = C \left( \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + (n_0 - k)p_n \right), \quad k = i - 2, i. \quad (34)$$

Если при  $n \rightarrow \infty$  правая часть (34) стремится к нулю, то можно воспользоваться леммой 5. Если же правая часть (34) стремится к некоторому числу  $\alpha \in (0, 1]$ , то имеем

$$\int_0^{y_{i-2}} g(x) dx + 2p_n = \int_0^{y_i} g(x) dx \rightarrow \alpha, \quad p_n \rightarrow 0.$$

Отсюда в силу непрерывности плотности  $g(x)$  распределения  $G$  получаем, что  $y_i/y_{i-2} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма 6 доказана.

#### 4.1.2. Разбиение множеств $S(I, k)$

Зафиксируем некоторую перестановку индексов  $I = \{i_1, \dots, i_{m-1}\}$  и число  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ . Напомним, что соотношениями (13) и (14) определяется разбиение множества  $S(I, k)$  на  $n_0$  подмножеств  $G_i(I, k)$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ). В этом разделе опишем процедуру разбиения каждого множества  $G_i(I, k)$  на  $n_0^{m-2}$  подмножеств. Это разбиение не имеет отношения к алгоритмам  $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  и необходимо для доказательства теоремы.

Прежде всего заметим, что множество  $G_i(I, k)$  — это часть множества  $S(I, k)$ , ограниченная гиперплоскостями:

$$\begin{aligned} H_e &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_{m-1}} = y_i\} \text{ и} \\ H_b &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_{m-1}} = y_{i-1}\} \text{ — в случае } k = 0; \\ H_e &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_1} - x_{i_{m-1}} = y_i\} \text{ и} \\ H_b &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_1} - x_{i_{m-1}} = y_{i-1}\} \text{ — в случае} \\ &k = 1, \dots, m-2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_e &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_1} = y_i\} \text{ и} \\ H_b &= \{(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid x_{i_1} = y_{i-1}\} \text{ — в случае } k = m-1. \end{aligned}$$

Разбиение будем осуществлять поэтапно. Сначала каждое множество  $G_i(I, k)$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) разбиваем на подмножества  $G_{ij_1}(I, k)$  ( $j_1 = 1, \dots, n_0$ ). Далее каждое множество  $G_{ij_1}(I, k)$  ( $i, j_1 \in \{1, \dots, n_0\}$ ) разбиваем на подмножества  $G_{ij_1j_2}(I, k)$  ( $j_2 = 1, \dots, n_0$ ) и так далее. На последнем шаге каждое множество  $G_{ij_1 \dots j_{m-3}}(I, k)$  ( $i, j_1, \dots, j_{m-3} \in \{1, \dots, n_0\}$ ) разбиваем на множества  $G_{ij_1 \dots j_{m-2}}(I, k)$  ( $j_{m-2} = 1, \dots, n_0$ ). Подробно процедура разбиения множеств  $G_i(I, k)$  описана ниже. Кроме того, случай  $m = 3$  изображен на рис. 1.

*Шаг 1.* Фиксируем  $i$ . Пусть  $H_{c_1}$  — произвольная  $(m-3)$ -мерная плоскость, параллельная плоскости  $H_e$  и проходящая через начало координат, а  $D_0^{(1)}, D_{n_0}^{(1)}$  — касательные гиперплоскости к множеству  $G_i(I, k)$ , пересекающиеся по плоскости  $H_{c_1}$ , т. е.

$$D_0^{(1)} \cap D_{n_0}^{(1)} = H_{c_1}, \quad D_j^{(1)} \cap G_i(I, k) \neq \emptyset \quad (j \in \{0, n_0\}),$$



и ни одна из гиперплоскостей  $D_0, D_{n_0}$  не делит множество  $G_i(I, k)$  на два подмножества. Строим гиперплоскости  $D_1^{(1)}, \dots, D_{n_0-1}^{(1)}$ , пересекающиеся по плоскости  $H_{c_0}$ , т. е.,  $\bigcap_{j=1}^{n_0-1} D_j^{(1)} = H_{c_1}$ , и разделяющие множество  $G_i(I, k)$  на  $n_0$  подмножеств  $\{G_{ij_1}(I, k)\}_{j_1=1}^{n_0}$  таким образом, что

$$\mathbb{P}(e_1 \in G_{ij_1}(I, k)) = \frac{p_n}{n_0} \quad (j_1 = 1, \dots, n_0). \quad (35)$$

Это возможно в силу непрерывности функции распределения  $G$  (см. условие **I** и определение функции  $G$  в разд. 4.1.1. Таким образом, на шаге 1 каждое множество  $G_i(I, k)$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) разбивается на подмножества  $\{G_{ij_1}(I, k)\}_{j_1=1}^{n_0}$ .

