ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2005. Серия 1. Том 12, № 2, 12–55

УДК 519.17

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОРГРАФОВ ИЗ МИНИМАЛЬНЫХ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ С НАИМЕНЬШИМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ЭНТРОПИИ

С. В. Сорочан

Рассматривается задача характеризации в терминах запрещенных порожденных подграфов каждого из минимальных по включению наследственных классов орграфов, имеющих наименьшую положительную энтропию, и прослеживается взаимосвязь этой задачи с алгоритмическими и сложностными вопросами распознавания орграфов из указанных классов. Все исследуемые классы, за исключением двух, полностью охарактеризованы запрещенными порожденными подграфами. Для одного из оставшихся классов такая характеризация найдена частично и доказано, что задача распознавания орграфов из этого класса полиномиально разрешима. С другой стороны, установлено, что задача распознавания орграфов из другого класса является NP-полной.

Введение

На протяжении этой статьи считаем, что все рассматриваемые обыкновенные и ориентированные графы не имеют петель и кратных односторонних дуг. Некоторые термины, применяемые для обыкновенных графов, естественным образом распространяются на ориентированные графы. Это относится, в частности, к понятиям изоморфизма, порожденного подграфа и наследственного класса.

Орграфы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\varphi : V_1 \to V_2$ между множествами вершин V_1 и V_2, сохраняющая ориентацию дуг, т. е. $(u, v) \in E_1 \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$ для любой упорядоченной пары $(u, v) \in V_1^2$.

Подграф G' орграфа $G = (V, E)$, *порожденный* (*индуцированный*) *множеством вершин* $V' \subseteq V$, — это орграф (V', E'), где $E' = E \cap (V')^2$. Этот подграф обозначается через $G\langle V'\rangle$. Ясно, что G' получается из G

при удалении всех вершин из множества $V - V'$ и всех дуг, инцидентных удаленным вершинам.

Множество ориентированных графов называется *наследственным классом*, если вместе с любым орграфом G классу принадлежит каждый орграф, изоморфный порожденному подграфу графа G. Иначе говоря, наследственный класс орграфов — это множество орграфов, замкнутое относительно удаления и переименования вершин.

Пусть $\mathcal{X}$ — наследственный класс орграфов. Обозначим через $\mathcal{X}_n$ совокупность всех орграфов с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, принадлежащих классу $\mathcal{X}$. Класс $\mathcal{X}$ называется *бесконечным*, если при любом натуральном n множество $\mathcal{X}_n$ непусто.

В [1] установлено, что для любого бесконечного наследственного класса $\mathcal{X}$ ориентированных графов существует *энтропия*

$$h(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 |\mathcal{X}_n|}{n^2},$$

и доказано, что для любого такого класса эта функция либо равна нулю, либо не меньше $1/4$.

Следует отметить, что в определении энтропии класс $\mathcal{X}$ рассматривается как множество орграфов с занумерованными вершинами, т. е. изоморфизм между графами не учитывается. На самом деле это уточнение является не очень существенным. Действительно, пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ — соответствующий множеству $\mathcal{X}$ класс *абстрактных орграфов*. Графы из $\widetilde{\mathcal{X}}$ получаются из графов, принадлежащих $\mathcal{X}$, удалением пометок вершин. Легко видеть, что

$$\frac{|\mathcal{X}_n|}{n!} \leqslant |\widetilde{\mathcal{X}}_n| \leqslant |\mathcal{X}_n|.$$

Поскольку $\log(n!) = o(n^2)$, то из этих неравенств следует, что $h(\widetilde{\mathcal{X}}) = h(\mathcal{X})$.

В [1] также описаны минимальные (по включению) классы ориентированных графов, имеющие энтропию, равную нулю и $1/4$. Среди наследственных классов орграфов с нулевой энтропией минимальными являются три класса: множество $\mathcal{E}$ всех *пустых орграфов* (ориентированных графов с пустым множеством дуг), множество $\mathcal{C}$ всех *полных* орграфов (в полном ориентированном графе каждая упорядоченная пара вершин является дугой) и класс $\mathcal{T}$ всех *транзитивных турниров* (ориентированных графов, в которых каждая пара вершин соединена в точности одной дугой, и из существования дуг (a, b) и (b, c) следует существование дуги (a, c)).

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, а $V_1 \subset V$ и $V_2 \subset V$ — непересекающиеся множества. Для каждой пары вершин $(x, y) \in V_1 \times V_2$ положим

$$P(x,y) = \begin{cases} a, & \text{если } (x,y) \notin E \text{ и } (y,x) \notin E, \\ l, & \text{если } (x,y) \notin E, \text{ а } (y,x) \in E, \\ r, & \text{если } (x,y) \in E, \text{ а } (y,x) \notin E, \\ d, & \text{если } (x,y) \in E \text{ и } (y,x) \in E. \end{cases}$$

Правые части указанных равенств являются первыми буквами соответствующих английских слов “absent”, “left”, “right” и “double”. Величину $P(x, y)$ назовем *типом* пары (x, y) по отношению к орграфу G.

Для классов $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ орграфов и непустого неупорядоченного множества $Y \subseteq \{a, l, r, d\}$ через $\mathcal{X}_1 Y \mathcal{X}_2$ обозначается множество всех таких орграфов $G = (V, E)$, что множество вершин V можно разбить на два такие подмножества V_1 и V_2, что подграф $G\langle V_1\rangle$, порожденный множеством V_1, принадлежит классу $\mathcal{X}_1$, подграф $G\langle V_2\rangle$, порожденный множеством V_2, принадлежит классу $\mathcal{X}_2$, а тип $P(x, y)$ каждой пары вершин $(x, y) \in V_1 \times V_2$ принадлежит множеству Y.

В [1] доказано, что среди наследственных классов орграфов с энтропией, равной 1/4, имеется 30 попарно различных минимальных по включению классов. Ими в точности являются такие классы вида $\mathcal{X}_1 Y \mathcal{X}_2$, для которых множества $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ и Y задаются одним из следующих способов:

- $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \{\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{T}\}$, а $Y = \{a, l\}$ или $Y = \{d, l\}$ (число попарно различных классов такого вида равно 18);

- $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ — это любое двухэлементное сочетание с повторениями из множества $\{\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{T}\}$, а $Y = \{a, d\}$ или $Y = \{r, l\}$ (имеется 12 попарно различных классов такого вида).

Для удобства при обозначении этих классов договоримся опускать фигурные скобки. Так, например, $\mathcal{E}\{a, l\}\mathcal{C} = \mathcal{E}al\mathcal{C}$.

Пусть $\mathrm{Free}(M)$ — класс всех орграфов, не содержащих в качестве порожденных подграфов орграфы из множества M. Известно, что класс $\mathcal{X}$ орграфов является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть охарактеризован в терминах минимальных запрещенных порожденных подграфов, т. е. существует такое множество M орграфов, что $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(M)$, причем M состоит из всех орграфов, каждый из которых не принадлежит классу $\mathcal{X}$, а любой его собственный порожденный подграф принадлежит классу $\mathcal{X}$. Через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ обозначается множество всех минимальных запрещенных порожденных подграфов для $\mathcal{X}$.

В этой статье исследуются алгоритмические и сложностные вопросы распознавания орграфов из минимальных по включению наследственных классов орграфов, имеющих энтропию, равную 1/4, и прослеживается их взаимосвязь с задачей характеризации указанных классов в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Следует отметить, что ранее аналогичные задачи были решены для наследственных классов неориентированных графов. В статье [2] показано, что наименьшее положительное значение энтропии, принимаемое наследственными классами обыкновенных графов, равно 1/2, а минимальными по включению среди классов, имеющих энтропию 1/2, являются класс *двудольных графов*, класс *расщепляемых графов* и класс *графов, дополнительных к двудольным*. Характеризация этих классов в терминах запрещенных порожденных подграфов приведена, например, в [3]. Кроме того, известно, что задача распознавания графов в каждом из них разрешима за полиномиальное время.

Статья состоит из семи параграфов. В § 1 для наследственного класса орграфов вводятся понятия дополнения и обращения и устанавливается взаимосвязь между решениями задач характеризации этих классов. Показано, что множество из 30-ти минимальных по включению наследственных классов орграфов с энтропией, равной 1/4, разбивается на 14 классов эквивалентности, в каждом из которых любой класс является либо дополнением, либо обращением некоторого другого класса. Далее проводится исследование задач характеризации и распознавания для одного представителя в каждом из этих классов эквивалентности. В § 2 это делается для классов, взаимно однозначно соответствующих классам обыкновенных двудольных и расщепляемых графов, в §§ 3 и 4 — для оставшихся классов вида $\mathcal{E}Y\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}Y\mathcal{C}$ $\quad (|Y| = 2)$ соответственно, а в §§ 5 и 6 — для классов $\mathcal{E}Y\mathcal{T}$ и двух классов вида $\mathcal{T}Y\mathcal{T}$ $\quad (|Y| = 2)$ соответственно. Каждый из классов, исследованных в §§ 2–6, за исключением $\mathcal{T}al\mathcal{T}$, полностью охарактеризован в терминах запрещенных порожденных подграфов. На основе полученной характеризации в § 6 установлена полиномиальная разрешимость задачи распознавания орграфов в этих классах. Для класса $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ найдена частичная характеризация и доказано, что задача распознавания орграфов из этого класса полиномиально разрешима. С другой стороны, в § 7 установлено, что задача распознавания орграфов из класса $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$, названного классом *транзитивно-двудольных турниров*, является NP-полной. Данный результат существенно отличается от ситуации для наследственных классов неориентированных графов.

§ 1. О связи характеризации наследственного класса орграфов с характеризацией его дополнения и обращения

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, а $\overline{E} = V^2 \backslash E$. Обозначим через $\overline{G} = (V, \overline{E})$ *орграф, дополнительный к* G, а через $G^{-1} = (V, E^{-1})$ *обращение* орграфа G, т. е. орграф, полученный переориентацией всех дуг в G.

Для множества $\mathcal{X}$ ориентированных графов обозначим через $\overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}^{-1}$ множества орграфов, полученных из орграфов, принадлежащих $\mathcal{X}$, соответственно при помощи перехода к дополнению и обращению. Если $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, то класс $\mathcal{X}$ назовем *самодополнительным*; если $\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ назовем *самообратимым*.

Пусть известна характеризация наследственного класса $\mathcal{X}$ орграфов в терминах запрещенных порожденных подграфов, т. е. $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(M)$ для некоторого множества орграфов M. Тогда нетрудно видеть, что для дополнения и обращения класса $\mathcal{X}$ справедливы соотношения

$$\overline{\mathcal{X}} = \mathrm{Free}(\overline{M}), \;\; \mathcal{X}^{-1} = \mathrm{Free}(M^{-1}).$$

Поэтому достаточно решить задачи характеризации и распознавания только для таких из тридцати перечисленных во введении классов, ни один из которых не является дополнением и обращением любого другого.

На множестве наследственных классов орграфов определим бинарное отношение $\sim$ следующим образом:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \Longleftrightarrow \mathcal{X} = \mathcal{Y}, \;\; \text{или} \;\; \mathcal{X} = \overline{\mathcal{Y}}, \;\; \text{или} \;\; \mathcal{X} = \mathcal{Y}^{-1}, \;\; \text{или} \;\; \mathcal{X} = (\overline{\mathcal{Y}})^{-1}.$$

Очевидно, что введенное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, которое разбивает множество всех наследственных классов орграфов на непересекающиеся классы эквивалентности по данному отношению.

В следующей теореме дается факторизация по отношению $\sim$ множества минимальных по включению наследственных классов орграфов, имеющих наименьшую положительную энтропию.

Теорема 1. *Множество, состоящее из 30-ти минимальных по включению наследственных классов, имеющих энтропию 1/4, представимо в виде объединения следующих 14-ти непересекающихся классов эквивалентности по отношению* $\sim$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_1 = \{\mathcal{E}ad\mathcal{E}, \mathcal{C}ad\mathcal{C}\}, \mathcal{K}_2 = \{\mathcal{E}ad\mathcal{C}\}, \mathcal{K}_3 = \{\mathcal{E}al\mathcal{E}, \mathcal{C}dl\mathcal{C}\}, \mathcal{K}_4 = \{\mathcal{E}lr\mathcal{E}, \mathcal{C}lr\mathcal{C}\},\\
&\mathcal{K}_5 = \{\mathcal{E}dl\mathcal{E}, \mathcal{C}al\mathcal{C}\}, \;\mathcal{K}_6 = \{\mathcal{E}al\mathcal{C}, \mathcal{E}dl\mathcal{C}, \mathcal{E}ar\mathcal{C}, \mathcal{E}dr\mathcal{C}\}, \;\mathcal{K}_7 = \{\mathcal{E}lr\mathcal{C}\},\\
&\mathcal{K}_8 = \{\mathcal{E}al\mathcal{T}, \mathcal{C}dr\mathcal{T}, \mathcal{E}ar\mathcal{T}, \mathcal{C}dl\mathcal{T}\}, \;\mathcal{K}_9 = \{\mathcal{E}ad\mathcal{T}, \mathcal{C}ad\mathcal{T}\},\\
&\mathcal{K}_{10} = \{\mathcal{E}lr\mathcal{T}, \mathcal{C}lr\mathcal{T}\}, \;\mathcal{K}_{11} = \{\mathcal{E}dl\mathcal{T}, \mathcal{C}ar\mathcal{T}, \mathcal{E}dr\mathcal{T}, \mathcal{C}al\mathcal{T}\},\\
&\mathcal{K}_{12} = \{\mathcal{T}ad\mathcal{T}\}, \;\mathcal{K}_{13} = \{\mathcal{T}al\mathcal{T}, \mathcal{T}dl\mathcal{T}\}, \;\mathcal{K}_{14} = \{\mathcal{T}lr\mathcal{T}\}.
\end{aligned}$$

В справедливости теоремы 1 легко убедиться, проверив, что любые два различных наследственных класса, лежащие в одном классе $\mathcal{K}_i$, эквивалентны, $1 \leqslant i \leqslant 14$, и при любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant 14$, любой наследственный класс из $\mathcal{K}_i$ не является дополнением и обращением никакого наследственного класса из $\mathcal{K}_j$.

Замечание. Поскольку мощность каждого класса эквивалентности $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_7, \mathcal{K}_{12}, \mathcal{K}_{14}$ равна 1, принадлежащие им наследственные классы являются одновременно и самодополнительными, и самообратимыми. Значит, запрещенное множество M орграфов для каждого из этих наследственных классов также является самодополнительным и самообратимым, т. е. $M = \overline{M} = M^{-1}$.

Из теоремы 1 следует, что задачи характеризации и распознавания достаточно решить только для одного представителя в каждом из описанных классов эквивалентности. Не уменьшая общности, будем решать эти задачи для тех 14-ти множеств орграфов, которые в каждом классе эквивалентности указаны первыми. Это классы вида $\mathcal{X}_1 Y \mathcal{X}_2$, для которых множества $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ и Y выбираются одним из следующих способов:

- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{E}$, а $Y = \{a, l\}$, или $Y = \{a, d\}$, или $Y = \{l, r\}$, или $Y = \{d, l\}$ (4 класса);
- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{C}$, а $Y = \{a, l\}$, или $Y = \{a, d\}$, или $Y = \{l, r\}$ (3 класса);
- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{T}$, а $Y = \{a, l\}$, или $Y = \{a, d\}$, или $Y = \{l, r\}$, или $Y = \{d, l\}$ (4 класса);
- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{T}$, а $Y = \{a, l\}$, или $Y = \{a, d\}$, или $Y = \{l, r\}$ (3 класса).

