ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2005. Серия 1. Том 12, № 2, 3–11

УДК 519.718

О НАДЕЖНОСТИ И СЛОЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ $\{x|y\}$ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

М. А. Алехина

Показано, что в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях элементов схем почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 3ε (ε — вероятность неисправности элемента) при $\varepsilon \to 0$, причем сложность этих схем по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Исследуется задача построения асимптотически наилучших по надежности схем из ненадежных элементов в базисе $\{x|y\}$ [8] (напомним, что функция $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$ называется штрихом Шеффера). Существенное внимание уделяется сложности таких схем.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [6]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. Нейман установил, что при $\varepsilon < 1/6$ произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, на выходе которой вероятность ошибки при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c\varepsilon$ (c – некоторая константа, зависящая от базиса). С ростом числа итераций сложность схемы увеличивается экспоненциально.

Схема из ненадежных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадежностью) и сложностью. Оптимизации сложности схем уделялось главное внимание в работах С. И. Ортюкова [7], Д. Улига [9] и некоторых других авторов. Введем необходимые определения и сформулируем результаты названных авторов.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект 04.01.032).

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных элементов в произвольном конечном базисе Б $= \{e_1, ..., e_m\}$ [8]. (Множество всех функциональных элементов E_i, которые реализуют базисные функции e_i, будем также называть базисом Б [5]). Каждому элементу E_i базиса приписано положительное число $v(E_i)$ — вес элемента E_i. Сложность схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов и обозначается через $L(S)$. Пусть $\rho = \min v(E_i)/(n(E_i)-1)$, где минимум берется по всем таким элементам E_i базиса, что $n(E_i) > 1$, а $n(E_i)$ — число существенных переменных функции e_i, реализуемой элементом E_i, $i = 1, 2, ..., m$.

Предполагается (как и у Дж. Неймана), что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям. Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что при $\varepsilon < 1/2$ ненадежность любой схемы, содержащей хотя бы один элемент, не меньше ε.

Пусть $P(f) = \inf P(S)$, где S — схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$, назовем *асимптотически наилучшей* (*асимптотически оптимальной*) по надежности, если $P(A) \sim P(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Введем функцию Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \ \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, ..., x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leqslant p$, а максимум – по всем булевым функциям f от n переменных.

Результат С. И. Ортюкова [7] состоит в следующем: если $\varepsilon < \varepsilon_0$, $p > q(\varepsilon)\, L_g$, где $q(\varepsilon) = \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, а L_g — минимальное число надежных элементов, необходимое для реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе, то существует такая функция $\rho(\varepsilon) \to \rho$ при $\varepsilon \to 0$, что

$$L_{p,\varepsilon}(n) \lesssim \rho(\varepsilon) \cdot 2^n/n.$$

В случае инверсных неисправностей, появляющихся с вероятностью не более ε, Д. Улиг [9] показал, что для любых c, b ($c, b > 0$) существует ε'

($\varepsilon' \in (0,\ 1/2)$) такое, что при любых $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon'$, и $p,\ p \geqslant (1+b)\varepsilon L_g$ (точнее при любом $p,\ p \geqslant q(\varepsilon)L_g$), выполнено соотношение

$$L_{p,\varepsilon}(n) \lesssim (1+c)\rho \cdot 2^n/n.$$

Таким образом, С. И. Ортюков и Д. Улиг для инверсных неисправностей нашли методы синтеза оптимальных по сложности схем, функционирующих с некоторым уровнем надежности $1-p$.

Если базис Б содержит функцию голосования (т. е. $L_g = 1$), то при $p \sim \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$) схемы, построенные С.И Ортюковым и Д. Улигом, являются не только оптимальными по сложности, но и асимптотически наилучшими по надежности (см. замечание 1). Эти схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$. Являются ли схемы, построенные С. И. Ортюковым и Д. Улигом, асимптотически наилучшими по надежности в том случае, когда базис Б не содержит функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3)$? Ответ на этот вопрос получен в настоящей работе для базиса Б $= \{x|y\}$.