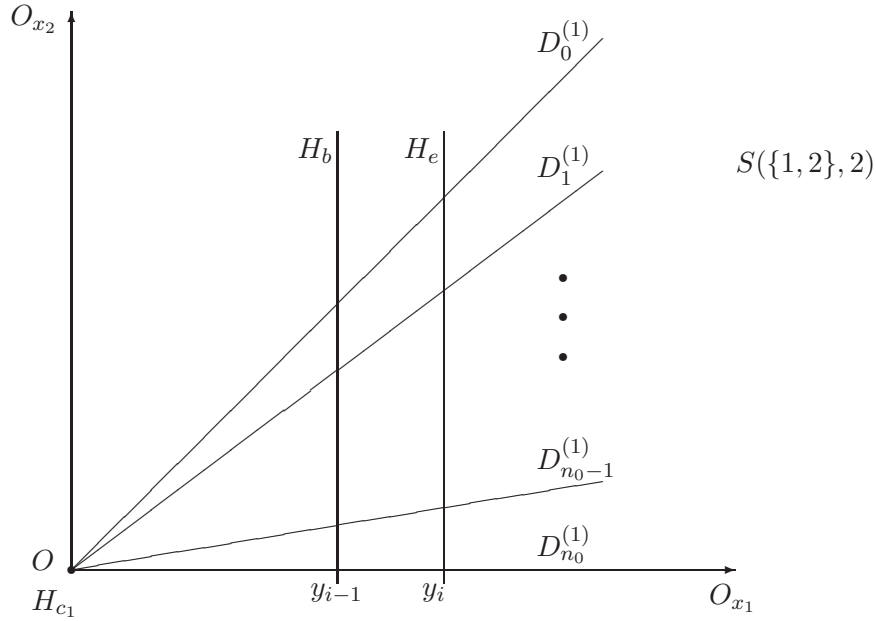


Рис. 1. Разбиение множества  $G_i(\{1, 2\}, 2)$  в случае  $m = 3$

*Шаг  $l$  ( $l = 2, \dots, m - 2$ ).* Фиксируем  $i, j_1, \dots, j_{l-1}$ . Пусть  $H_{c_l}$  — произвольная  $(m - 3)$ -мерная плоскость, параллельная плоскости  $H_e$ , перпендикулярная плоскостям  $H_{c_1}, H_{c_2}, \dots, H_{c_{l-1}}$  и проходящая через начало координат, а  $D_0^{(l)}, D_{n_0}^{(l)}$  — касательные гиперплоскости к множеству  $G_{ij_1 \dots j_{l-1}}(I, k)$ , пересекающиеся по плоскости  $H_{c_l}$ . Находим гиперплоскости  $D_1^{(l)}, \dots, D_{n_0-1}^{(l)}$ , пересекающиеся по плоскости  $H_{c_l}$ , т. е.,

$\bigcap_{j=1}^{n_0-1} D_j^{(l)} = H_{c_l}$ , и разделяющие множество  $G_{ij_1 \dots j_{l-1}}(I, k)$  на  $n_0$  таких подмножеств  $\{G_{ij_1 \dots j_l}(I, k)\}_{j_l=1}^{n_0}$ , что  $\mathbb{P}(e_1 \in G_{ij_1 \dots j_l}(I, k)) = \frac{p_n}{n_0}$  ( $j_l = 1, \dots, n_0$ ). Это возможно в силу непрерывности закона распределения  $G$  (см. условие **I** и определение функции  $G$  в разд. 4.1.1). Таким образом, на шаге  $l$  каждое множество  $G_{ij_1 \dots j_{l-1}}(I, k)$  ( $i, j_1, \dots, j_{l-1} \in \{1, \dots, n_0\}$ ) разбивается на подмножества  $\{G_{ij_1 \dots j_l}(I, k)\}_{j_l=1}^{n_0}$ .

Поясним процедуру разбиения комментариями к случаю  $m = 3$  (рис. 1). Согласно определению (12)

$$S(\{1, 2\}, 2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2 \geq 0\},$$

что на рисунке соответствует конусу в положительном квадранте, ограниченному полупрямыми  $x_2 = x_1$  и  $x_2 = 0$ . Как уже было замечено выше, множество  $G_i(\{1, 2\}, 2)$  есть часть множества  $S(\{1, 2\}, 2)$ , ограниченная гиперплоскостями  $H_b$  и  $H_e$ , которые в данном случае являются прямыми  $x_1 = y_{i-1}$  и  $x_1 = y_i$  соответственно. Разбиение множества  $G_i(\{1, 2\}, 2)$  состоит из одного шага ( $l = 1$ ).  $H_{c_1}$  есть 0-мерная плоскость, проходящая через начало координат (в данном случае совпадает с началом координат); гиперплоскости  $D_0^{(1)}, \dots, D_{n_0}^{(1)}$  суть прямые, пересекающиеся в начале координат. Прямые  $D_0^{(1)}, D_{n_0}^{(1)}$ , касательные к множеству  $G_i(\{1, 2\}, 2)$ , совпадают с границами множества  $S(\{1, 2\}, 2)$  и образуют угол, который далее делится прямыми  $D_1^{(1)}, \dots, D_{n_0-1}^{(1)}$  так, чтобы выполнялись соотношения (35).