Для всех неориентированных графов, которые рассматриваются в этой статье, используем стандартные обозначения (см., например, [3]). Введем специальные обозначения для некоторых ориентированных графов и их композиций.

Если G — обыкновенный граф, то через G^{dbl} обозначается орграф, полученный из G заменой каждого его ребра на две противоположно ориентированные дуги. Пусть O_n — пустой орграф с n вершинами, P_n^{dir} — ориентированный путь, содержащий n вершин, T_2 — двухвершинный турнир, T_3^{dir} — ориентированный треугольник, T_3^{tr} — транзитивный треугольник, C_n^{dir} — орцикл, содержащий n вершин, $C_n(i, n-i)$ — ориентированный n-угольник, дуги которого можно разбить на два ориентированных пути с общими началом и концом длины i и $n-i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Если G_1 и G_2 — орграфы с непересекающимися множествами вершин, то $G_1 + G_2$ обозначает их *несвязное объединение*, или *сумму* (при $G_1 \cong G_2$ используем естественное обозначение $2G_1$). Аналогично, через $G_1 \circ G_2$ обозначается *соединение* орграфов G_1, G_2 — орграф, полученный соединением каждой вершины орграфа G_1 двусторонней дугой с каждой вершиной орграфа G_2, а через $G_1 \to G_2$ *одностороннее произведение* орграфов G_1 и G_2, т. е. орграф, полученный соединением каждой вершины орграфа G_1 односторонней дугой с каждой вершиной орграфа G_2, причем все эти дуги ориентированы по направлению от G_1 к G_2.

Пусть $G_1, G_2, \dots, G_{n+1}$ — орграфы и при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, бинарная операция $\overset{i}{\bullet}$ является одной из операций $+, \circ, \to, \leftarrow$. Тогда через $G_1 \overset{1}{\bullet} G_2 \overset{2}{\bullet} \cdots \overset{n}{\bullet} G_{n+1}$ обозначается такой орграф, для которого при каждом $i = 1, \dots, n$ подграф, порожденный множеством вершин $V(G_i) \cup V(G_{i+1})$, изоморфен орграфу $G_i \overset{i}{\bullet} G_{i+1}$, а при любых i и j, $1 \leqslant i < j - 1 \leqslant n$, подграф, порожденный множеством $V(G_i) \cup V(G_j)$, изоморфен орграфу $G_i + G_j$.

Отметим, что все выше определенные композиции орграфов при любых операндах строятся единственным (с точностью до изоморфизма) способом.

§ 2. Характеризация классов, взаимно однозначно соответствующих классам двудольных и расщепляемых графов

Среди 14-ти наследственных классов, представляющих классы эквивалентности по отношению $\sim$, есть два класса, для которых задачи характеризации и распознавания решаются легче по сравнению с остальными классами. Это классы $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$. Легко заметить, что если каждую двустороннюю дугу заменить на неориентированное ребро в каждом орграфе из $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$, получим обыкновенный двудольный граф, а в результате выполнения аналогичного действия в любом орграфе из $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$ получится обыкновенный расщепляемый граф. Таким образом, класс $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$ орграфов находится во взаимно однозначном соответствии с классом двудольных графов, а класс $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$ — с классом расщепляемых графов.

По теореме Кёнига (см., например, [3]) обыкновенный граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины в качестве порожденных подграфов. Отсюда получаем следующую характеризацию класса $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$.

Теорема 2. $\mathcal{E}ad\mathcal{E} = \mathrm{Free}(\{T_2, C_3^{\mathrm{dbl}}, C_5^{\mathrm{dbl}}, \dots, C_{2k+1}^{\mathrm{dbl}}, \dots\})$.

Несмотря на характеризацию обыкновенных двудольных графов *бесконечным* числом запрещенных порожденных подграфов, из доказательства теоремы Кёнига [3] следует, что задача распознавания двудольного графа решается за полиномиальное от числа вершин время. Это означает, что задача распознавания орграфов из класса $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$ разрешима за полиномиальное время.

Также известно [3], что обыкновенный граф является расщепляемым тогда и только тогда, когда он не содержит графы C_4, C_5 и $2K_2$ в качестве порожденных подграфов. Отсюда получаем следующую характеризацию класса $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$.

Теорема 3. $\mathcal{E}ad\mathcal{C} = \mathrm{Free}(\{T_2, C_4^{\mathrm{dbl}}, C_5^{\mathrm{dbl}}, 2K_2^{\mathrm{dbl}}\})$.

Так как множество запрещенных порожденных подграфов для класса $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$ конечно, то задача распознавания орграфов из этого класса разрешима за полиномиальное от числа вершин время.

Далее перейдем к исследованию оставшихся двенадцати классов эквивалентности по отношению $\sim$. Для десяти классов будет получена полная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов, а для двух других будет установлена сложность задачи распознавания.

Ниже приводятся теоремы, в которых описаны множества запрещенных порожденных подграфов для десяти классов. Формулировка большинства из этих теорем имеет вид $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(M)$, где $\mathcal{X}$ — рассматриваемый класс, а M — ему соответствующее запрещенное множество. Отметим, что при их доказательстве обосновываются только включения вида $\mathcal{X} \supseteq \mathrm{Free}(M)$. Обоснования противоположных включений опущены за очевидностью. В их справедливости легко убедиться, проверив, что каждый орграф из M не является порожденным подграфом никакого другого орграфа из M и не принадлежит классу $\mathcal{X}$.

§ 3. Характеризация классов с пустыми долями

В этом параграфе дадим характеризацию классов графов, в которых подграфы, порожденные вершинами каждой из двух долей, не содержат дуг.

Теорема 4. $\mathcal{E}al\mathcal{E} = \mathrm{Free}(M_4)$, *где* $M_4 = \{K_2^{\mathrm{dbl}}, P_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}\}$.

Доказательство. Пусть G — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из множества M_4. Очевидно, что каждая неизолированная вершина графа G является либо источником, либо стоком. Тогда все источники отнесем к одной доле, а все стоки — к другой доле (изолированные вершины можно распределить

произвольно). Между любыми двумя вершинами, принадлежащими одной доле, нет дуг, а каждая дуга G направлена от некоторого источника к одному из стоков. Следовательно, $G \in \mathcal{E}al\mathcal{E}$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. $\mathcal{E}lr\mathcal{E} = \mathrm{Free}(M_5)$, *где* $M_5 = \{K_2^{\mathrm{dbl}}, T_2 + O_1, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}\}$.

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из множества M_5, V_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин пустой подграф, а $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. По определению множества V_1 существует такая вершина $u \in V_1$, что для пары (u, v) выполняется одно из требований $(u, v) \in E(G)$ или $(v, u) \in E(G)$.

Покажем, что для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ справедливо одно из условий $(x, y) \in E(G)$ или $(y, x) \in E(G)$. Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $w \neq u$, $(w, v) \notin E(G)$ и $(v, w) \notin E(G)$. Тогда $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong T_2 + O_1$. Противоречие.

Осталось доказать, что множество V_2, как и V_1, порождает пустой подграф. Допустим, что существуют такие две вершины $v_1 \in V_2$ и $v_2 \in V_2$, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, v_1) \in E(G)$. По доказанному для любой вершины $x \in V_1$ имеем $(x, v_1) \in E(G)$ или $(v_1, x) \in E(G)$, а также $(x, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, x) \in E(G)$. Отсюда и из соотношения $G \in \mathrm{Free}(\{K_2^{\mathrm{dbl}}\})$ следует, что $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle \cong T_3^{\mathrm{dir}}$ или $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle \cong T_3^{\mathrm{tr}}$. Противоречие. Следовательно, $G \in \mathcal{E}lr\mathcal{E}$. Теорема 5 доказана.

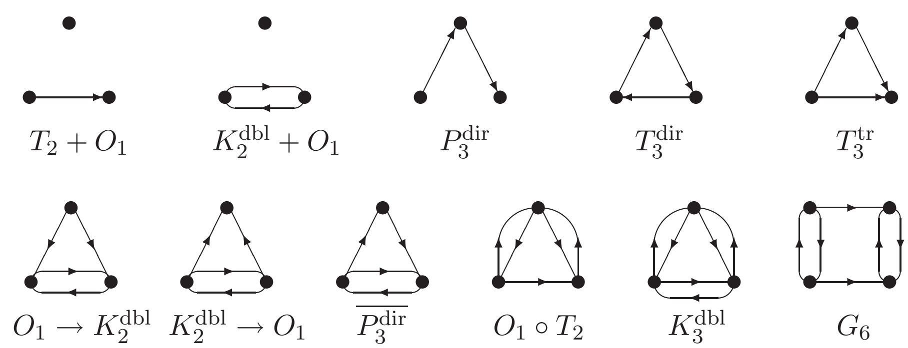


Рис. 1. Минимальные запрещенные подграфы для класса $\mathcal{E}dl\mathcal{E}$

Теорема 6. $\mathcal{E}dl\mathcal{E} = \mathrm{Free}(M_6)$, *где*

$$M_6 = \Big\{T_2 + O_1, K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1, P_3^{\mathrm{dir}}, \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}, \\ O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}, K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1, O_1 \circ T_2, K_3^{\mathrm{dbl}}, G_6\Big\}$$

и множество орграфов M_6 изображено на рис. 1.

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_6. Пусть V_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин пустой подграф, и $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. По определению множества V_1 для v существует такая вершина $u \in V_1$, что $(u, v) \in E(G)$ или $(v, u) \in E(G)$.

Докажем, что для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ справедливо хотя бы одно из условий: $(x, y) \in E(G)$ или $(y, x) \in E(G)$. Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $w \neq u$, $(w, v) \notin E(G)$ и $(v, w) \notin E(G)$. Тогда $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong T_2 + O_1$ или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$. Противоречие.

Далее покажем, что множество V_2, как и V_1, порождает пустой подграф. Допустим, что существуют такие вершины $v_1 \in V_2$ и $v_2 \in V_2$, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, v_1) \in E(G)$. По доказанному если $x \in V_1$, то $(x, v_1) \in E(G)$ или $(v_1, x) \in E(G)$, а также $(x, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, x) \in E(G)$. Значит, подграф $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle$ изоморфен хотя бы одному орграфу из множества $\left\{T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}, O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}, K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1, \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}, O_1 \circ T_2, K_3^{\mathrm{dbl}}\right\}$. Противоречие.

Осталось доказать, что если между вершинами орграфа G, лежащими в разных множествах V_1 и V_2, имеются односторонние дуги, то они ориентированы в одном направлении. Пусть, не уменьшая общности, в G есть такие вершины $a \in V_1$ и $b \in V_2$, что $(a, b) \in E(G)$, а $(b, a) \notin E(G)$. Покажем, что в этом случае любая другая односторонняя дуга из G так же, как и (a, b), ориентирована по направлению от V_1 к V_2. Предположим, что в G есть такие вершины $x \in V_1$ и $y \in V_2$, что $(y, x) \in E(G)$, а $(x, y) \notin E(G)$. Если $y = b$, то, очевидно, $x \neq a$ и $G\langle\{a, b, x\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dir}}$. Аналогично, если $x = a$, то $y \neq b$ и $G\langle\{y, a, b\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dir}}$. Противоречие.

Пусть $x \neq a$ и $y \neq b$. По доказанному между вершинами a и y есть хотя бы одна дуга, а также между вершинами x и b есть хотя бы одна дуга. В действительности между каждой указанной парой вершин имеются обе дуги, так как в противном случае хотя бы один из трехвершинных подграфов графа $G\langle\{a, b, x, y\}\rangle$ изоморфен орграфу P_3^{dir}. Но тогда $G\langle\{a, b, x, y\}\rangle \cong G_6$, что невозможно. Следовательно, $G \in \mathcal{E}dl\mathcal{E}$. Теорема 6 доказана.

§ 4. Характеризация классов с пустой и полной долями

Перейдем к исследованию классов графов, в каждом из которых множество вершин разбито на два такие подмножества, что любые две вер-

шины одного подмножества не смежны, а любые две вершины другого подмножества смежны.

Теорема 7. $\mathcal{E}al\mathcal{C} = \mathrm{Free}(M_7)$, *где*

$$M_7 = \Big\{O_2 \to O_1, P_3^{\mathrm{dir}}, O_1 \to O_1 \circ O_1, P_3^{\mathrm{dbl}}, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}},\\ \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}, O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}, O_1 \circ T_2, 2T_2, T_2 + K_2^{\mathrm{dbl}}, 2K_2^{\mathrm{dbl}}\Big\},$$

а множество M_7 состоит из графов, указанных на рис. 2.

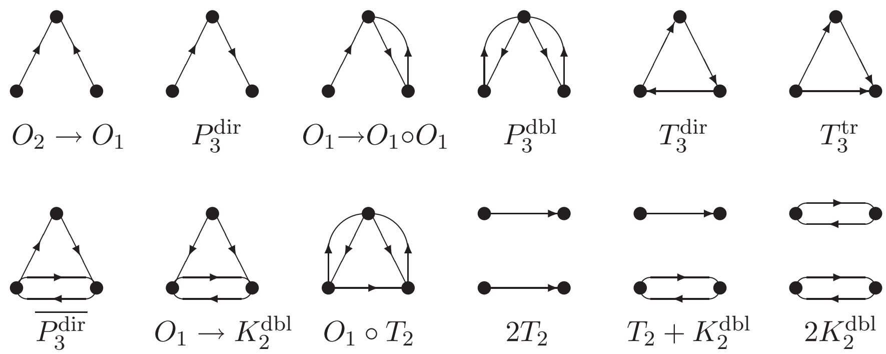


Рис. 2. Минимальные запрещенные подграфы для класса $\mathcal{E}al\mathcal{C}$

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_7. Пусть V_1 — подмножество множества $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин ориентированный полный подграф, и $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. По определению множества V_1 для v существует такая вершина $u \in V_1$, что $(u, v) \notin E(G)$ или $(v, u) \notin E(G)$.

Возможны 2 случая: в G либо есть двусторонняя дуга, либо нет двусторонних дуг.

Случай 1. В G есть двусторонняя дуга, т. е. $|V_1| \geqslant 2$.

Сначала докажем, что для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ выполняется условие $(y, x) \notin E(G)$.

Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $w \neq u$, $(w, v) \in E(G)$ и $(v, w) \in E(G)$. Тогда если между вершинами u и v нет дуг, то $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dbl}}$. Если же между u и v есть в точности одна дуга, то $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \circ T_2$. Противоречие. Следовательно, для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ либо $(x, y) \notin E(G)$, либо $(y, x) \notin E(G)$.

Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $(v, w) \in E(G)$.

Допустим, что $w \neq u$. Тогда по доказанному $(w, v) \notin E(G)$. Следовательно, если между вершинами u и v нет дуг, то $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \to O_1 \circ O_1$. Если же между u и v есть в точности одна дуга, то в зависимости от ее ориентации получаем, что $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}$ или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}$. Противоречие. Значит, $(v, w) \notin E(G)$.