Для сравнения с результатами С. И. Ортюкова и Д. Улига нужно знать величину L_g в базисе $\{x|y\}$. Легко видеть, что функция $g(x_1, x_2, x_3)$ равна функции

$$(x_1|x_2)|(((x_1|x_3)|(x_2|x_3))|((x_1|x_3)|(x_2|x_3))) \qquad (1)$$

Моделируя формулу (1) схемой из шести элементов, имеем неравенство $L_g \leqslant 6$. С другой стороны, нетрудно проверить, что для реализации функции голосования g надо использовать не менее пяти элементов, т. е. $L_g \geqslant 5$. Значит, схемы, построенные С. И. Ортюковым и Д. Улигом, функционируют с ненадежностью, не превосходящей p, где $p > q(\varepsilon)L_g > 5\varepsilon$. В то же время из теоремы 1 (она доказана ниже) следует, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше 3ε при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, нет оснований считать схемы, построенные С. И. Ортюковым и Д. Улигом, асимптотически наилучшими по надежности.

Итак, рассмотрим задачу построения асимптотически наилучших по надежности схем из ненадежных элементов в базисе $\{x|y\}$ и оценим сложность этих схем (веса всех элементов считаются равными единице). Ответы на вопросы «Какова надежность (ненадежность) асимптотически наилучших по надежности схем?», «Какие функции можно реализовать такими схемами?» и «Какова сложность асимптотически наилучших по надежности схем?» содержатся в теоремах 1, 4, 6 и 7.

Теорема 1. *При $\varepsilon \leqslant 1/160$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 48\varepsilon^2$.*

При доказательстве теоремы 1 используются теоремы 2 и 3, доказанные в работе [1].

Пусть схема S_h реализует функцию $x|y$ с вероятностями ошибок на выходе $P_0(00) = \alpha$, $P_0(01) = \beta$, $P_0(10) = \delta$, $P_1(11) = \tau$, и пусть $\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$.

Теорема 2 [1]. *Если $\mu \leqslant 1/160$, то любую булеву функцию f можно реализовать схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 4\mu$.*

Теорема 3 [1]. *Пусть f — произвольная булева функция, S — схема ее реализующая с ненадежностью $P(S)$. Тогда можно построить такую схему $\varphi(S)$, реализующую функцию f, что*

$$\begin{aligned} P(\varphi(S)) \leqslant \max\{&2\alpha + \tau + 2(\beta+\delta)P(S) + 2(P(S))^2, \\ &\alpha + (\beta+\delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2\}, \\ L(\varphi(S)) = 4L&(S) + 3L(S_h) \lesssim 4L(S). \end{aligned} \tag{2}$$

Замечание 2. При инверсных неисправностях все вероятности ошибок на выходе любого базисного элемента (в нашем случае элемента «штрих Шеффера») при любом входном наборе значений переменных одинаковы и равны ε. Поэтому $\mu = \varepsilon$ и соотношение (2) принимает вид

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{3\varepsilon + 4\varepsilon P(S) + 2P^2(S), \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 8\varepsilon P(S) + 4P^2(S)\}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. По теореме 2 при $\varepsilon \leqslant 1/160$ любую булеву функцию можно реализовать схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 4\varepsilon$ (см. замечание 2). Применяя теорему 3, по схеме S построим схему $\varphi(S)$. По формуле (3) имеем $P(\varphi(S)) \leqslant 3\varepsilon + 48\varepsilon^2$. Схема $\varphi(S)$ — искомая. Теорема 1 доказана.

Пусть $h(\tilde{x})$ — произвольная булева функция, где $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n)$, а $K(n)$ — множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = (\bar{x}_i \vee h(\tilde{x}))^a$, где $1 \leqslant i \leqslant n, a \in \{0, 1\}$.

Теорема 4. *Пусть $\varepsilon \leqslant 1/8$, $f(\tilde{x})$ — булева функция, $f \notin K(n)$, и S — любая схема, реализующая f. Тогда $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$.*

Доказательству теоремы 4 предпошлем леммы 1–3.

Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию f' с ненадежностью $P(C) \leqslant 1/2$. Обозначим через p^1 минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 0$. Аналогично,

p^0 — минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 1$.

Лемма 1 [3]. *Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам*:

$P_1(S,\tilde{a}) \geqslant p^1$, *если* $f(\tilde{a}) = 0$;

$P_0(S,\tilde{a}) \geqslant p^0$, *если* $f(\tilde{a}) = 1$.

Замечание 3. Из леммы 1 следует, что $P(S) \geqslant p^i,\ i = 0; 1$.

Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы. Пусть выходному элементу E схемы S приписана функция «штрих Шеффера». Первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_2. Обозначим через $P_{\bar{f}_i}(S_i,\tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i, реализующей функцию $f_i,\ i = 1, 2$.

Лемма 2. *Вероятности ошибок на выходе схемы S равны*:

$P_0(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_1(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 0,\ i = 1, 2$;*

$P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon + (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_0(S_2,\tilde{a}) - P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a}))(1 - 2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 1,\ i = 1, 2$;*

$P_0(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_1(S_1,\tilde{a})(1 - P_0(S_2,\tilde{a}))(1 - 2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;*

$P_0(S,\tilde{a}) = \varepsilon + (1 - P_0(S_1,\tilde{a}))P_1(S_2,\tilde{a})(1 - 2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$.*

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

Пусть схема S, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, такова, что оба входа ее выходного элемента E соединены с выходом некоторой подсхемы B. Пусть $P_1(B,\tilde{a})$ и $P_0(B,\tilde{a})$ — вероятности ошибок на выходе схемы B.

Лемма 3. *Вероятности ошибок на выходе схемы S равны*:

$P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_0(B,\tilde{a})(1 - 2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ является таким, что $f(\tilde{a}) = 0$;*

$P_0(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_1(B,\tilde{a})(1 - 2\varepsilon)$, *если набор $\tilde{a}$ является таким, что $f(\tilde{a}) = 1$.*

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

Доказательство теоремы 4. Пусть f — булева функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4, а S — произвольная схема, ее реализующая. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S. Поскольку $f \notin K(n)$, возможны два случая.

1. Входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3. По лемме 2, учитывая замечание 2, вероятность p_1 ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3, равна $p_1 = \varepsilon + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon) = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 = p^1$. Учитывая замечание 3, по лемме 1 при $\varepsilon \leqslant 1/8$ справедливо неравенство $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$.

2. Входы элемента E_1 соединены с выходом одного элемента E_2. Возможны два случая.

2.1. Входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_3 и E_4. Тогда (см. пункт 1 доказательства) вероятность p_1 ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_2, E_3 и E_4, равна $p_1 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 = p^1$. По лемме 3 вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, равна $p_0 = \varepsilon + (3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3)(1 - 2\varepsilon) = 4\varepsilon - 10\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4 = p^0$. По лемме 1, учитывая замечание 3, при $\varepsilon \leqslant 1/8$ верно неравенство $P(S) \geqslant 4\varepsilon - 10\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.2. Оба входа элемента E_2 соединены с выходом одного элемента E_3. Тогда вероятности ошибок p_0 и p_1 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3, вычисляются двукратным применением леммы 3 и равны $\varepsilon + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) = 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$. По лемме 1, учитывая замечание 3, при $\varepsilon \leqslant 1/8$ верно неравенство $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $f \notin K(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$.

Нетрудно проверить, что число функций в классе $K(n)$ равно $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных. Поэтому при инверсных неисправностях элементов $x|y$ почти все булевы функции в базисе из этих элементов можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$.

Ответ на вопрос о сложности асимптотически наилучших по надежности схем содержится в теоремах 6 и 7. Докажем, что эти схемы можно строить со сложностью, по порядку равной сложности минимальных схем, состоящих только из надежных элементов.

При доказательстве теорем 6 и 7 используются теорема 5 и лемма 4, доказанные в работе [4].

Теорема 5 [4]. *При $\mu \leqslant 1/600$ любую булеву функцию от n перемен-*

ных можно реализовать такой схемой S, что

$$P(S) \leqslant 7\mu \text{ и } L(S) \lesssim 56 \cdot 2^n/n.$$

В отличие от теоремы 2 в теореме 5 оцениваются сразу две величины — ненадежность и сложность схемы. Поэтому ограничения на параметр μ (в нашем случае $\mu = \varepsilon$) являются более жесткими.

Обозначим через G схему, реализующую функцию голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.$$

Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f. Возьмем три экземпляра схемы S, их выходы соединим со входами схемы G. Так построенную по схеме S схему будем обозначать через $\psi(S)$. Очевидно, схема $\psi(S)$ реализует функцию f. Справедлива следующая

Лемма 4 [4]. $P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(G)$.