Итак, в результате имеем разбиение каждого множества  $G_i(I, k)$  на  $n_0^{m-2}$  подмножеств (для каждого  $i$  эти подмножества обозначим через  $G_{ij}(I, k)$ ,  $j = 1, \dots, n_0^{m-2}$ ), причем выполнены соотношения

$$\mathbb{P}(e_1 \in G_{ij}(I, k)) = \frac{p_n}{n_0^{m-2}} \quad (i = 1, \dots, n_0; j = 1, \dots, n_0^{m-2}).$$

**Лемма 7.** Мощность семейств векторов  $G_{ij}(I, k) \cap E_n$  при  $n \rightarrow \infty$  почти всегда удовлетворяет неравенству

$$|G_{ij}(I, k) \cap E_n| > \frac{np_n}{2n_0^{m-2}}. \quad (36)$$

Доказательство аналогично доказательствам лемм 1–2.

Для каждого  $l = 1, \dots, m-2$  введем обозначение:

$$\gamma_l = \max_{i, j=1, \dots, n_0} \angle(D_{j-1}^{(l)}, D_j^{(l)}) -$$

максимальная величина угла между двумя соседними гиперплоскостями на шаге  $l$  процедуры разбиения множеств  $G_i(I, k)$ . Так как  $n_0 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то число гиперплоскостей  $D_j^{(l)}$  возрастает. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_l = 0 \quad (l = 1, \dots, m-2).$$

Из этого факта вытекает следующая

**Лемма 8.** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m-1}$  и  $\gamma_{ij} = \max\{\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \text{существуют такие } k_1 > 0, k_2 > 0, \text{ что } k_1 \mathbf{a}, k_2 \mathbf{b} \in G_{ij}(I, k)\}$  ( $i = 1, \dots, n_0, j = 1, \dots, n_0^{m-2}$ ). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{ij} = 0.$$

Из леммы 8 следует, что если два  $(m-1)$ -мерных вектора задают лучи, пересечение которых с множеством  $G_{ij}(I, k)$  не пусто, то величина угла между ними стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

#### 4.2. Процедура выравнивания

В этом разделе доказаны утверждения, связанные с отработкой процедуры выравнивания, т. е. с алгоритмом  $\mathcal{A}_2$ .

**Лемма 9.** При любом  $\alpha_3 > 0$  и  $n \rightarrow \infty$  почти всегда

$$\left\| \sum_{j=1}^n e_j \right\| \leq \ln^{\alpha_3} n \sqrt{n}. \quad (37)$$

Доказательство. По определению нормы  $\hat{s}$  и векторов  $e_j$  имеем

$$\mathbb{P} \left( \left\| \sum_{j=1}^n e_j \right\| \leq \ln^{\alpha_3} n \sqrt{n} \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^{(m-1)!} A_i \right),$$

где каждое из событий  $A_i$  является событием

$$\left\{ \left| \sum_{j=1}^n (p_{i_1 j} - p_{i_2 j}) \right| \leq \sqrt{n} \ln^{\alpha_3} n \right\}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq m.$$

Тогда

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^{(m-1)!} A_i \right) = 1 - \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{(m-1)!} \bar{A}_i \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{(m-1)!} \mathbb{P}(\bar{A}_i).$$

Сумма в правой части этого соотношения состоит (независимо от  $n$ ) из конечного числа слагаемых. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что при  $n \rightarrow \infty$  каждое слагаемое этой суммы стремится к нулю. Воспользуемся вторым неравенством Чебышева  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq x) \leq \mathbb{D}X/x^2$  [1, с. 81]. В данном случае

$$X = \sum_{j=1}^n (p_{i1j} - p_{i2j}), \quad \mathbb{E}X = 0, \quad \mathbb{D}X = 2n\mathbb{D}p_{11}, \quad x = \sqrt{n} \ln^{\alpha_3} n.$$

В результате получаем

$$\mathbb{P}(\bar{A}_i) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n (p_{i1j} - p_{i2j})\right| > \sqrt{n} \ln^{\alpha_3} n\right) \leq \frac{2n\mathbb{D}p_{11}}{n \ln^{2\alpha_3} n} \rightarrow 0.$$

Лемма 9 доказана.

**Лемма 10.** При  $n \rightarrow \infty$  алгоритм  $\mathcal{A}_2$  почти всегда выполняет корректную процедуру выравнивания.

*Доказательство.* Для доказательства необходимо проверить, удовлетворяют ли операции, выполняемые алгоритмом  $\mathcal{A}_2$ , свойствам а)–с) корректности процедуры выравнивания.

Свойство а) выполняется очевидным образом, так как в ходе выполнения шагов  $0, 1, \dots, m-1$  алгоритма значения  $p_{ij}$  только увеличиваются.

Свойство б) выполняется в силу выбора векторов  $e_j$ , координаты которых изменяются в ходе выполнения алгоритма. На шаге 0 изменяются векторы  $e_j = (p_{2j} - p_{1j}, \dots, p_{mj} - p_{1j}) \in L^+ \cap E_n$ , для которых выполняется неравенство

$$e_j(i) = p_{i+1,j} - p_{1j} \geq y \quad (38)$$

при некотором  $i$ . Изменение этих векторов осуществляется путем увеличения величины  $p_{1j}$  на величину  $\Delta$ , не превосходящую  $y$  (см. описание алгоритма  $\mathcal{A}_2$ ). Таким образом, с учетом (38) получаем

$$p_{1j}^* = p_{1j} + \Delta \leq p_{1j} + y \leq p_{i+1,j} \leq p_{\max}.$$

Аналогично рассматриваются шаги  $1, \dots, m-1$ .