Пусть $w = u$. Тогда если предположить, что $(v, u) \in E(G)$, то $(u, v) \notin E(G)$. Поэтому подграф орграфа G, порожденный вершинами u, v и любой вершиной из $V_1 - \{u\}$, изоморфен орграфу $O_1 \to O_1 \circ O_1$ или орграфу $\overline{P_3^{\mathrm{dir}}}$. Значит, $(v, u) \notin E(G)$.

Полученные противоречия доказывают, что $(y, x) \notin E(G)$ для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$.

Докажем, что подграф, порожденный множеством V_2, является пустым. Пусть существуют такие вершины $v_1 \in V_2$ и $v_2 \in V_2$, $v_1 \neq v_2$, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, v_1) \in E(G)$. Если в V_1 есть вершина x такая, что $(x, v_1) \in E(G)$ или $(x, v_2) \in E(G)$, то по доказанному $(v_1, x) \notin E(G)$ и $(v_2, x) \notin E(G)$. Следовательно, подграф $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle$ изоморфен хотя бы одному орграфу из множества $\Big\{O_2 \to O_1, P_3^{\mathrm{dir}}, O_1 \to O_1 \circ O_1, T_3^{\mathrm{tr}}, O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}\Big\}$. Если $(x, v_1) \notin E(G)$ и $(x, v_2) \notin E(G)$ для любой вершины $x \in V_1$, то из того, что в V_1 есть по крайней мере две вершины u_1 и u_2, следует, что $G\langle\{u_1, u_2, v_1, v_2\}\rangle \cong T_2 + K_2^{\mathrm{dbl}}$ или $G\langle\{u_1, u_2, v_1, v_2\}\rangle \cong 2K_2^{\mathrm{dbl}}$. Противоречие. Значит, подграф $G\langle V_2\rangle$ пустой. Поэтому $G \in \mathcal{E}al\mathcal{C}$.

Случай 2. В G нет двустронних дуг, т. е. $|V_1| = 1$.

Тогда $G \in \mathrm{Free}(M_7')$, где $M_7' = \Big\{K_2^{\mathrm{dbl}}, O_2 \to O_1, P_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}, 2T_2\Big\}$. Очевидно, что $M_7' \supset M_4$. Поэтому по теореме 4 $G \in \mathcal{E}al\mathcal{E}$. Следовательно, множество вершин орграфа G можно разбить на подмножества U_1 и U_2 такие, что подграфы $G\langle U_1\rangle$ и $G\langle U_2\rangle$ пустые, а каждая дуга ориентирована по направлению от U_1 к U_2.

Заметим, что для некоторых G указанное разбиение может быть выполнено неоднозначно. В этом случае среди всех допустимых разбиений выберем то, для которого число вершин в множестве U_1 минимально. Тогда для любой вершины $a \in U_1$ найдется такая вершина $b \in U_2$, что $(a, b) \in E(G)$.

Докажем, что $|U_1| \leqslant 1$. Предположим, что в U_1 есть хотя бы две различные вершины u_1 и u_2. Тогда если в U_2 есть такая вершина b, что $(u_1, b) \in E(G)$ и $(u_2, b) \in E(G)$, то $G\langle\{u_1, b, u_2\}\rangle \cong O_2 \to O_1$. Если же такой вершины b нет, то существуют такие вершины $v_1 \in U_2$ и $v_2 \in U_2$,

$v_1 \neq v_2$, что $(u_1, v_1) \in E(G)$, $(u_2, v_2) \in E(G)$, $(u_1, v_2) \notin E(G)$ и $(u_2, v_1) \notin E(G)$. Следовательно, $G\langle\{u_1, v_1, u_2, v_2\}\rangle \cong 2T_2$. Противоречие. Значит, $|U_1| \leqslant 1$. Поэтому $G \in \mathcal{E}al\mathcal{C}$. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. $\mathcal{E}lr\mathcal{C} = \mathrm{Free}(M_8)$, *где*

$$M_8 = \Big\{T_2 + O_1, O_1 \circ T_2, K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1, P_3^{\mathrm{dbl}}, O_1 \to O_1 \circ O_1,$$
$$O_1 \leftarrow O_1 \circ O_1, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}, O_2 \to O_2, K_2^{\mathrm{dbl}} \to K_2^{\mathrm{dbl}},$$
$$C_4^{\mathrm{dir}}, \overline{C_4^{\mathrm{dir}}}, C_4(3,1), \overline{C_4(3,1)}, C_4(2,2), \overline{C_4(2,2)}\Big\},$$

а множество M_8 *состоит из орграфов, указанных на рис.* 3.

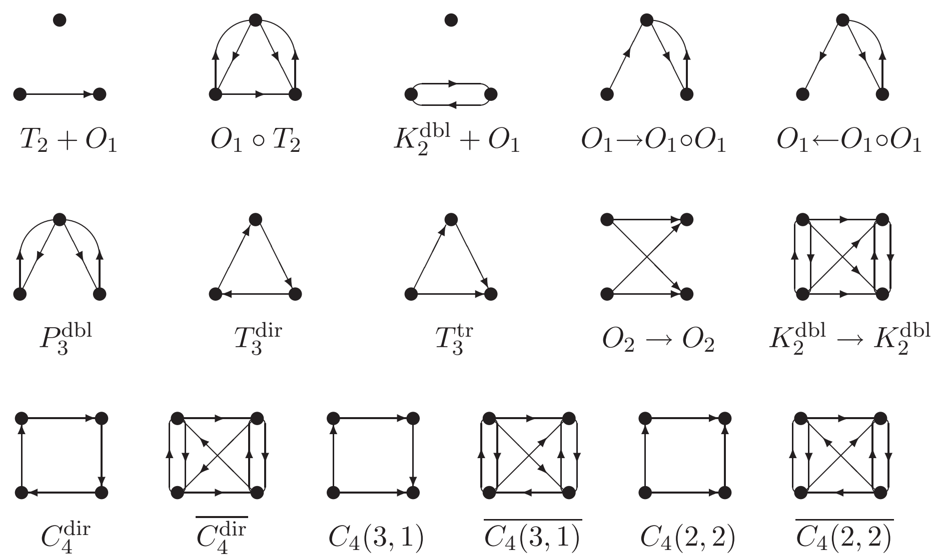


Рис. 3. Минимальные запрещенные подграфы для класса $\mathcal{E}lr\mathcal{C}$

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_8. Пусть V_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин ориентированный полный подграф, и $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. По определению множества V_1 для v существует такая вершина $u \in V_1$, что $(u, v) \notin E(G)$ или $(v, u) \notin E(G)$.

Возможны 2 случая: в G либо есть двусторонняя дуга, либо нет двусторонних дуг.

Случай 1. В G есть двусторонняя дуга, т. е. $|V_1| \geqslant 2$.

Сначала докажем, что между любыми двумя вершинами $x \in V_1$ и $y \in V_2$ имеется в точности одна дуга.

Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $w \neq u$, $(w, v) \in E(G)$ и $(v, w) \in E(G)$. Тогда $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dbl}}$ или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \circ T_2$. Противоречие. Следовательно, для любых вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ либо $(x, y) \notin E(G)$, либо $(y, x) \notin E(G)$.

Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что $w \neq u$, $(v, w) \notin E(G)$ и $(w, v) \notin E(G)$. Тогда $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$, или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \to O_1 \circ O_1$, или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \leftarrow O_1 \circ O_1$.

Если же для вершины $v \in V_2$ среди всех вершин из V_1 только одна вершина u удовлетворяет условиям $(u, v) \notin E(G)$ и $(v, u) \notin E(G)$, то снова при любом выборе вершины $w \in V_1$, $w \neq u$, получаем, что $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \to O_1 \circ O_1$ или $G\langle\{u, v, w\}\rangle \cong O_1 \leftarrow O_1 \circ O_1$.

Полученное противоречие доказывает, что для любых двух вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ справедливо только одно из условий: $(x, y) \in E(G)$ или $(y, x) \in E(G)$.

Докажем, что подграф, порожденный множеством V_2, является пустым. Предположим, что существуют такие вершины $v_1 \in V_2$ и $v_2 \in V_2$, $v_1 \neq v_2$, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, v_1) \in E(G)$.

Пусть выполняется одно из условий: $(v_1, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, v_1) \in E(G)$. По доказанному для любой вершины $x \in V_1$ справедливо одно из условий: $(x, v_1) \in E(G)$ или $(v_1, x) \in E(G)$, а также одно из условий: $(x, v_2) \in E(G)$ или $(v_2, x) \in E(G)$. Следовательно, $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle \cong T_3^{\mathrm{dir}}$ или $G\langle\{x, v_1, v_2\}\rangle \cong T_3^{\mathrm{tr}}$.

Пусть $(v_1, v_2) \in E(G)$ и $(v_2, v_1) \in E(G)$. Тогда, поскольку в V_1 имеются по крайней мере две различные вершины x_1 и x_2, а между любыми двумя вершинами из разных множеств имеется только одна дуга, то подграф $G\langle\{x_1, x_2, v_1, v_2\}\rangle$ изоморфен хотя бы одному орграфу из множества $\left\{K_2^{\mathrm{dbl}} \to K_2^{\mathrm{dbl}}, \overline{C_4^{\mathrm{dir}}}, \overline{C_4(3,1)}, \overline{C_4(2,2)},\right\}$. Противоречие. Значит, подграф $G\langle V_2\rangle$ пустой. Поэтому $G \in \mathcal{E}lr\mathcal{C}$.

Случай 2. В G нет двусторонних дуг, т. е. $|V_1| = 1$. Тогда $G \in \mathrm{Free}(M_8')$, где $M_8' = \Big\{K_2^{\mathrm{dbl}}, T_2 + O_1, T_3^{\mathrm{dir}}, T_3^{\mathrm{tr}}, O_2 \to O_2, C_4^{\mathrm{dir}}, C_4(3,1), C_4(2,2)\Big\}$.

Очевидно, что $M_8' \supset M_5$. Поэтому по теореме 5 $G \in \mathcal{E}lr\mathcal{E}$. Следовательно, множество вершин орграфа G можно разбить на подмножества U_1 и U_2, $|U_1| \leqslant |U_2|$ такие, что подграфы $G\langle U_1\rangle$ и $G\langle U_2\rangle$ пустые, а между любыми двумя вершинами из разных множеств имеется только одна дуга.

Докажем, что $|U_1| \leqslant 1$. Предположим, что в U_1 есть хотя бы две различные вершины u_1 и u_2. Так как $|U_1| \leqslant |U_2|$, то в U_2 найдутся по крайней мере две различные вершины v_1 и v_2. По выбору множеств U_1 и U_2 каждая пара (u_i, v_j) является в G односторонней дугой, $i, j = 1, 2$. В зависимости от ориентаций этих четырех дуг оказывается, что подграф $G\langle\{u_1, v_1, u_2, v_2\}\rangle$ изоморфен одному из орграфов, принадлежащих множеству $\Big\{O_2 \to O_2, C_4^{\mathrm{dir}}, C_4(3,1), C_4(2,2)\Big\}$. Противоречие. Следовательно, $|U_1| \leqslant 1$. Поэтому $G \in \mathcal{E}lr\mathcal{C}$. Теорема 8 доказана.

§ 5. Характеризация классов с пустой долей и долей, вершины которой порождают транзитивный турнир

В этом параграфе рассмотрим такие классы орграфов, в которых подграф, порожденный вершинами одной доли, не содержит дуг, а подграф, порожденный вершинами другой доли, является транзитивным турниром.

Теорема 9. $\mathrm{Forb}(\mathcal{E}ad\mathcal{T}) = \{T_3^{\mathrm{dir}}, K_3^{\mathrm{dbl}}, C_4^{\mathrm{dbl}}, 2K_2^{\mathrm{dbl}}, P_4^{\mathrm{dbl}}\} \cup M_9^{(1)} \cup M_9^{(2)}$, *где* $M_9^{(1)}$ *и* $M_9^{(2)}$ — *множества орграфов, изображенных соответственно на рис.* 4 *и* 5.

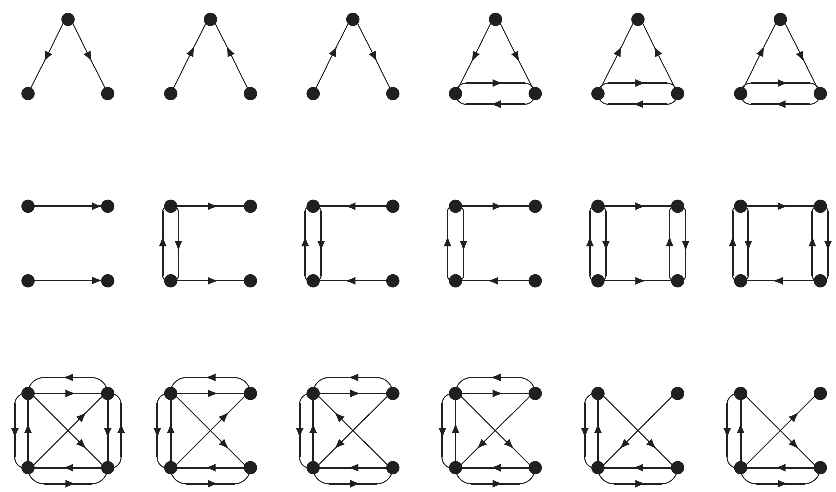


Рис. 4. Множество $M_9^{(1)}$

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G)) \notin \mathcal{E}ad\mathcal{T}$. Обозначим через $H = (V(H), E(H))$ подграф орграфа G, порожденный множеством таких вершин, каждая из которых инцидентна хотя бы одной односторонней дуге из $E(G)$. Возможны следующие случаи.

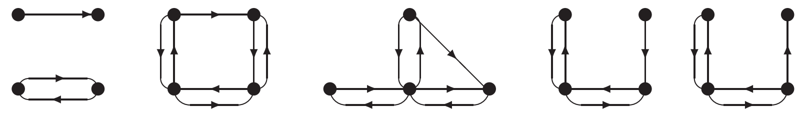


Рис. 5. Множество $M_9^{(2)}$

Случай 1. $V(H)=\varnothing$. Тогда в G нет односторонних дуг.

Рассмотрим обыкновенный граф $\widetilde{G}$, полученный заменой каждой двусторонней дуги орграфа G на неориентированное ребро. Предположим, что в $\widetilde{G}$ нет порожденных подграфов, изоморфных графам K_3, C_4, $2K_2$ и P_4. Тогда легко проверить, что $\widetilde{G}$ представим в виде $K_{1,p}+O_q$. Однако отсюда следует, что $G \in \mathcal{E}ad\mathcal{T}$. Противоречие. Следовательно, в G есть хотя бы один из порожденных подграфов K_3^{dbl}, C_4^{dbl}, $2K_2^{\mathrm{dbl}}$ или P_4^{dbl}. Каждый из них, очевидно, не принадлежит классу $\mathcal{E}ad\mathcal{T}$.

Случай 2. $V(H)\neq\varnothing$. Тогда ясно, что $|V(H)|\geqslant 2$.