Из теоремы 5 для базиса $\{x|y\}$ имеем

Следствие 1. *При $\varepsilon \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leqslant 7\varepsilon$ и $L(A) \lesssim 56 \cdot 2^n/n$.*

Теорема 6. *При $\varepsilon \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой B, что*

$$P(B) \leqslant 3\varepsilon + 126\varepsilon^2 \text{ и } L(B) \lesssim 224 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему S, удовлетворяющую условиям следствия 1, и по ней построим схему $\varphi(S)$. Тогда по теореме 3 имеем $L(\varphi(S)) \lesssim 4 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 224 \cdot 2^n/n$. Из соотношения (3) следует, что $P(\varphi(S)) \leqslant 3\varepsilon + 126\varepsilon^2$. Теорема 6 доказана.

Лемма 5. *При $\varepsilon \leqslant 1/600$ функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ можно реализовать такой схемой S_g, что*

$$P(S_g) \leqslant 3\varepsilon + 33\varepsilon^2 \text{ и } L(S_g) = 111.$$

Доказательство. Моделируя формулу (1), построим схему C, которая реализует функцию голосования g и содержит шесть элементов. Очевидно, что $L(C) = 6$ и $P(C) \leqslant 6\varepsilon$.

По схеме C построим схему $\varphi(C)$ (см. теорему 3). Ясно, что ее сложность равна 27, а согласно (3) ненадежность при $\varepsilon \leqslant 1/600$ удовлетворяет неравенству: $P(\varphi(C)) \leqslant 3\varepsilon + 96\varepsilon^2 \leqslant 3{,}16\varepsilon$.

По схеме $\varphi(C)$ построим схему $\varphi^2(C)$. По теореме 3 имеем $L(\varphi^2(C)) = 4L(\varphi(C)) + 3 = 111$. При $\varepsilon \leqslant 1/600$ из (3) следует, что $P(\varphi^2(C)) \leqslant 3\varepsilon + 33\varepsilon^2$. Лемма 5 доказана.

Теорема 7. *При $\varepsilon \leqslant 1/600$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой A, что*

$$P(A) \leqslant 3\varepsilon + 35\varepsilon^2 \text{ и } L(A) \lesssim 672 \cdot 2^n/n.$$

Доказательство. Возьмем схему S, удовлетворяющую условиям следствия 1. По ней построим схему $\psi(S)$ (см. лемму 4), выбрав в качестве схемы схему S_g из леммы 5. Тогда $L(\psi(S)) \lesssim 3 \cdot 56 \cdot 2^n/n = 168 \cdot 2^n/n$.

По леммам 4 и 5 при $\varepsilon \leqslant 1/600$ имеем $P(\psi(S)) \leqslant 3P^2(S) + P(S_g) \leqslant 3(7\varepsilon)^2 + 3\varepsilon + 33\varepsilon^2 = 3\varepsilon + 180\varepsilon^2 \leqslant 3{,}3\varepsilon$.

По схеме $\psi(S)$ построим схему $\varphi(\psi(S))$. Тогда $L(\varphi(\psi(S))) \lesssim 4 \cdot 168 \cdot 2^n/n = 672 \cdot 2^n/n$. По формуле (3) при $\varepsilon \leqslant 1/600$ получаем $P(\varphi(\psi(S))) \leqslant 3\varepsilon + 35\varepsilon^2$. Теорема 7 доказана.

Таким образом, в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не превосходит 3ε при $\varepsilon \to 0$, причем сложность этих схем по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Полученные результаты справедливы для двойственных функций в базисе $\{x \downarrow y\} = \{\bar{x}\&\bar{y}\}$ при инверсных неисправностях элементов [2].

Автор благодарит О. Б. Лупанова за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надежности схем из ненадежных элементов $x|y$ // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 9–14.
2. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 6–8.
3. **Алехина М. А.** Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 3. С. 3–28.
4. **Алехина М. А.** Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Физматлит, 2002. С. 193–218.

5. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68–139.
7. **Ортюков С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Тр. семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 166–168.
8. **Редькин Н. П.** Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
9. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский
государственный университет,
каф. математики и
матетематического моделирования,
ул. Красная, д. 40,
440026 Пенза,
Россия.
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
13 сентября 2004 г.

Переработанный вариант —
11 января 2005 г.