Свойство с) может быть переформулировано следующим образом:

$\sum_{j=1}^n e_j^* = \mathbf{0}$ . Перед началом работы алгоритма без ограничения общности

можно считать, что  $\sum_{j=1}^n e_j = \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{m-1})$ .

Проанализируем выполнение шага 0 алгоритма (в случае  $l_{i_1} > l_1$ ). Перед шагом 0 имеем  $l_{i_1} - l_1 = w_{i_1-1}$ , а по завершении алгоритма:

$$l_{i_1}^* = l_{i_1}, \quad l_{i_1}^* - l_1^* = \max\{0, w_{i_1-1} - |L^+ \cap E_n|y\}.$$

Если правая часть последнего равенства не равна 0, то свойство **с)** не будет выполнено. Поэтому докажем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$w_{i_1-1} - |L^+ \cap E_n| \cdot y < 0$$

почти всегда. Действительно, используя леммы 2, 9 и (11), при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\begin{aligned} w_{i_1-1} &\leq \ln^{\alpha_3} n \sqrt{n} < C_1 \sqrt{n} \ln^{1-\alpha_1} n \\ &< |S(I, k) \cap L \cap E_n| < |L^+ \cap E_n| < |L^+ \cap E_n|y. \end{aligned}$$

Последние два неравенства справедливы в силу определения множеств  $S(I, k)$ ,  $L$ ,  $L^+$  и величины  $y$ . Итак, мы показали, что результат выполнения шага 0 алгоритма не противоречит свойству **с)**.

Рассмотрим теперь шаг  $k$ . Перед шагом  $k$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ) имеем  $\hat{l}_{i_1} - l_{i_k} = w_{i_k-1}$ , а по окончании алгоритма

$$l_{i_1}^* = \hat{l}_{i_1}, \quad l_{i_1}^* - l_k^* = \max\{0, w_{i_k-1} - |L_{i_k}^- \cap E_n| \cdot y\}. \quad (39)$$

Применяя те же рассуждения, что и при рассмотрении шага 0 алгоритма, получаем

$$w_{i_k-1} < |L_{i_k}^- \cap E_n| \cdot y$$

почти всегда при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, правая часть второго равенства из (39) почти всегда есть 0. Таким образом, мы получили, что по завершении алгоритма выполняется равенство  $l_1^* = l_{i_k}^*$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ). Лемма 10 доказана.

**Лемма 11.** *Справедливы следующие соотношения:*

$$|L \cap E_n^*| \leq |L \cap E_n|; \quad S \cap E_n \subseteq S \cap E_n^*.$$

*Доказательство.* Справедливость леммы следует из описания алгоритма  $\mathcal{A}_2$ .

Лемма 11 означает, что почти всегда при  $n \rightarrow \infty$  в результате процедуры выравнивания число «больших» векторов не увеличится, а к семейству «малых» векторов возможно добавятся новые элементы, причем все «малые» векторы, содержащиеся в нем до процедуры выравнивания, останутся неизменными. Число  $|L \cap E_n^*|$  «больших» векторов по

окончании процедуры выравнивания определяет число шагов в цикле  $A_0$  алгоритма  $\mathcal{A}_3$ , и лемма 11 с учетом леммы 1 позволяет оценить эту величину сверху.

**Лемма 12.** При любом  $\alpha > 0$  и  $n \rightarrow \infty$  почти всегда

$$|L \cap E_n^*| < \sqrt{n} \ln^{1+\alpha} n.$$

Что же касается семейства «малых» векторов, то лемма 11, в частности, позволяет заключить, что в результате процедуры выравнивания мощность любого подсемейства  $S_1 \subseteq S \cap E_n^*$  не уменьшается, т. е.  $|S_1| \leq |S_1^*|$ . Следовательно, оценка мощности подсемейств  $G_{ij}(I, k) \cap E_n$  из леммы 7 верна и для мощности подсемейств  $G_{ij}(I, k) \cap E_n^*$ .

**Лемма 13.** При  $n \rightarrow \infty$  почти всегда  $|G_{ij}(I, k) \cap E_n^*| > \frac{np_n}{2n_0^{m-2}}$ .

#### 4.3. Суммирование больших векторов

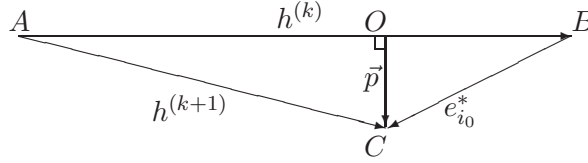
Покажем, что циклы  $A_0, A_1, A_2$ , выполняемые на шаге 2 алгоритма  $\mathcal{A}_3$ , завершаются через конечное число шагов.