2.1. Орграф H не является турниром. Следовательно, $|V(H)|\geqslant 3$. Рассмотрим любой порожденный подграф $H'=(V(H'),E(H'))$ орграфа H, не являющийся турниром, в котором есть в точности две односторонние дуги. Если эти односторонние дуги смежны, то $|V(H')|=3$, иначе $|V(H')|=4$. Нетрудно проверить, что в каждом из этих случаев независимо от числа двусторонних дуг в $E(H')$ орграф H' является минимальным запрещенным для класса $\mathcal{E}ad\mathcal{T}$ и принадлежит множеству $M_9^{(1)}$.

2.2. H — турнир, но нетранзитивный. Тогда в H и G есть порожденный подграф T_3^{dir}, не принадлежащий множеству $\mathcal{E}ad\mathcal{T}$.

2.3. H является транзитивным турниром. Так как $G\notin\mathcal{E}ad\mathcal{T}$, то подграф $G\langle V(G)-V(H)\rangle$ непустой. Значит, в нем имеются две вершины, между которыми есть двусторонняя дуга. Легко видеть, что подграф графа G, порожденный этими вершинами и любыми двумя вершинами из $V(H)$, либо является минимальным запрещенным для класса $\mathcal{E}ad\mathcal{T}$ и принадлежит множеству $M_9^{(2)}$, либо содержит орграф K_3^{dbl} в качестве порожденного подграфа. Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *$\mathcal{E}al\mathcal{T}=\mathrm{Free}(M_{10})$, где*

$$M_{10}=\Big\{K_2^{\mathrm{dbl}}, O_2\to O_1, T_3^{\mathrm{dir}}, 2T_2, P_4^{\mathrm{dir}}, C_4^{\mathrm{dir}}, O_1\to O_1\to T_2\Big\},$$

а множество M_{10} состоит из орграфов, указанных на рис. 6.

Доказательство. Пусть $G=(V(G),E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_{10}.

Пусть V_1 — множество, состоящее из всех стоков и изолированных вершин орграфа G, и $V_2 = V(G) - V_1$. Очевидно, что V_1 — независимое множество, а каждая дуга, соединяющая вершины из разных множеств, ориентирована от V_2 к V_1. Докажем, что подграф $G\langle V_2\rangle$ является транзитивным турниром. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_2^{\mathrm{dbl}}, T_3^{\mathrm{dir}}\})$, достаточно убедиться, что между любыми двумя вершинами из V_2 есть односторонняя дуга.

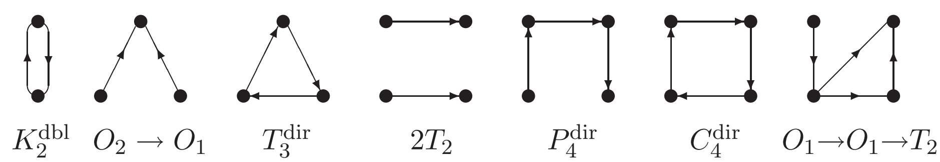


Рис. 6. Минимальные запрещенные подграфы для класса $\mathcal{E}al\mathcal{T}$

Предположим, что в V_2 найдутся вершины a и b, между которыми нет дуг. Так как каждая из них не является стоком и изолированной вершиной, то существуют такие вершины a' и b', что $(a, a') \in E(G)$ и $(b, b') \in E(G)$. Допустим, что $a' = b'$ или в G есть хотя бы одна из дуг (a, b') или (b, a'). Тогда хотя бы один из подграфов $G\langle\{a, a', b\}\rangle$ или $G\langle\{a, b', b\}\rangle$ изоморфен орграфу $O_2 \to O_1$. Противоречие. Следовательно, для любых таких вершин a' и b', что $(a, a') \in E(G)$ и $(b, b') \in E(G)$, выполняются условия $a' \neq b'$, $(a, b') \notin E(G)$ и $(b, a') \notin E(G)$. Возможны следующие два случая.

Случай 1. Между вершинами a' и b' нет дуг.

Тогда если $(a', b) \notin E(G)$ и $(b', a) \notin E(G)$, то $G\langle\{a, a', b, b'\}\rangle \cong 2T_2$. Если $(a', b) \in E(G)$ и $(b', a) \notin E(G)$ или $(a', b) \notin E(G)$ и $(b', a) \in E(G)$, то $G\langle\{a, a', b, b'\}\rangle \cong P_4^{\mathrm{dir}}$. Если же $(a', b) \in E(G)$ и $(b', a) \in E(G)$, то $G\langle\{a, a', b, b'\}\rangle \cong C_4^{\mathrm{dir}}$.

Случай 2. Между a' и b' есть односторонняя дуга. Не умаляя общности, предположим, что эта дуга начинается в a' и заканчивается в b'.

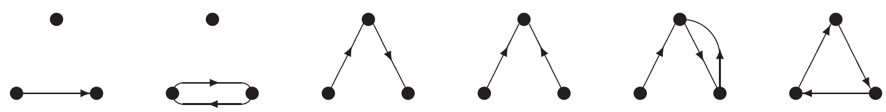
Между вершинами a' и b есть дуга, начинающаяся в a'. В противном случае $G\langle\{a', b', b\}\rangle \cong O_2 \to O_1$. С другой стороны, между вершинами a и b' нет дуг: $(a, b') \notin E(G)$ по доказанному выше, а $(b', a) \notin E(G)$, так как в противном случае $G\langle\{a, a', b'\}\rangle \cong T_3^{\mathrm{dir}}$. Но тогда подграф $G\langle\{a, a', b, b'\}\rangle$ изоморфен орграфу $O_1 \to O_1 \to T_2$.

Полученные противоречия доказывают, что между любыми двумя вершинами из V_2 есть односторонняя дуга. Следовательно, $G\langle V_2\rangle$ — транзитивный турнир и $G \in \mathcal{E}al\mathcal{T}$. Теорема 10 доказана.

Теорема 11. $\mathcal{E}dl\mathcal{T} = \mathrm{Free}(M_{11})$, *где* $M_{11} = M_{11}^{(1)} \cup M_{11}^{(2)} \cup M_{11}^{(3)}$, *а* $M_{11}^{(1)}$,

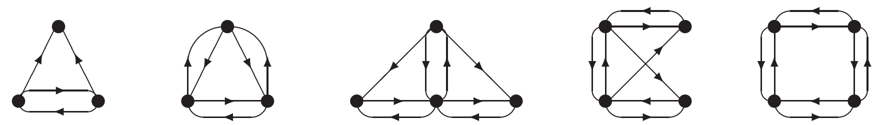
$M_{11}^{(2)}$ и $M_{11}^{(3)}$ — множества орграфов, изображенных на рис. 7–9.

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_{11}. Пусть V_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин пустой подграф, и $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. По определению множества V_1 для v существует такая вершина $u \in V_1$, что $(u, v) \in E(G)$ или $(v, u) \in E(G)$.



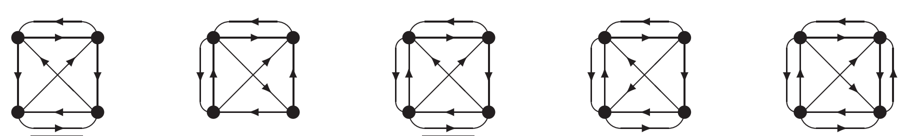
$T_2 + O_1$ $\quad K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$ $\quad P_3^{\mathrm{dir}}$ $\quad O_2 \to O_1$ $\quad O_1{\to}O_1{\circ}O_1$ $\quad T_3^{\mathrm{dir}}$

Рис. 7. Множество $M_{11}^{(1)}$



$K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1$ $\quad K_3^{\mathrm{dbl}}$ $\quad O_1 \circ (O_1 \to O_2)$ $\quad \overline{O_1{\leftarrow}O_1{\circ}O_1{\to}O_1}$ $\quad C_4^{\mathrm{dbl}}$

Рис. 8. Множество $M_{11}^{(2)}$



$\overline{C_4^{\mathrm{dir}}}$ $\quad \overline{T_2{\to}O_1{\to}O_1}$ $\quad \overline{P_4^{\mathrm{dir}}}$ $\quad \overline{O_1{\to}O_1{\to}O_1{\leftarrow}O_1}$ $\quad \overline{2T_2}$

Рис. 9. Множество $M_{11}^{(3)}$

Возможны 2 случая: $|V_1| \geqslant 2$ или $|V_1| = 1$.

Случай 1. $|V_1| \geqslant 2$, т. е. $G \notin \mathrm{Free}(\{O_2\})$.

Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, что между v и w либо нет дуг, либо есть односторонняя дуга, ориентированная от w к v. Тогда если $w \neq u$, то подграф $G\langle\{u, v, w\}\rangle$ изоморфен одному из орграфов, принадлежащих множеству $M_{11}^{(1)}$. Если же $w = u$, то из условий $(u, v) \in E(G)$ и $(v, u) \notin V(G)$ следует, что подграф, порожденный вершинами u, v и любой вершиной из $V_1 - \{u\}$, изоморфен орграфу P_3^{dir} или орграфу $O_1 \to O_1 \circ O_1$. Противоречие. Таким образом, между любыми двумя вершинами $x \in V_1$ и $y \in V_2$ графа G есть либо двусторонняя дуга, либо односторонняя дуга, ориентированная от y к x.

Осталось доказать, что подграф $G\langle V_2\rangle$ является транзитивным турниром. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{T_3^{\mathrm{dir}}\})$, то достаточно убедиться в том, что между любыми двумя вершинами из V_2 есть только одна дуга.

Предположим, что в множестве V_2 найдутся такие различные вершины y_1 и y_2, между которыми либо нет дуг, либо есть двусторонняя дуга. Возьмем в V_1 произвольные различные вершины x_1 и x_2. Тогда нетрудно проверить, что либо орграф $G\langle\{x_1, x_2, y_1, y_2\}\rangle$ изоморфен одному четырехвершинному орграфу из $M_{11}^{(2)}$, либо его подграф, порожденный удалением одной из вершин x_1 или x_2, изоморфен некоторому трехвершинному орграфу из $M_{11}^{(1)} \cup M_{11}^{(2)}$. Противоречие.

Следовательно, в множестве V_2 нет порожденных подграфов, изоморфных орграфам O_2, K_2^{dbl} и T_3^{dir}. Значит, $G\langle V_2\rangle$ — транзитивный турнир. Поэтому $G \in \mathcal{E}dl\mathcal{T}$.

Случай 2. $|V_1| = 1$, т. е. $G \in \mathrm{Free}(\{O_2\})$. Тогда между любыми двумя вершинами орграфа G есть хотя бы одна дуга.

Пусть U_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу вершин транзитивный турнир, и $U_2 = V(G) - U_1$. Если $U_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $U_2 \neq \varnothing$. По выбору множества U_1 и из условия $G \in \mathrm{Free}(\{O_2, T_3^{\mathrm{dir}}\})$ следует, что для любой вершины $y \in U_2$ существует такая вершина $x \in U_1$, что между x и y есть двусторонняя дуга.

Не уменьшая общности, можно считать, что $|U_1| \geqslant 2$, так как в противном случае из условия $G \in \mathrm{Free}(\{O_2, T_2, K_3^{\mathrm{dbl}}\})$ следует, что $G \cong K_2^{\mathrm{dbl}}$, и утверждение очевидно.

Докажем, что $|U_2| = 1$. Предположим, что в множестве U_2 имеются по крайней мере две различные вершины v_1 и v_2. Между ними может быть либо односторонняя, либо двусторонняя дуга. Возьмем в U_1 произвольные различные вершины u_1 и u_2. Тогда легко видеть, что независимо от типа пары (v_1, v_2) либо орграф $G\langle\{u_1, u_2, v_1, v_2\}\rangle$ изоморфен одному из орграфов, принадлежащих множеству $M_{11}^{(3)}$, либо его подграф, порожденный удалением одной из вершин u_1 или u_2, изоморфен орграфу $K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1$ или орграфу K_3^{dbl}. Противоречие.

Итак, в множестве U_2 имеется единственная вершина. Обозначим ее через s. Пусть существует такая вершина $a \in U_1$, что (s, a) является односторонней дугой, начинающейся в s.

Тогда если в множестве U_1 имеются хотя бы две различные вершины t_1 и t_2 такие, что (t_1, s) и (t_2, s) являются двусторонними дугами, то $G\langle\{a, t_1, t_2, s\}\rangle \cong \overline{T_2 \to O_1 \to O_1}$. Противоречие. Осталось рассмотреть случай, когда в G имеется единственная двусторонняя дуга (s, t) (t —

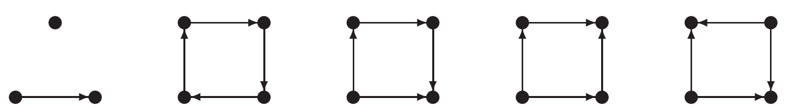
концевая вершина этой дуги, принадлежащая множеству U_1). Тогда легко видеть, что для любой вершины $b \in U_1 - \{t\}$ (в том числе и при $b = a$) односторонняя дуга (b, t) ориентирована от b к t. В противном случае в орграфе $G\langle\{a, b, s, t\}\rangle$ найдется трехвершинный подграф, изоморфный либо орграфу $K_2^{\rm dbl} \to O_1$, либо орграфу $T_3^{\rm dir}$.

Таким образом, хотя бы одна из вершин s или t является концевой вершиной любой инцидентной ей односторонней дуги. Отделив эту вершину от всех остальных вершин орграфа G, получаем допустимое разбиение $V(G)$ на транзитивный турнир и одновершинное независимое множество. Следовательно, $G \in \mathcal{E}dl\mathcal{T}$. Теорема 11 доказана.

Теорема 12. *В любом орграфе из множества* $\mathrm{Forb}(\mathcal{E}lr\mathcal{T})$ *имеется не более шести вершин.*

Доказательство. Ясно, что $K_2^{\rm dbl} \in \mathrm{Forb}(\mathcal{E}lr\mathcal{T})$. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф без двусторонних дуг, не принадлежащий классу $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$.

Пусть $\widetilde{G}$ — обыкновенный граф, полученный из G заменой каждой односторонней дуги на неориентированное ребро. Предположим, что $\widetilde{G}$ не является графом вида $K_p \circ O_q$. Тогда в $\widetilde{G}$ есть порожденный подграф, изоморфный либо графу $K_1 + K_2$, либо графу C_4. Нетрудно проверить, что соответствующий ему ориентированный подграф в G является запрещенным для класса $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$. Обозначим через $M_{12}^{(1)}$ множество всех таких попарно неизоморфных орграфов. Эти графы изображены на рис. 10.



$T_2 + O_1$ $\quad C_4^{\rm dir}$ $\quad C_4(1,3)$ $\quad C_4(2,2)$ $\quad O_2 \to O_2$

Рис. 10. Множество $M_{12}^{(1)}$

Допустим, что $\widetilde{G}$ является графом вида $K_p \circ O_q$. Возможны следующие 2 случая.