При каждом выполнении цикла  $A_1$  вектор  $h_j$  изменяется на вектор  $e_i^*$ , где  $i$  определяется процедурой **Add**. Цикл заканчивается, как только оказывается, что  $h_j \in G_i(J, k)$  ( $i = 1, 2$ ;  $J, k$  определяются процедурой **Add**). Последнее означает, что  $\|h_j\| \leq y_2$ . Напомним, что перед началом цикла  $A_1$  выполнялось равенство  $\|h_j\| = \|e_j^*\|/2$ , где  $e_j^* \in L \cap E_n^*$ . Хотелось бы получить ответы на два вопроса: насколько велика может быть величина  $\|e_j^*\|/2$  и какова минимальная величина  $\delta$ , на которую уменьшается модуль вектора  $h_j$  при каждом выполнении цикла. Ответ на первый вопрос дает лемма 3, а на второй — следующая

**Лемма 14.** Пусть  $h^{(k)}$  обозначает вектор, полученный из вектора  $h$  после  $k$ -го выполнения цикла  $A_1$  ( $A_2$ ) в алгоритме  $\mathcal{A}_3$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), и  $\delta = \|h^{(k)}\| - \|h^{(k+1)}\|$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\delta \geq \begin{cases} \frac{1}{2}y_{n_0-1}, & \text{если } \|h_j^{(k)}\| \geq y; \\ \frac{1}{2}y_{i-1}, & \text{если } y_i \leq \|h_j^{(k)}\| \leq y_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n_0 - 2). \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть при  $(k+1)$ -м выполнении цикла  $A_1$  с помощью процедуры **Add** был получен номер  $i_0$ . Тогда  $h^{(k+1)} = h^{(k)} + e_{i_0}^*$ . Согласно процедуре **Add**  $e_{i_0}^* \in G_i(J, k)$ , где  $J, k$  таковы, что  $-h^{(k)} \in S(J, k)$ , причем  $e_{i_0}^*$  — вектор, имеющий наименьшую величину угла с вектором  $h^{(k)}$ . Введем обозначения, указанные на рис. 2.


 Рис. 2.  $(k+1)$ -й виток цикла  $A_1$ 

Дважды воспользуемся неравенством треугольника

$$\|h^{(k+1)}\| \leq \|A\vec{O}\| + \|\vec{p}\| = \|h^{(k)}\| - \|\vec{OB}\| + \|\vec{p}\| \leq \|h^{(k)}\| - \|e_{i_0}^*\| + 2\|\vec{p}\|.$$

Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  получаем

$$\begin{aligned} \delta &\geq \|e_{i_0}^*\| - 2\|\vec{p}\| \geq \|e_{i_0}^*\| - 4|\vec{p}| = \|e_{i_0}^*\| - 4|e_{i_0}^*| \sin(\angle OBC) \\ &\geq \|e_{i_0}^*\| (1 - 4\sqrt{m-1} \sin(\angle OBC)) \geq \frac{1}{2}\|e_{i_0}^*\| \geq \frac{1}{2}y_{i-1}. \end{aligned}$$

Напомним, что норма  $\|\cdot\|$  была определена в (5),  $|\cdot|$  — обычная евклидова норма. Мы воспользовались эквивалентностью этих двух норм в  $\mathbb{R}^{m-1}$ . Мы также учли, что по лемме 8 величина  $\sin(\angle OBC)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма 14 доказана.

Итак, для того чтобы показать, что циклы  $A_1, A_2$  завершаются при  $n \rightarrow \infty$ , с учетом леммы 14 нужно убедиться в выполнении неравенств

$$y_{\max} < |E_n^* \cap G_{n_0j}| y_{n_0-1}; \quad y_{i+1} < |E_n^* \cap G_{ij}| y_{i-1} \quad (40)$$

( $i = 2, \dots, n_0 - 1$ ), а для цикла  $A_0$  — неравенств

$$|E_n^* \cap L| \cdot y_{\max} < |E_n^* \cap G_{n_0j}| \cdot y_{n_0-1}; \quad |E_n^* \cap L| \cdot y_{i+1} < |E_n^* \cap G_{ij}| \cdot y_{i-1} \quad (41)$$

( $i = 2, \dots, n_0 - 1$ ), из которых следуют неравенства (40). Каждое неравенство из (41) предполагает предельный случай, а именно: все векторы из семейства  $E_n^* \cap L$  имеют одинаковое направление, одинаковый модуль, равный максимально возможной величине  $y_{\max}$ ; более того, предполагается, что при каждом выполнении циклов  $A_1, A_2$  вектор  $e_{i_0}^*$  выбирается из одного и того же множества  $G_{ij}(J, k)$ . Доказательство неравенств (41) для описанного предельного случая влечет и завершение циклов  $A_0, A_1, A_2$  во всех других ситуациях.

В силу лемм 6, 12 и 13 при любом  $\delta > 0$  имеем

$$\frac{|E_n^* \cap L|}{|E_n^* \cap G_{n_0j}|} < \frac{2n^{1/2}n_0^{m-2} \ln^2 n}{np_n}; \quad \frac{y_{\max}}{y_{n_0-1}} < C(np_n \ln n)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} (n \ln n)^\delta. \quad (42)$$

Согласно обозначениям из разд. 3.1  $n_0 \sim Cn^\lambda$ ;  $p_n \sim Cn_0^{-1}$ . Поэтому

$$\frac{|E_n^* \cap L| \cdot y_{\max}}{|E_n^* \cap G_{n_0j}| \cdot y_{n_0-1}} < n^\alpha \ln^3 n,$$

где

$$\alpha = \frac{2\lambda((m-1)(2+\varepsilon)-1) - \varepsilon + 2\delta(2+\varepsilon)}{2(2+\varepsilon)}. \quad (43)$$

Покажем, что  $\alpha < 0$ . Для этого заметим, что  $\varepsilon > 0$  (см. условие **I**) и  $\lambda = \frac{\varepsilon}{4(m-1)(2+\varepsilon)}$ . Подставляя значение  $\lambda$  в (43), получаем

$$2(2+\varepsilon)\alpha = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2(m-1)(2+\varepsilon)} - \varepsilon + 2\delta(2+\varepsilon) < -\frac{\varepsilon}{2} + 2\delta(2+\varepsilon).$$

Второе неравенство из (42) выполняется при всех  $\delta > 0$ . Поэтому зафиксируем такое значение  $\delta$ , что  $2\delta(2+\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Итак,  $\alpha < 0$  и первое неравенство в (41) доказано. Остальные неравенства из (41) доказываются аналогично.

Таким образом, мы показали, что циклы  $A_0, A_1, A_2$  алгоритма  $\mathcal{A}_3$  завершаются почти всегда при  $n \rightarrow \infty$ .

#### 4.4. Оценка радиуса суммирования

Рассмотрим циклы  $A_1, A_2$  алгоритма  $\mathcal{A}_3$  и проанализируем структуру перестановки  $\pi^j$  ( $j = 1, \dots, |L \cap E_n^*|$ ). В первых  $k_1$  позициях перестановки  $\pi^j$  находятся номера векторов  $v_t^{(j)}$ , в  $(k+1)$ -й позиции — вектор  $e_j^* \in L \cap E_n^*$ . Заметим, что суммирование векторов с номерами из перестановки  $\pi^j$  начинается из точки внутри шара радиуса  $y_2$  (согласно описанию алгоритма **A**<sub>3</sub>). По лемме 14 последовательность  $\left\{ \left\| \sum_{t=1}^i v_t^{(j)} \right\| \right\}_{i=1}^{k_1}$

монотонно возрастает, причем  $\left\| \sum_{t=1}^{k_1} v_t^{(j)} \right\| < \frac{1}{2} \|e_j^*\|$ . Это означает, что ни одна из частичных сумм  $\sum_{t=1}^i v_t^{(j)}$  ( $i = 1, \dots, k_1$ ) не лежит за пределами шара радиуса  $\|e_j^*\|/2 + y_2$ . Учитывая соотношение (16), получаем

$$\left\| \sum_{t=1}^{k_1} v_t^{(j)} + e_j^* \right\| < \frac{1}{2} \|e_j^*\| + y_2.$$

Далее по лемме 14 делаем вывод о монотонном убывании последователь-



НОСТИ

$$\left\{ \left\| \sum_{t=1}^{k_1} v_t^{(j)} + e_j^* + \sum_{t=k_1+1}^i w_t^{(j)} \right\| \right\}_{i=k_1+1}^{k_2}$$

и, учитывая соотношение (16), начинаем суммирование векторов согласно перестановке  $\pi^{j+1}$  из некоторой точки внутри шара радиуса  $y_2$ . Таким образом, мы установили, что суммирование «больших» векторов происходит внутри шара радиуса  $R_1 = \frac{1}{2} \max_{j=1, \dots, n} \|e_j^*\| + y_2$ .

Суммирование «малых» векторов, т. е. векторов, норма которых не превышает  $y_n$ , происходит согласно теореме 1. Суммирование начинается из точки внутри шара радиуса  $y_2$  и осуществляется внутри шара радиуса

$$R_2 = \left( m - 2 + \frac{1}{m-1} \right) y + y_2.$$

Покажем, что  $R_1 > R_2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Определим величину  $y_{\min}$  соотношением  $\mathbb{P}(\|e_1\| > y_{\min}) = n^{-1} \ln n$ . Легко видеть (см. доказательство леммы 3), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{j=1, \dots, n} \|e_j^*\| > y_{\min}) = 0. \quad (44)$$

По лемме 4 величины  $y_{\min}$ ,  $y$  удовлетворяют соотношениям  $\mathbb{P}(\xi > y_{\min}) = Cn^{-1} \ln n$ ,  $\mathbb{P}(\xi > y) = Cn^{-1/2} \ln n$ , где  $\xi$  — случайная величина, распределенная по закону  $G$ . Тогда по лемме 5  $y = o(y_{\min})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует неравенство  $R_1 > R_2$ .

Для завершения доказательства соотношения (9) остается заметить, что  $y_2 = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$  согласно определению  $y_2$ .

#### 4.5. О статистической эффективности алгоритма

В ходе доказательства были рассмотрены несколько событий, которые при  $n \rightarrow \infty$  происходят или не происходят почти всегда, благодаря чему и удалось получить оценку радиуса суммирования (9). Заметим, что все такие события происходят или не происходят одновременно с одним из событий, определенных соотношениями (17), (20), (36), (37) и (44). Если бы число перечисленных событий было бы конечно и не зависело от  $n$ , то можно было бы заключить, что при  $n \rightarrow \infty$  почти всегда происходят все эти события сразу и, таким образом, почти всегда полностью завершаются алгоритмы  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$ , определяя и суммируя векторы  $\{e_j^*\}_{j=1}^n$  согласно условиям теоремы. Но ситуация такова: соотношение (36) означает, что при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью 1 выполняется  $n_0^{m-1}$  событий, т. е. число выполняемых событий зависит от  $n$ .