Случай 1. $q > 1$. Тогда каждый из подграфов K_p и O_q в указанном разложении определяется однозначно. Пусть V_1 и V_2 — множества вершин графов K_p и O_q соответственно. Так как $G \notin \mathcal{E}lr\mathcal{T}$, то орграф $G\langle V_1\rangle$ — нетранзитивный турнир. Значит, в нем есть порожденный ориентированный треугольник $T_3^{\rm dir}$. Добавив к нему любые две вершины из V_2, получим пятивершинный подграф в G, являющийся, очевидно, запрещенным орграфом для класса $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$. Обозначим через $M_{12}^{(2)}$ множество всех попарно неизоморфных орграфов такого вида. Нетрудно проверить,

что $|M_{12}^{(2)}| = 14$. На рис. 11 изображен граф, из которого при помощи всевозможных ориентаций его неориентированных ребер можно получить все орграфы из $M_{12}^{(2)}$.

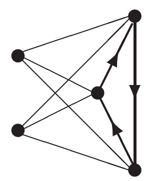


Рис. 11. Граф, из которого получаются 14 орграфов из множества $M_{12}^{(2)}$

Осталось доказать, что все орграфы из множества $M_{12}^{(2)}$ являются *минимальными* запрещенными в классе $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$. Действительно, при удалении из каждого такого орграфа любой вершины, принадлежащей выделенному ориентированному треугольнику, получаем очевидное разбиение на двухвершинные независимое множество и турнир. При удалении же любой из двух других вершин остается четырехвершинный турнир, в котором заведомо есть транзитивная тройка.

Случай 2. $q = 1$. В этом случае орграф G является турниром, причем из условия $G \notin \mathcal{E}lr\mathcal{T}$ следует, что при удалении любой вершины из G получается нетранзитивный турнир. Это означает, что для любой вершины $x \in V(G)$ имеется подграф T_3^{dir}, не содержащий x.

Предположим, что в G есть два ориентированных треугольника T_3^{dir}, не имеющие общих вершин. Рассмотрим подграф H в G, порожденный вершинами этих треугольников. При удалении любой вершины из H остается T_3^{dir}. Следовательно, H является (быть может, не минимальным) запрещенным подграфом для класса $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$.

Осталось рассмотреть случай, когда любые два ориентированных треугольника орграфа G имеют общую вершину. Покажем, что в этом случае в G найдутся два ориентированных треугольника, имеющие в точности одну общую вершину.

Пусть тройки вершин (a, b_1, c_1) и (a, b_2, c_2) из $V(G)$ порождают T_3^{dir}. Предположим, что $b_1 = b_2 = b$, а $c_1 \neq c_2$, т. е. у данных троек есть две общие вершины, a и b (и следовательно, общая дуга). При удалении из G вершины a должен остаться ориентированный треугольник, имеющий непустое пересечение с каждым из множеств $\{b, c_1\}$ и $\{b, c_2\}$. Так как тройка (b, c_1, c_2), очевидно, является транзитивной, то хотя бы одно из этих пересечений состоит в точности из одной вершины.

Итак, не уменьшая общности, можно считать, что $\{b_1, c_1\} \cap \{b_2, c_2\} = \varnothing$, т. е. тройки (a, b_1, c_1) и (a, b_2, c_2) имеют единственную общую вершину a. При удалении a из G остается ориентированный треугольник, в

которому имеется хотя бы одна вершина b_1 или c_1 и хотя бы одна вершина b_2 или c_2. Пусть, например, b_1, b_2, d — вершины этого треугольника. Рассмотрим подграф $H' = G\langle\{a, b_1, b_2, c_1, c_2, d\}\rangle$. При удалении из него любой вершины остается T_3^{dir}. Следовательно, H' является (быть может, не минимальным) запрещенным подграфом для класса $\mathcal{E}lr\mathcal{T}$. Теорема 12 доказана.

Обозначим через $M_{12}^{(3)}$ и $M_{12}^{(4)}$ множества, состоящие в точности из всех соответственно пятивершинных и шестивершинных турниров, принадлежащих множеству $\mathrm{Forb}(\mathcal{E}lr\mathcal{T})$. Можно убедиться в том, что $|M_{12}^{(3)}| = 3$, а $|M_{12}^{(4)}| = 4$. Орграфы из $M_{12}^{(3)}$ и $M_{12}^{(4)}$ являются порожденными подграфами турниров H и H', о которых говорится в доказательстве теоремы 12. Орграфы из множеств $M_{12}^{(3)}$ и $M_{12}^{(4)}$ изображены на рисунках 12 и 13 соответственно.

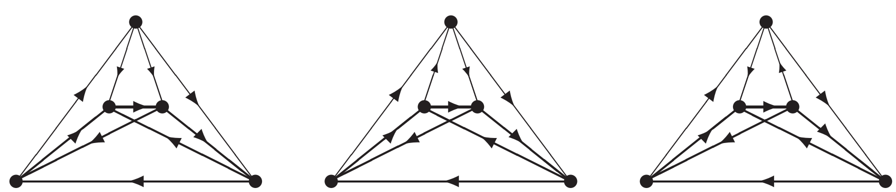


Рис. 12. Множество $M_{12}^{(3)}$

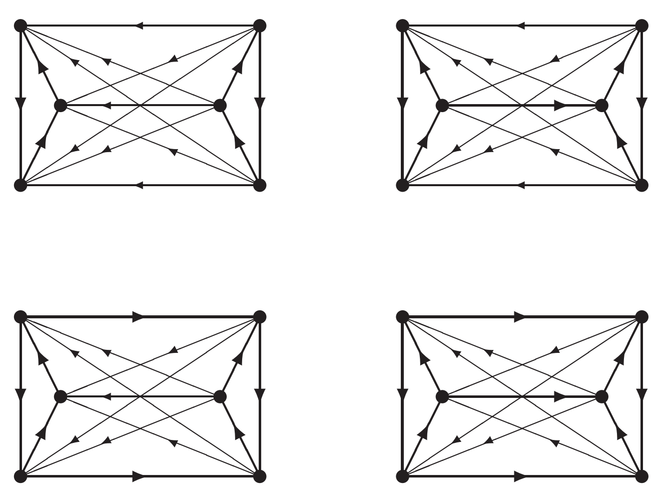


Рис. 13. Множество $M_{12}^{(4)}$

Особенностью турниров из $M_{12}^{(3)}$ является то, что в каждом из них есть три ориентированных треугольника, два из которых имеют общую дугу (a, b), а третий не содержит вершины a и b. Обратим внимание на то, что имеется 4 способа ориентации дуг между вершиной v из третьего ориентированного треугольника, не принадлежащей первым двум, и вершинами a и b (см. рис. 12). Однако два из этих способов дают изоморфные турниры. Они изображены на рис. 14.

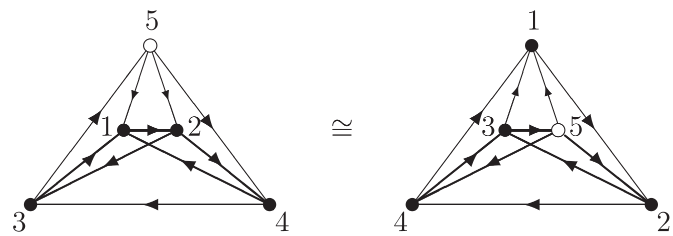


Рис. 14. Два изоморфных турнира для множества $M_{12}^{(3)}$

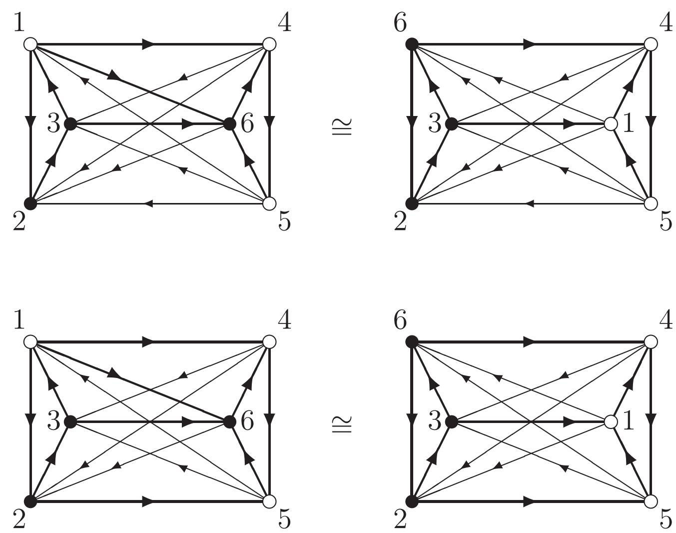


Рис. 15. Две пары изоморфных турниров для множества $M_{12}^{(4)}$

Каждый турнир из $M_{12}^{(4)}$ состоит из двух вершинно непересекающихся ориентированных треугольников. Можно доказать (детали этого доказательства мы опускаем), что существует 6 способов ориентации дуг между вершинами из разных треугольников, при которых получаются турниры, не содержащие в качестве порожденного подграфа никакой турнир

из $M_{12}^{(3)}$. Но только 4 из этих шести турниров попарно не изоморфны. Две пары изоморфных турниров, для каждой из которых в множестве $M_{12}^{(4)}$ имеется по одному представителю, изображены на рис. 15.

Нумерации вершин в каждой паре изоморфных турниров на рисунках 14 и 15 соответствуют биекциям, сохраняющим ориентации дуг.

Из доказательства теоремы 12 и проведенного выше анализа вытекает

Следствие 1. $\mathrm{Forb}(\mathcal{E}lr\mathcal{T}) = \{K_2^{\mathrm{dbl}}\} \cup M_{12}^{(1)} \cup M_{12}^{(2)} \cup M_{12}^{(3)} \cup M_{12}^{(4)}$.

§ 6. Характеризация двух классов транзитивно-двудольных орграфов. Полиномиальная разрешимость задачи распознавания в тринадцати классах

В этом параграфе рассмотрим задачи характеризации двух *классов транзитивно-двудольных орграфов*, т. е. двудольных орграфов, в которых вершины каждой доли порождают транзитивные турниры. Также проведем исследование сложности задачи распознавания орграфов из тринадцати классов. Характеризацию класса $\mathcal{T}ad\mathcal{T}$ представляет

Теорема 13. $\mathcal{T}ad\mathcal{T} = \mathrm{Free}(M_{13})$, *где*

$$M_{13} = \Big\{O_3, K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1, O_1 \to O_2, O_2 \to O_1, P_3^{\mathrm{dir}}, P_3^{\mathrm{dbl}}, T_3^{\mathrm{dir}}, O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}, K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1, \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}, K_3^{\mathrm{dbl}}\Big\},$$

а множество M_{13} состоит из графов, изображенных на рис. 16.

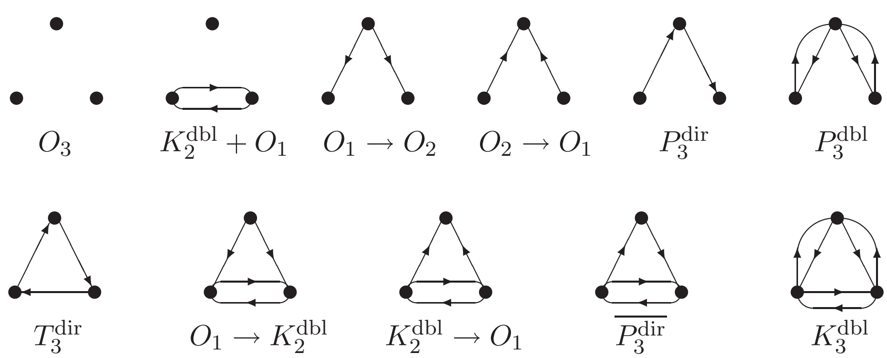


Рис. 16. Минимальные запрещенные подграфы для класса $\mathcal{T}ad\mathcal{T}$

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — произвольный орграф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных орграфам из M_{13}. Пусть V_1 — подмножество в $V(G)$, порождающее наибольший по числу

вершин транзитивный турнир, и $V_2 = V(G) - V_1$. Если $V_2 = \varnothing$, то утверждение очевидно. Пусть $V_2 \neq \varnothing$ и v — произвольная вершина из V_2. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{T_3^{\mathrm{dir}}\})$, то по выбору множества V_1 для вершины v существует такая вершина $u \in V_1$, что $(u,v) \in E(G)$ и $(v,u) \in E(G)$ или $(u,v) \notin E(G)$ и $(v,u) \notin E(G)$. В противном случае вершину v можно было бы присоединить к множеству V_1, что противоречит определению V_1.

Возможны 2 случая: $|V_1| \geqslant 2$ или $|V_1| = 1$.

Случай 1. $|V_1| \geqslant 2$.

Сначала докажем, что для любых двух вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ либо $(x,y) \in E(G)$ и $(y,x) \in E(G)$, либо $(x,y) \notin E(G)$ и $(y,x) \notin E(G)$. Предположим, что для вершины $v \in V_2$ найдется такая вершина $w \in V_1$, $w \neq u$, что $(v,w) \in E(G)$ и $(w,v) \notin E(G)$ или $(v,w) \notin E(G)$ и $(w,v) \in E(G)$.

Тогда если $(u,v) \notin E(G)$ и $(v,u) \notin E(G)$, то $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong O_1 \to O_2$, или $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong O_2 \to O_1$, или $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dir}}$. Противоречие.

Если же $(u,v) \in E(G)$ и $(v,u) \in E(G)$, то $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong O_1 \to K_2^{\mathrm{dbl}}$, или $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} \to O_1$, или $G\langle\{u,v,w\}\rangle \cong \overline{P_3^{\mathrm{dir}}}$, что также невозможно.

Следовательно, для любых двух вершин $x \in V_1$ и $y \in V_2$ либо $(x,y) \in E(G)$ и $(y,x) \in E(G)$, либо $(x,y) \notin E(G)$ и $(y,x) \notin E(G)$.

Осталось доказать, что подграф $G\langle V_2\rangle$ является транзитивным турниром.

Предположим, что в множестве V_2 имеются такие вершины y и z, что $y \neq z, (y,z) \notin E(G)$ и $(z,y) \notin E(G)$. Тогда для любой вершины $x \in V_1$ получаем, что $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong O_3$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dbl}}$.

Если же $(y,z) \in E(G)$ и $(z,y) \in E(G)$, то для любой вершины $x \in V_1$ имеем $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dbl}}$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_3^{\mathrm{dbl}}$. Противоречие.

Таким образом, $G\langle V_2\rangle \in \mathrm{Free}(\{O_2, K_2^{\mathrm{dbl}}, T_3^{\mathrm{dir}}\})$. Следовательно, $G\langle V_2\rangle$ является транзитивным турниром. Значит, $G \in \mathcal{T}ad\mathcal{T}$.

Случай 2. $|V_1| = 1$. Тогда $G \in \mathrm{Free}(\{T_2, O_3, K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1, P_3^{\mathrm{dbl}}, K_3^{\mathrm{dbl}}\})$.

Докажем, что $|V_2| \leqslant 1$. Предположим, что $|V_2| \geqslant 2$. Пусть $x \in V_1$, $y, z \in V_2$, $y \neq z$. Но тогда $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong O_3$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_2^{\mathrm{dbl}} + O_1$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong P_3^{\mathrm{dbl}}$, или $G\langle\{x,y,z\}\rangle \cong K_3^{\mathrm{dbl}}$. Противоречие.

Значит, $|V_2| \leqslant 1$. Следовательно, $G \in \mathcal{T}ad\mathcal{T}$. Теорема 13 доказана.

Теперь оценим сложность распознавания орграфов в каждом из ранее охарактеризованных классов. Существование полиномиальных ал-

горитмов распознавания орграфов из классов $\mathcal{E}ad\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}ad\mathcal{C}$, взаимно однозначно соответствующих классам обыкновенных двудольных и расщепляемых графов, уже было установлено в § 2. Анализируя множества запрещенных порожденных подграфов для всех остальных выше рассмотренных классов, обнаруживаем, что эти множества конечны. Следовательно, задача распознавания орграфов в каждом из этих классов разрешима за полиномиальное от числа вершин время.

В действительности сами алгоритмы распознавания можно построить на основе доказательств теорем 4–13, поэтому их описания мы не приводим. Отметим только, что верхние оценки временно́й сложности этих алгоритмов меньше временно́й сложности соответствующих алгоритмов распознавания, основанных на проверке вхождения в заданный орграф в качестве порожденного подграфа каждого орграфа из запрещенного множества.

Для двух оставшихся классов транзитивно-двудольных орграфов — $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$ — пока не удалось найти точное описание в терминах запрещенных порожденных подграфов. Так, например, для класса $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ получена частичная характеризация.

Теорема 14. $\mathcal{T}al\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Free}(M_{14})$, *где* $M_{14} = M_{14}^{(1)} \cup M_{14}^{(2)}$, *а* $M_{14}^{(1)}$ *и* $M_{14}^{(2)}$ *— множества орграфов, изображенных соответственно на рис.* 17 *и* 18.

В справедливости утверждения теоремы 14 нетрудно убедиться, проверив, что каждый орграф из множества M_{14} не принадлежит классу $\mathcal{T}al\mathcal{T}$, любой его собственный порожденный подграф принадлежит этому классу и никакие два орграфа из M_{14} не изоморфны.

Имеется гипотеза о том, что множество M_{14} состоит из всех минимальных запрещенных порожденных подграфов для класса $\mathcal{T}al\mathcal{T}$; однако эта гипотеза пока не доказана.

Рассмотрим задачу распознавания орграфов в классе $\mathcal{T}al\mathcal{T}$. Справедлива

Теорема 15. *Задача распознавания орграфов из класса* $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ *разрешима за полиномиальное от числа вершин время.*

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — n-вершинный орграф. Требуется распознать, верно ли, что $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$, и в случае положительного ответа указать допустимое разбиение множества $V(G)$ на такие два подмножества $L(G)$ и $R(G)$, порождающих транзитивные турниры, что каждая дуга, соединяющая вершины из разных долей, ориентирована от $L(G)$ к $R(G)$.

Очевидно, что $K_2^{\mathrm{dbl}} \notin \mathcal{T}al\mathcal{T}$. Также ясно, что если $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$, то в G есть не менее одного и не более двух источников. Поэтому не уменьшая общности, можно считать, что в G нет двусторонних дуг и имеется s источников, где $s \in \{1, 2\}$. В противном случае $G \notin \mathcal{T}al\mathcal{T}$. Отметим, что верхняя оценка сложности проверки наличия в G подграфа K_2^{dbl} и нахождения в G всех источников не превосходит $O(n^2)$.

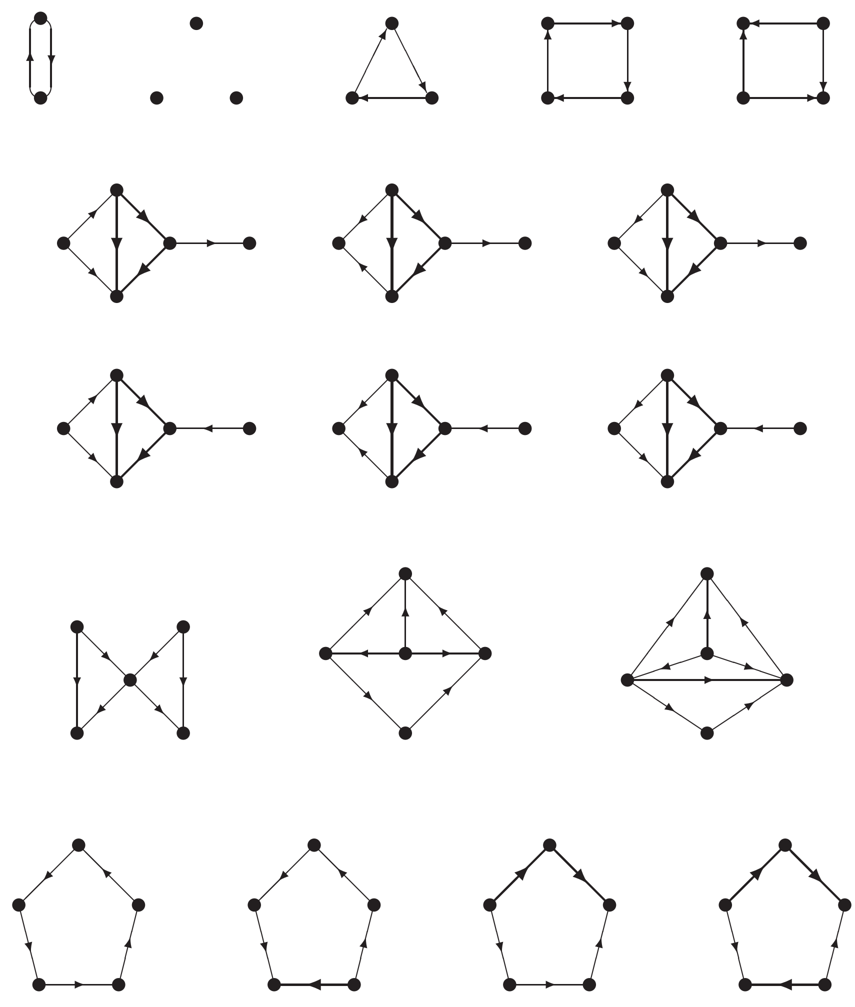


Рис. 17. Множество $M_{14}^{(1)}$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. В G есть 2 источника. Обозначим их через a и b.

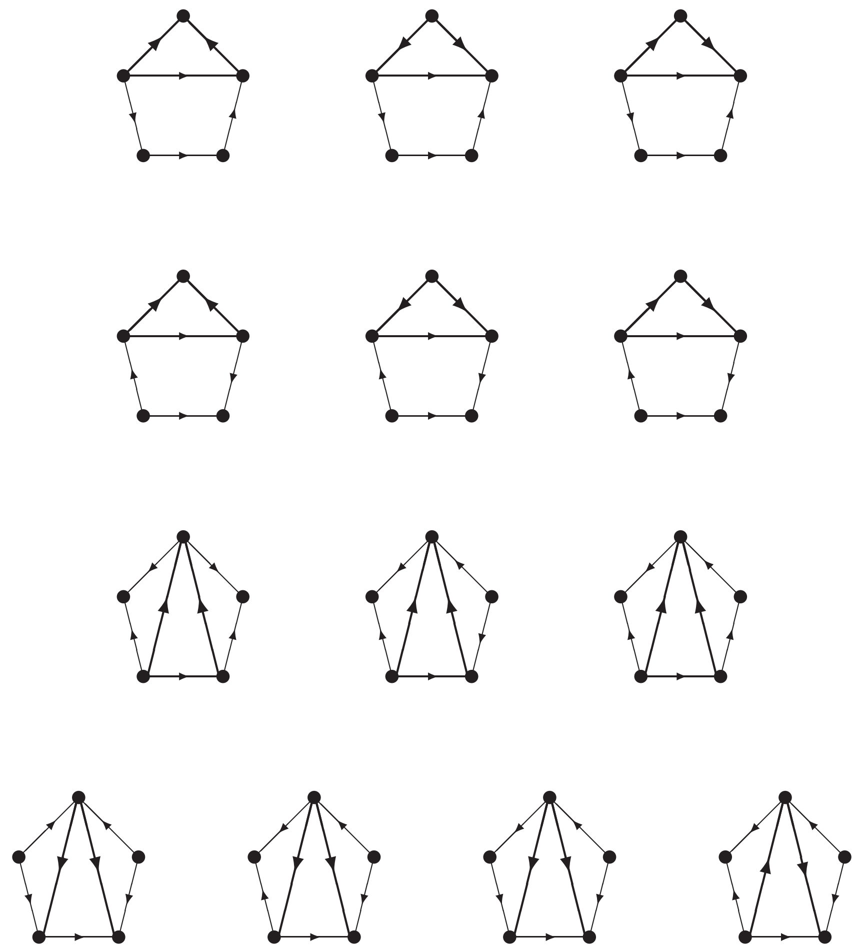


Рис. 18. Множество $M_{14}^{(2)}$

Ясно, что если $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$, то a и b принадлежат разным долям разбиения, причем доля $R(G)$ состоит в точности из одного источника и всех вершин, в которые направлены дуги из этого источника. Пусть A — множество вершин из $V(G)$, состоящее из a и всех вершин, в которые ведут дуги из a. Аналогично определим множество вершин B. Отметим, что множества A и B могут иметь непустое пересечение. Рассмотрим два гипотетических разбиения на доли: в первом $R(G) = A$ и $L(G) = V(G) - A$, а во втором $R(G) = B$ и $L(G) = V(G) - B$. Тогда если хотя бы одно из этих разбиений является допустимым для рассматриваемого класса, то $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$. В противном случае $G \notin \mathcal{T}al\mathcal{T}$. Легко видеть, что верхняя

оценка сложности построения множеств A и B и проверки допустимости указанных двух разбиений не превосходит $O(n^3)$.

Случай 2. В G имеется единственный источник a_1.

Очевидно, что если $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$ и G не является транзитивным турниром, то источник a_1 находится в части $L(G)$ допустимого разбиения.

Удалим вершину a_1 из G. Если в оставшемся графе имеется единственный источник a_2, то удалим и его. Продолжим эту процедуру до момента, когда либо исчезнут все вершины из G, либо на некотором шаге получится орграф, в котором число источников отлично от 1. Рассмотрим отдельно каждую из этих возможностей.

2.1. После удаления нескольких вершин из G остался орграф с s источниками, где $s \neq 1$. Тогда если $s = 0$ или $s \geqslant 3$, то, как было отмечено выше, $G \notin \mathcal{T}al\mathcal{T}$. Если $s = 2$, то строим, как и в случае 1, два гипотетических разбиения оставшегося орграфа на доли L и R. Для каждого такого разбиения в том случае, если оно допустимо для рассматриваемого класса, добавим к части L все ранее удаленные вершины. В результате получится не более двух разбиений исходного множества $V(G)$. Проверим, является ли хотя бы одно из них допустимым. Если да, то $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$, в противном случае $G \notin \mathcal{T}al\mathcal{T}$. Нетрудно видеть, что верхняя оценка сложности всех построений и проверок не превосходит $O(n^3)$.

2.2. Все вершины орграфа G оказались удаленными. Это означает, что на каждом шаге после удаления из текущего графа его единственного источника получается граф также с единственным источником. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все вершины орграфа G, перечисленные в порядке их удаления. Тогда при каждом $i = 1, \ldots, n-1$ в орграфе G есть дуга (a_i, a_{i+1}). Отсюда следует, что G принадлежит классу $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ в том и только том случае, когда существует такое $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, что $L(G) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, а $R(G) = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ (при $k = 0$ доля $L(G)$ пустая, а при $k = n$ доля $R(G)$ пустая). Значит, в этом случае для ответа на вопрос, верно ли, что $G \in \mathcal{T}al\mathcal{T}$, достаточно проверить, является ли допустимым хотя бы одно из указанных $n + 1$ гипотетических разбиений множества $V(G)$ на две доли. Верхняя оценка трудоемкости всех этих проверок не превосходит $O(n^3)$. Теорема 15 доказана.

На основе теоремы 15 легко построить алгоритм распознавания орграфов из класса $\mathcal{T}al\mathcal{T}$. Верхняя оценка сложности этого алгоритма не превосходит $O(n^3)$. Кроме того, из доказательства теоремы 15 следует, что если орграф G принадлежит классу $\mathcal{T}al\mathcal{T}$, то число допустимых разбиений множества его вершин на две доли не превосходит $O(n)$.

§ 7. NP-полнота задачи распознавания орграфов из класса транзитивно-двудольных турниров

Осталось рассмотреть последний класс $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$. Множество вершин любого орграфа из этого класса можно разбить на две такие доли, что подграф, порожденный вершинами одной доли, является транзитивным турниром, а между вершинами, лежащими в разных долях, имеется только одна дуга. В силу определения этот класс можно назвать классом *транзитивно-двудольных турниров*.

Отметим, что задача характеризации этого класса в терминах запрещенных порожденных подграфов оказывается значительно сложнее по сравнению с аналогичными задачами для предыдущих классов. Например, если не считать орграфы O_2 и K_2^{dbl}, то можно установить, что наименьшим по числу вершин орграфом, запрещенным в $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$, является семивершинный турнир, изображенный на рис. 19.

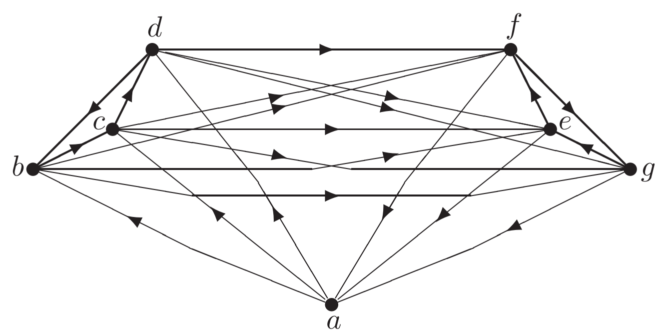


Рис. 19. Наименьший турнир, запрещенный в классе $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$

Проведем исследование задачи распознавания орграфов из класса $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$ и установим, что она является NP-полной. Для этого сначала построим несколько специальных транзитивно-двудольных турниров и докажем вспомогательные утверждения, касающиеся свойств этих турниров.

Лемма 1. *В классе $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$ существуют уникально разбиваемые турниры, т. е. такие турниры, для которых разбиение множества вершин на доли, порождающие транзитивные турниры, осуществляется однозначно.*

Доказательство. Рассмотрим турнир $D = (V(D), E(D))$, изображенный на рис. 20. Он отличается от турнира, изображенного на рис. 19, ориентацией одной дуги (f, d). Нетрудно видеть, что D является уникально разбиваемым (с точностью до переименования долей) транзитивно-двудольным турниром. Его долями разбиения являются множества

$V_1 = \{a, d, f\}$ и $V_2 = \{b, c, e, g\}$, $V_1 \cup V_2 = V(D)$. Единственность допустимого разбиения следует из того, что вершина a должна находиться в одной доле только с вершинами d и f, поскольку каждый из циклов длины 3, проходящих через a, за исключением (a, d, f), является ориентированным. Лемма 1 доказана.