Таким образом, необходимо показать, что

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{r=1}^{n_0^{m-1}} A_r \right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (45)$$

где каждое событие  $A_r$  является событием вида

$$\left\{ |G_{ij}(I, k) \cap E_n| > \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n_0; \quad j = 1, \dots, n_0^{m-2}.$$

Тогда

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i=1}^{n_0^{m-1}} A_r \right) = 1 - \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{n_0^{m-1}} \bar{A}_r \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n_0^{m-1}} \mathbb{P}(\bar{A}_r).$$

Оценим сверху каждое слагаемое суммы в правой части этого соотношения. Для этого вспомним, что согласно соотношению перед леммой 7 вероятность  $p$  попадания вектора  $e_l$  в множество  $G_{ij}(I, k)$  равна  $p_n/n_0^{m-2}$ , и введём случайные величины

$$\xi_l = \begin{cases} 0, & \text{если } e_l \in G_{ij}(I, k), \\ 1, & \text{если } e_l \in \mathbb{R}^{m-1} \setminus G_{ij}(I, k). \end{cases}$$

Заметим, что

$$S_n \doteq \sum_{l=1}^n \xi_l = n - |G_{ij}(I, k) \cap E_n|, \quad \mathbb{E}S_n = n(1 - p), \quad \mathbb{D}S_n = np(1 - p),$$

и воспользуемся неравенством Чебышева  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq x) \leq \mathbb{D}X/x^2$  [1, с. 81]. В данном случае  $X = S_n$ ,  $x = np_n/(2n_0^{m-2})$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( |G_{ij}(I, k) \cap E_n| \leq \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right) = \mathbb{P} \left( S_n \geq n - \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( S_n - n(1 - p) \geq np - \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right) = \mathbb{P} \left( S_n - n(1 - p) \geq \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right) \\ &\leq \frac{n \frac{p_n}{n_0^{m-2}} \left( 1 - \frac{p_n}{n_0^{m-2}} \right)}{\left( \frac{np_n}{2n_0^{m-2}} \right)^2} = \frac{4(n_0^{m-2} - p_n)}{np_n} \sim n_0^{(m-1)(1-4(2+\varepsilon)/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Ясно, что  $1 - 4(2 + \varepsilon)/\varepsilon < -3$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Поэтому

$$\sum_{r=1}^{n_0^{m-1}} \mathbb{P}(\bar{A}_r) \leq n_0^{-2(m-1)} \rightarrow 0,$$

т. е. справедливо соотношение (45). Таким образом, показана статистическая эффективность алгоритма  $\mathcal{A}_3$ . Для завершения доказательства осталось заметить, что число операций, выполняемых алгоритмами  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$ , как это видно из их описания, не превышает  $O(n^2)$ . Теорема 2 доказана.

## 5. Стохастические задачи теории расписаний

В данном разделе описаны гарантированные алгоритмами  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$  результаты двух видов: условие построения оптимального расписания в задаче Open Shop и абсолютные оценки точности для стохастических задач Flow Shop, Job Shop и задачи о сборочной линии. Под стохастическими задачами мы понимаем задачи, вход которых состоит из случайных величин. В обозначениях разд. 1 мы будем считать, что  $p_{ij}$  — случайные величины, удовлетворяющие условиям **I–II**.

### 5.1. Open Shop

В [8] построен алгоритм, который для любого примера задачи Open Shop с  $m$  машинами и  $n$  работами строит расписание длины  $l_{\max}$  (необязательно допустимое) за время  $O(m^2 n^2)$ . При этом допустимость построенного расписания гарантируется условием

$$l_{\max} \geq \eta(m)p_{\max}, \quad \text{где } \eta(m) = m^2. \quad (46)$$

Один из шагов этого алгоритма — процедура выравнивания машинных нагрузок, а условие (46) выводится посредством оценки радиуса компактного суммирования векторов вида (8) с детерминированными координатами.

В стохастическом случае к задаче Open Shop также может быть применен алгоритм из [8], если в нем процедуру выравнивания заменить на алгоритм  $\mathcal{A}_2$ . Таким образом, условие (46) изменяется, так как выводится с помощью оценки радиуса компактного суммирования случайных векторов вида (8). В результате получаем следующее свойство стохастической задачи Open Shop.

**Теорема 3.** Пусть длительности операций стохастической задачи Open Shop с  $m$  машинами и  $n$  работами удовлетворяют условиям **I–II**.

Тогда при  $l_{\max} \geq \left(\frac{5}{2}m - 2 + o(1)\right) p_{\max}$  и  $n \rightarrow \infty$  почти всегда существует алгоритм, который строит расписание длины  $l_{\max}$  с временной сложностью  $O(m^2n^2)$ .

Для сравнения заметим, что для случая  $m = 3$  в [9] условие (46) улучшено:  $\eta(3) = 7$ . По теореме 3 имеем  $\eta(3) = 5,5 + o(1)$ .