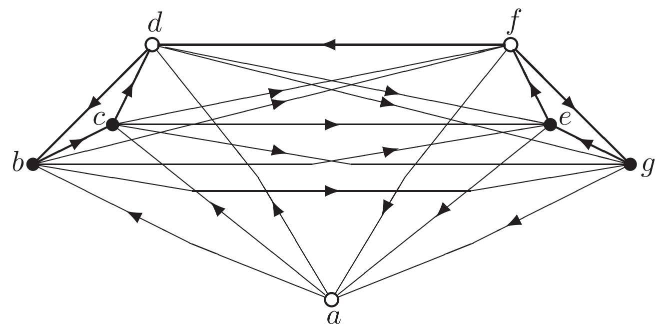


Рис. 20. Уникально разбиваемый транзитивно-двудольный турнир D

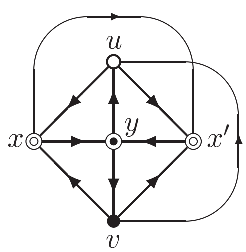


Рис. 21. Турнир D'

Далее, пусть $D' = (V(D'), E(D'))$ — транзитивно-двудольный турнир с множеством вершин $V(D') = \{x, y, x', u, v\}$, изображенный на рис. 21, и $V(D') \cap V(D) = \varnothing$. Используем турниры D и D' для построения более сложного транзитивно-двудольного турнира $R = (V(R), E(R))$, определенные вершины которого обязаны находиться в одной доле разбиения.

Пусть $V(R) = V(D) \cup V(D')$, а $E(R) \supset E(D) \cup E(D')$. Определим ориентацию каждой дуги турнира R, один конец которой принадлежит множеству $V(D)$, а другой — множеству $V(D')$.

Для множества вершин M и вершины $\alpha \notin M$ обозначим через $N^-_M(\alpha)$ множество таких вершин из M, в которых оканчиваются дуги, начинающиеся в α. Аналогично, через $N^+_M(\alpha)$ обозначим множество таких вершин из M, в которых начинаются дуги, оканчивающиеся в α. Тогда для вершины $u \in V(D')$ положим

$$N^-_{V_2}(u) = N^-_{V_2}(a) = \{b, c\}, \quad N^+_{V_2}(u) = N^+_{V_2}(a) = \{e, g\},$$
$$N^-_{V_1}(u) = V_1 = \{a, d, f\}, \qquad N^+_{V_1}(u) = \varnothing \text{ (см. рис. 22)},$$

а для вершины $v \in V(D')$ положим

$$N^-_{V_1}(v) = N^-_{V_1}(b) = \{f\}, \quad N^+_{V_1}(v) = N^+_{V_1}(b) = \{a, d\},$$
$$N^-_{V_2}(v) = V_2 = \{b, c, e, g\}, \quad N^+_{V_2}(v) = \varnothing \text{ (см. рис. 23).}$$

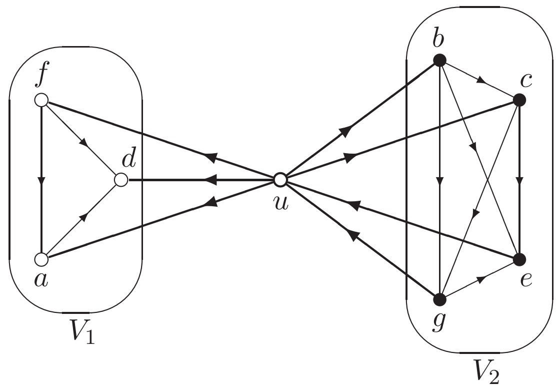


Рис. 22. Окрестность вершины u в множестве $V(D)$

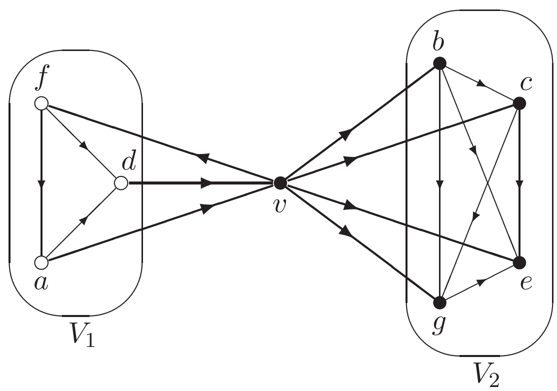


Рис. 23. Окрестность вершины v в множестве $V(D)$

Наконец, проведем дуги из вершин $x, y, x' \in V(D')$ в каждую вершину из множества $V_1 \cup V_2$; положим

$$N^-_{V_1\cup V_2}(x) = N^-_{V_1\cup V_2}(y) = N^-_{V_1\cup V_2}(x') = V_1 \cup V_2,$$
$$N^+_{V_1\cup V_2}(x) = N^+_{V_1\cup V_2}(y) = N^+_{V_1\cup V_2}(x') = \varnothing.$$

Таким образом,

$$E(R) \ = \ E(D) \bigcup E(D') \bigcup (\{u\} \times (V_1 \cup \{b, c\})) \bigcup (\{e, g\} \times \{u\}) \bigcup$$
$$(\{v\} \times (V_2 \cup \{f\})) \bigcup (\{a, d\} \times \{v\}) \bigcup (\{x, y, x'\} \times V(D)) \,.$$

Сформулируем и установим справедливость нескольких свойств построенного турнира R.

Пусть G — произвольный турнир, а φ и ψ — любые его различные вершины. Турнир G назовем (φ,ψ)-*турниром*, если G является транзитивно-двудольным и *существует* такое допустимое разбиение множества его вершин, при котором вершины φ и ψ принадлежат одной доле. Назовем (φ,ψ)-турнир *сингулярным* (φ,ψ)-*турниром*, если *при любом* его допустимом разбиении вершины φ и ψ принадлежат одной доле. Справедлива

Лемма 2. *Турнир R является сингулярным (x,x')-турниром, у которого существует в точности два допустимых разбиения на транзитивные турниры. В каждом из этих разбиений вершина u лежит в той же доле, что и вершины из V_1, вершина v — в той же доле, что и вершины из V_2, а вершины x и y находятся в разных долях.*

Доказательство. Справедливость леммы 2 непосредственно следует из уникальной разбиваемости турнира D, содержащегося в R, а также из определения дуг между вершинами из $V(D)$ и вершинами из $V(D')$. Нетрудно видеть, что допустимыми разбиениями множества $V(R)$ являются только следующие два разбиения:

$$V(R)=V_1^{(1)}(R)\cup V_2^{(1)}(R)=V_1^{(2)}(R)\cup V_2^{(2)}(R),$$

где

$$\begin{aligned}
&V_1^{(1)}(R)=V_1\cup\{u,x,x'\}, && V_2^{(1)}(R)=V_2\cup\{v,y\},\\
&V_1^{(2)}(R)=V_1\cup\{u,y\}, && V_2^{(2)}(R)=V_2\cup\{v,x,x'\}.
\end{aligned}$$

То, что в обоих разбиениях вершины u и v лежат в разных долях ($u\in V_1^{(1)}(R)$ и $v\in V_2^{(1)}(R)$ или $u\in V_1^{(2)}(R)$ и $v\in V_2^{(2)}(R)$), следует из определения окрестностей $N^-_{V_1\cup V_2}(u)$, $N^+_{V_1\cup V_2}(u)$, $N^-_{V_1\cup V_2}(v)$ и $N^+_{V_1\cup V_2}(v)$ этих вершин. Кроме того, в обоих разбиениях вершины x и y находятся в разных долях, иначе вершины одного из ориентированных циклов (x,y,u) и (x,y,v) лежали бы в одной доле, что невозможно. Аналогично, вершины y и x' принадлежат разным долям. Таким образом, в каждом из двух допустимых разбиений множества $V(R)$ вершины x и x' находятся в доле, которой не принадлежит вершина y. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого (z,z')-турнира H существует сингулярный (z,z')-турнир H_R, содержащий H в качестве подграфа.*

Доказательство. Пусть $H=(V(H),E(H))$ — произвольный турнир, а z и z' — различные вершины из $V(H)$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $(z,z')\in E(H)$. Вершину $z\in V(H)$ отождествим с

вершиной $x \in V(R)$, а вершину $z' \in V(H)$ — с вершиной $x' \in V(R)$. Получим орграф $H_R^* = (V(H) \cup V(R), E(H) \cup E(R))$, $z \equiv x$, $z' \equiv x'$. Отметим, что в результате указанных отождествлений не возникает противоречия между ориентациями дуг (z, z') и (x, x'), так как $(x, x') \in E(R)$ в силу построения турнира R (см. рис. 21). Таким образом, при отождествлении указанных пар вершин отождествляются также им соответствующие дуги.

Заметим, что вершины x и x' турнира R удовлетворяют условиям

$$N^-_{V(R)-\{x,x'\}}(x) = N^-_{V(R)-\{x,x'\}}(x') \text{ и } N^+_{V(R)-\{x,x'\}}(x) = N^+_{V(R)-\{x,x'\}}(x'),$$

т. е. любая вершина α из $V(R) - \{x, x'\}$ является одновременно либо началом, либо концом дуг (α, x) и (α, x'). Используя это, достроим орграф H_R^* до турнира $H_R = (V(H_R), E(H_R))$ с тем же множеством вершин $V(H_R) = V(H) \cup V(R)$.

Для каждой пары вершин (α, β) из $(V(R) - \{x, x'\}) \times (V(H) - \{z, z'\})$ определим направление дуги между α и β в турнире H_R следующим образом (см. рис. 24): положим

$$\begin{array}{lll} (\alpha,\beta) \in E(H_R), & \text{если} & \alpha \neq y \text{ и } (\alpha,x) \in E(R), (\alpha,x') \in E(R), \\ (\beta,\alpha) \in E(H_R), & \text{если} & \alpha \neq y \text{ и } (x,\alpha) \in E(R), (x',\alpha) \in E(R), \\ (\alpha,\beta) \in E(H_R), & \text{если} & \alpha = y. \end{array}$$

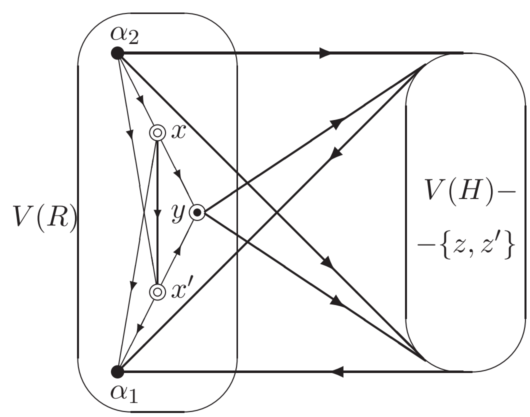


Рис. 24. Направления дуг между множествами вершин $V(R) - \{x, x'\}$ и $V(H) - \{z, z'\}$ в турнире H_R

Очевидно, что указанное построение можно выполнить вне зависимости от того, является ли турнир H транзитивно-двудольным или нет. Допустим, что $H \in \mathcal{T}lr\mathcal{T}$, причем H является (z, z')-турниром. Пусть

$V_1(H)$ и $V_2(H)$ — доли такого его допустимого разбиения, что вершины z и z' принадлежат одной доле. Не уменьшая общности, положим, что z и z' принадлежат множеству $V_1(H)$. Докажем, что построенный *турнир H_R является сингулярным (z, z')-турниром.* Возьмем в множестве $V(H_R)$ четыре подмножества

$$V_1^{(1)}(H_R) = V_1(H) \cup V_1^{(1)}(R), \quad V_2^{(1)}(H_R) = V_2(H) \cup V_2^{(1)}(R),$$
$$V_1^{(2)}(H_R) = V_1(H) \cup V_2^{(2)}(R), \quad V_2^{(2)}(H_R) = V_2(H) \cup V_1^{(2)}(R)$$

и убедимся, что каждое из них порождает транзитивный турнир.

Сначала рассмотрим множество $V_1^{(1)}(H_R)$. Заметим, что $y \notin V_1^{(1)}(H_R)$. По условию каждое из множеств $V_1(H)$ и $V_1^{(1)}(R)$ порождает транзитивный турнир. Покажем, что любая тройка вершин, целиком не содержащаяся ни в $V_1(H)$, ни в $V_1^{(1)}(R)$, является транзитивной.

Допустим, что в такой тройке присутствует в точности одна из вершин $z \equiv x$ и $z' \equiv x'$. Тогда вторая вершина α лежит в множестве $V_1^{(1)}(R) - \{x, x'\}$, а третья вершина β принадлежит множеству $V_1(H) - \{z, z'\}$. По построению турнира H_R вершина α является либо общим началом, либо общим концом дуг (α, x), (α, x') и (α, β). Поэтому каждая из троек $(z \equiv x, \alpha, \beta)$ и $(z' \equiv x', \alpha, \beta)$ является транзитивной.

Возьмем любую тройку, не содержащую вершины $z \equiv x$ и $z' \equiv x'$. Пусть в этой тройке вершина α принадлежит множеству $V_1^{(1)}(R) - \{x, x'\}$, а вершины β_1 и β_2 лежат в $V_1(H) - \{z, z'\}$. По построению дуги (α, β_1) и (α, β_2) имеют одинаковую ориентацию, совпадающую с ориентацией дуг (α, x) и (α, x'). Следовательно, $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ — транзитивная тройка.

Осталось рассмотреть случай, когда вершины α_1 и α_2 лежат в множестве $V_1^{(1)}(R) - \{x, x'\}$, а вершина β — в множестве $V_1(H) - \{z, z'\}$. Предположим, что вершины α_1, α_2, β образуют ориентированную тройку: не уменьшая общности, допустим, что $(\alpha_1, \alpha_2) \in E(H_R)$, $(\alpha_2, \beta) \in E(H_R)$ и $(\beta, \alpha_1) \in E(H_R)$. Но тогда по построению турнира H_R из двух последних включений следуют включения $(\alpha_2, x) \in E(R)$, $(\alpha_2, x') \in E(R)$ и $(x, \alpha_1) \in E(R)$, $(x', \alpha_1) \in E(R)$. Добавляя к ним включение $(\alpha_1, \alpha_2) \in E(R)$, получаем, что в турнире R каждая из троек (α_1, α_2, x) и (α_1, α_2, x') является ориентированной. Однако это невозможно, так как все указанные вершины принадлежат множеству $V_1^{(1)}(R)$. Следовательно, тройка $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ является транзитивной.

Таким образом, в турнире H_R множество $V_1^{(1)}(H_R)$ порождает транзитивный турнир. Аналогично доказывается транзитивность турнира, порожденного множеством $V_1^{(2)}(H_R)$.

Рассмотрим множество $V_2^{(1)}(H_R)$. По условию каждое из множеств $V_2(H)$ и $V_2^{(1)}(R)$ порождает транзитивный турнир. Покажем, что любая тройка вершин, целиком не содержащаяся ни в $V_2(H)$, ни в $V_2^{(1)}(R)$, является транзитивной.

Так как $y \in V_2^{(1)}(R)$, а $x, x' \notin V_2^{(1)}(H_R)$, то ни в одной из указанных троек нет вершин $z \equiv x$ и $z' \equiv x'$. Пусть в этой тройке вершина α принадлежит множеству $V_2^{(1)}(R)$, а вершины β_1 и β_2 находятся в $V_2(H)$. По построению если $\alpha \neq y$, то дуги (α, β_1) и (α, β_2) имеют одинаковую ориентацию, совпадающую с ориентацией дуг (α, x) и (α, x'). Если же $\alpha = y$, то $(y, \beta_1) \in E(H_R)$ и $(y, \beta_2) \in E(H_R)$. В любом случае $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ — транзитивная тройка.