### 5.2. Flow Shop, задача о сборочной линии и Job Shop

В [8] построен приближенный алгоритм, который для любого примера  $I$  задачи Flow Shop за время  $O(m^2n^2)$  строит расписание длины

$$T(I) \leq l_{\max} + (m - 1) \left( m - 2 + \frac{1}{m - 2} \right) p_{\max}. \quad (47)$$

Для стохастической задачи Flow Shop справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть длительности операций стохастической задачи Flow Shop с  $m$  машинами и  $n$  работами удовлетворяют условиям **I–II**. Тогда существует алгоритм, который при  $n \rightarrow \infty$  за время  $O(m^2n^2)$  почти всегда строит расписание длины

$$T(I) \leq l_{\max} + \left( \frac{3}{2}(m - 1) + o(1) \right) p_{\max}.$$

Для случая  $m = 4$  в [9] приведен алгоритм, гарантирующий лучшую оценку точности, нежели (47), а именно  $T(I) \leq l_{\max} + 6p_{\max}$ . В стохастическом случае справедлива

**Теорема 5.** Пусть длительности операций стохастической задачи Flow Shop с четырьмя машинами ( $m = 4$ ) и  $n$  работами удовлетворяют условиям **I–II**. Тогда существует алгоритм, который при  $n \rightarrow \infty$  за время  $O(n^2)$  почти всегда строит расписание длины  $T \leq l_{\max} + (4.5 + o(1)) p_{\max}$ .

Приближенный алгоритм для любого примера  $I$  задачи о сборочной линии с  $m$  машинами и  $n$  работами, строящий за время  $O(m^2n^2)$  расписание длины  $T(I) \leq l_{\max} + \left(m + \frac{1}{m}\right) p_{\max}$ , имеется в [7]. Мы приводим результат для стохастической задачи о сборочной линии.

**Теорема 6.** Пусть длительности операций стохастической задачи о сборочной линии с  $m$  машинами и  $n$  работами удовлетворяют условиям **I–II**. Тогда существует алгоритм, который при  $n \rightarrow \infty$  за время  $O(m^2n^2)$  почти всегда строит расписание длины  $T \leq l_{\max} + (1.5 + o(1)) p_{\max}$ .

Пусть  $r$  — максимальное число операций одной работы в задаче Job Shop с  $n$  работами и  $m$  машинами. Существует алгоритм [4] с временной сложностью  $O(n^2 m^2 r^2)$ , который для любого примера  $I$  этой задачи строит расписание длины  $T(I) \leq l_{\max} + r(r-1)(mr+1)p_{\max}$ . Результат для стохастической задачи Job Shop выглядит следующим образом.

**Теорема 7.** Пусть длительности операций стохастической задачи Job Shop с  $m$  машинами,  $n$  работами и не более чем  $r$  операциями каждой работы удовлетворяют условиям **I–II**. Тогда существует алгоритм, который при  $n \rightarrow \infty$  за время  $O(n^2 m^2 r^2)$  почти всегда строит расписание длины  $T \leq l_{\max} + \frac{3}{2} r(r-1)p_{\max}$ .

## 6. Приложение

В этом разделе формулируются некоторые определения и результаты, использованные при доказательстве теоремы 2.

**I. Правильно меняющиеся функции** ([3], с. 501). Определенная для всех  $x \geq 0$  положительная функция  $q(x)$  называется *правильно меняющейся порядка  $a$* ,  $a \geq 0$ , если для любого  $t > 0$  выполнено равенство  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(tx)}{x} = t^a$ . Приведем одно из свойств правильно меняющихся функций, которое, в основном, используется в статье:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{x^{a+\delta}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{x^{a-\delta}} = \infty$$

при любом  $\delta > 0$ .

**II. Неравенство симметризации** ([6], с. 188). Пусть  $\xi_1, \xi_2$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\xi \doteq \xi_1 - \xi_2$ ;  $\mu(\xi_1) \in \mathbb{R}$  — медиана распределения  $\xi_1$ , т. е.  $\xi_1$  таково, что  $\mathbb{P}(\xi_1 \leq \mu(\xi_1)) = \mathbb{P}(\xi_1 \geq \mu(\xi_1)) = \frac{1}{2}$ . Тогда при любом  $x > 0$  выполнено неравенство

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(\xi_1 - \mu(\xi_1) > x).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973.
3. Ибрагимов А. И., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
4. Севастьянов С. В. Алгоритм с оценкой для задачи с маршрутами деталей произвольного вида и альтернативными исполнителями // Кибернетика. 1986. № 6. С. 74–79.

5. **Севастьянов С. В.** О компактном суммировании векторов // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 3. С. 66–72.
6. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
7. **Potts C. N., Sevast'yanov S. V., Strusevich V. A., van Wassenhove L. N., Zvaneveld C. M.** The two stage assembly scheduling problem: complexity and approximation // Oper. Res. 1995. V. 43, N 2. P. 346–355.
8. **Sevast'yanov S. V.** Vector summation in Banach space and polynomial algorithms for flow shops and open shops // Math. Oper. Res. 1995. V. 20, N 1. P. 90–103.
9. **Sevast'yanov S. V.** Nonstrict vector summation in multi-operation scheduling // Ann. Oper. Res. 1998. V. 83. P. 179–211.

Адрес авторов:

Институт математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4,  
630090 Новосибирск, Россия.  
E-mail: seva@math.nsc.ru

Статья поступила

22 сентября 2004 г.

Переработанный вариант —

23 декабря 2004 г.