Пусть вершины α_1 и α_2 лежат в множестве $V_2^{(1)}(R)$, а вершина β — в множестве $V_2(H)$. Дальнейшие рассуждения зависят от того, есть ли среди вершин α_1 и α_2 вершина y.

Допустим, что одна из вершин α_1 или α_2 совпадает с y. По построению турнира R вершина y является источником в турнире, порожденном множеством $V_2^{(1)}(R)$, а по построению турнира H_R имеем $(y, \beta) \in E(H_R)$. Следовательно, $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ является транзитивной тройкой с источником y.

Наконец, пусть $\alpha_1 \neq y$ и $\alpha_2 \neq y$. Тогда

$$\{\alpha_1, \alpha_2, x, x'\} \subset \left(V_2^{(1)}(R) - \{y\}\right) \cup \{x, x'\} = V_2 \cup \{v, x, x'\} = V_2^{(2)}(R),$$

т. е. вершины $\alpha_1, \alpha_2, x, x'$ принадлежат транзитивному турниру, порожденному множеством $V_2^{(2)}(R)$. Предположим, что вершины α_1, α_2, β образуют ориентированную тройку. Тогда, рассуждая так же, как при обосновании аналогичного случая для множества $V_1^{(1)}(H_R)$, заключаем, что в турнире R каждая из троек (α_1, α_2, x) и (α_1, α_2, x') является ориентированной. Противоречие. Следовательно, тройка $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ является транзитивной.

Таким образом, в турнире H_R множество $V_2^{(1)}(H_R)$ порождает транзитивный турнир. Аналогично доказывается транзитивность турнира, порожденного множеством $V_2^{(2)}(H_R)$.

На основе доказанных утверждений заключаем, что орграф H_R является таким транзитивно-двудольным турниром, в котором имеются по крайней мере два допустимых разбиения, а именно

$$V(H_R) = V_1^{(1)}(H_R) \cup V_2^{(1)}(H_R) = V_1^{(2)}(H_R) \cup V_2^{(2)}(H_R).$$

В первом разбиении вершины z и z' принадлежат одной доле $V_1^{(1)}(H_R)$, а во втором z и z' находятся в одном множестве $V_1^{(2)}(H_R)$. Этот факт непосредственно следует из леммы 2.

Проведенные рассуждения не зависят от выбора допустимого разбиения множества $V(H_R)$ (если выбор неоднозначен). Следовательно, H_R является *сингулярным* (z, z')-*турниром*. Лемма 3 доказана.

Таким образом, используя турнир R, можно полагать, что вершины z и z' любого (z, z')-турнира H (не являющегося уникально разбиваемым) *принадлежат одной доле любого допустимого разбиения* некоторого транзитивно-двудольного турнира H_R, содержащего H и R в качестве подграфов.

Обобщим утверждение леммы 3 на случай присоединения *нескольких копий* турнира R к турниру H.

Пусть G — произвольный турнир, а $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ — возможно пересекающиеся упорядоченные множества в множестве его вершин, в каждом из которых вершины могут повторяться, причем $\varphi_1 \neq \psi_1, \ldots, \varphi_n \neq \psi_n$. Турнир G назовем (Φ, Ψ)-*турниром*, если G является транзитивно-двудольным и *существует* такое допустимое разбиение множества его вершин, в котором при каждом $i = 1, \ldots, n$ вершина φ_i лежит в одной доле с вершиной ψ_i. Назовем (Φ, Ψ)-турнир *сингулярным* (Φ, Ψ)-*турниром*, если *в любом* его допустимом разбиении при каждом $i = 1, \ldots, n$ вершина φ_i лежит в одной доле с вершиной ψ_i. Справедлива

Лемма 4. *Пусть* $H = (V(H), E(H))$ *— произвольный турнир, а* $Z_n = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq V(H)$ *и* $Z'_n = \{z'_1, \ldots, z'_n\} \subseteq V(H)$ *— упорядоченные множества вершин из* $V(H)$*, причем* $(z_1, z'_1), \ldots, (z_n, z'_n)$ *— попарно различные дуги из* $E(H)$ *(начальные, либо концевые вершины разных дуг могут совпадать). Тогда если* H *является* (Z_n, Z'_n)*-турниром, то существует сингулярный* (Z_n, Z'_n)*-турнир* $H_{R_1,\ldots,R_n}$*, содержащий* H *в качестве подграфа.*

Доказательство. При каждом $i = 1, \ldots, n$ возьмем копию $R_i = (V(R_i), E(R_i))$ турнира R, где $V(R_i) = V(D_i) \cup \{x_i, y_i, x'_i, u_i, v_i\}$, вершину $z_i \in Z_n$ отождествим с вершиной $x_i \in V(R_i)$, а вершину $z'_i \in Z'_n$ — с вершиной $x'_i \in V(R_i)$. Отметим, что указанные отождествления не приводят к противоречию между ориентациями дуг (z_i, z'_i) и (x_i, x'_i): в турнирах H и R_i эти дуги имеют одинаковое направление. Таким образом, при отождествлении указанных пар вершин отождествляются также им соответствующие дуги.

Проведем доказательство леммы 4 индукцией по n. При $n = 1$ справедливость утверждения непосредственно вытекает из леммы 3.

Предположим, что для $k-1$ копий турнира R лемма уже доказана. Докажем справедливость утверждения в случае присоединения к турниру H k копий турнира R. По предположению индукции турнир H можно так достроить до турнира $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$ с множеством вершин $V(H) \cup V(R_1) \cup \cdots \cup V(R_{k-1})$ и отождествленными вершинами $z_1 \equiv x_1, z'_1 \equiv x'_1, \ldots, z_{k-1} \equiv x_{k-1}, z'_{k-1} \equiv x'_{k-1}$, что если H являлся (Z_{k-1}, Z'_{k-1})-турниром, то $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$ будет сингулярным (Z_{k-1}, Z'_{k-1})-турниром.

В лемме 3 в качестве H возьмем турнир $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$, положим $z = z_k$, $z' = z'_k$, а турнир R заменим на изоморфный ему турнир R_k. Тогда если $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$ является (z_k, z'_k)-турниром, то в соответствии с леммой 3 существует сингулярный (z_k, z'_k)-турнир $(H_{R_1,\ldots,R_{k-1}})_{R_k}$ с множеством вершин $V(H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}) \cup V(R_k)$, содержащий в качестве подграфа турнир $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$, а следовательно, и турнир H. Легко видеть, что турнир $(H_{R_1,\ldots,R_{k-1}})_{R_k}$ является искомым турниром $H_{R_1,\ldots,R_k}$, о котором говорится в формулировке данного утверждения. Лемма 4 доказана.

Теперь перейдем к доказательству NP-полноты задачи распознавания орграфов из класса $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$. Для этого рассмотрим следующую вспомогательную задачу, называемую задачей о (p, r)-раскраске гиперграфа. Дан r-однородный гиперграф $F = (V(F), E(F))$, т. е. гиперграф, в котором каждое гиперребро $e \in E(F)$ является одним из r-элементных подмножеств множества $V(F)$. Требуется ответить на вопрос, существует ли такое множество $U \subseteq V(F)$, что в любом гиперребре $e \in E(F)$ имеется в точности p вершин, принадлежащих множеству U, т. е. $|U \cap e| = p$.

В [4] доказано, что задача о (p, r)-раскраске гиперграфа является NP-полной при всех $r \geqslant 3$ и p, $1 \leqslant p < r$. Используем этот результат при $p = 2$, $r = 4$.

Теорема 16. *Задача о* $(2, 4)$*-раскраске гиперграфа полиномиально сводится к задаче распознавания орграфов из класса* $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$.

Доказательство. Отметим, что доказательство теоремы 16 представляет собой модификацию на случай орграфов доказательства основного результата из [5] о NP-полноте задачи распознавания неориентированных графов из аддитивных порожденно-наследственных классов.

Пусть $F = (V(F), E(F))$ — заданный 4-однородный гиперграф с n вершинами и m гиперребрами, $m \leqslant \binom{n}{4} \leqslant n^4$. По этому гиперграфу за время, полиномиальное от n и m, построим такой турнир B, что B является транзитивно-двудольным турниром тогда и только тогда, когда множество вершин $V(F)$ гиперграфа F можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом четырехвершинном гиперребре были точно две вершины, окрашенные в один цвет.

Пусть $V^{(3)}$ — множество всех неупорядоченных троек $T = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$ различных вершин из $V(F)$, а $V^{(3)}(F)$ — множество всех таких троек из $V^{(3)}$, каждая из которых является подмножеством некоторого гиперребра из $E(F)$:

$$V^{(3)}(F) = \{T \in V^{(3)} \mid \text{существует такое } e \in E(F), \text{что } T \subset e\}.$$

Очевидно, что $|V^{(3)}| = \binom{n}{3} \leqslant n^3$, а $|V^{(3)}(F)| = s \leqslant 4m \leqslant n^4$.

Обозначим через V_F множество вершин, взаимно однозначно соответствующее множеству $V(F)$ вершин гиперграфа F, а через $V_F^{(3)}$ множество вершин, являющееся объединением s вершинно непересекающихся троек вершин, каждая из которых взаимно однозначно соответствует определенной тройке из $V^{(3)}(F)$. Считаем, что множества V_F и $V^{(3)}(F)$ не пересекаются: $V_F \cap V^{(3)}(F) = \varnothing$. Ясно, что $|V_F| = n$, а

$$|V^{(3)}(F)| = 3s \leqslant 12m \leqslant n^4.$$

Легко видеть, что каждой тройке вершин из $V_F^{(3)}$, взаимно однозначно соответствующей тройке вершин из $V^{(3)}(F)$, будут однозначно соответствовать определенные три вершины из множества $V(F)$, а следовательно, и из множества V_F. Однако это соответствие не будет взаимно однозначным, если $V^{(3)}(F) \neq V^{(3)}$, т. е. если некоторая тройка вершин гиперграфа F не содержится ни в каком из его гиперребер.

Приступим непосредственно к построению турнира $B = (V(B), E(B))$ по заданному 4-однородному гиперграфу F.

Шаг 1. На множестве вершин V_F построим транзитивный турнир (для определенности пусть началом каждой дуги этого турнира является вершина с меньшим номером, а концом — вершина с бóльшим номером).

Шаг 2. На каждой из s вершинно непересекающихся троек $T' = \langle z_1', z_2', z_3'\rangle$, из объединения которых состоит множество $V_F^{(3)}$, построим ориентированный цикл (например, проводя дуги (z_1', z_2'), (z_2', z_3') и (z_3', z_1')).

Шаг 3. На множестве ориентированных троек из $V_F^{(3)}$ определим линейный порядок π (произвольным образом) и обозначим через $\pi(T')$ порядковый номер тройки $T' \subseteq V_F^{(3)}$ в соответствии с π. При всех i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant s$, если $\pi(T_i') < \pi(T_j')$, то из каждой вершины, принадлежащей тройке T_i' проведем дугу в каждую вершину тройки T_j'; в противном случае ориентируем все эти дуги в противоположном направлении.

Шаг 4. Для каждой пары вершин $(\xi, \eta) \in V_F \times V_F^{(3)}$ проведем дугу, начинающуюся в вершине ξ и оканчивающуюся в η.

Таким образом, на множестве вершин $V(H) = V_F \cup V_F^{(3)}$ построен некоторый специальный турнир. Обозначим его через H. Нетрудно видеть, что H является транзитивно-двудольным турниром.

Пусть $R_1 = (V(R_1), E(R_1)), \ldots, R_{3s} = (V(R_{3s}), E(R_{3s}))$ — это $3s$ таких копий выше определенного турнира R, что при любых $i, j = 1, \ldots, 3s$, $i \neq j$, для всех транзитивных троек $T \subseteq V_F$ и для всех ориентированных троек $T' \subseteq V_F^{(3)}$ выполняются следующие условия:

$|V(R_i) \cap V(R_j)| \leqslant 1$, причем общей вершиной множеств $V(R_i)$ и $V(R_j)$ может быть только одна из вершин $x_i \equiv x_j$ или $x'_i \equiv x'_j$;

$|V(R_i) \cap T| \leqslant 1$, причем общей вершиной множества $V(R_i)$ и тройки T может быть только вершина x_i, отождествленная с какой-нибудь вершиной из T;

$|V(R_i) \cap T'| \leqslant 1$, причем общей вершиной множества $V(R_i)$ и тройки T' может быть только вершина x'_i, отождествленная с какой-нибудь вершиной из T'.

Определим множество вершин $V_R = \bigcup\limits_{i=1}^{3s} V(R_i)$. Очевидно, что $|V_R| \leqslant 12 \cdot 3s \leqslant 144m$.

Достроим транзитивно-двудольный турнир H до турнира B с множеством вершин $V(B) = V_F \cup V_F^{(3)} \cup V_R$ следующим образом. Для каждого $j = 1, \ldots, s$ возьмем ориентированную тройку $T'_j = \langle z'_{1j}, z'_{2j}, z'_{3j} \rangle$ из $V_F^{(3)}$, в множестве V_F найдем соответствующую ей транзитивную тройку $T_j = \langle z_{1j}, z_{2j}, z_{3j} \rangle$ и при каждом $i = 1, 2, 3$ отождествим вершину $z_{ij} \in T_j$ с вершиной $x_{i+3j-3} \in V(R_{i+3j-3})$, а вершину $z'_{ij} \in T'_j$ — с вершиной $x'_{i+3j-3} \in V(R_{i+3j-3})$. Введем в рассмотрение упорядоченные множества вершин $Z_{3s} = \{z_{11}, z_{21}, z_{31}, \ldots, z_{1s}, z_{2s}, z_{3s}\}$ и $Z'_{3s} = \{z'_{11}, z'_{21}, z'_{31}, \ldots, z'_{1s}, z'_{2s}, z'_{3s}\}$. Заметим, что в силу построения все вершины из Z'_{3s} попарно различны, а вершины из Z_{3s} могут повторяться. Кроме того, $Z_{3s} \cap Z'_{3s} = \varnothing$. По лемме 4 турнир H можно достроить до турнира $H_{R_1,\ldots,R_{3s}}$ с множеством вершин $V(H) \cup V(R_1) \cup \cdots \cup V(R_{3s})$ и отождествленными вершинами $z_{ij} \equiv x_{ij}$, $z'_{ij} \equiv x'_{ij}$, $i = 1, 2, 3$; $1 \leqslant j \leqslant s$, что если H является (Z_{3s}, Z'_{3s})-турниром, то $H_{R_1,\ldots,R_{3s}}$ — сингулярный (Z_{3s}, Z'_{3s})-турнир.

В соответствии с леммой 4 из турнира H и из $3s$ копий турнира R сконструируем турнир $H_{R_1,\ldots,R_{3s}}$. Следует отметить, что на некотором шаге построений $k \in \{1, \ldots, 3s\}$ может оказаться, что турнир $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$, полученный на предыдущем шаге, принадлежит классу $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$ (если $k = 1$, то это исходный турнир H), а турнир $H_{R_1,\ldots,R_k}$, построенный в соответствии с леммой 3 из турниров $H_{R_1,\ldots,R_{k-1}}$ и R_k, не принадлежит $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$. Если такая ситуация возникает, то это означает, что турнир

H является (Z_{k-1}, Z'_{k-1})-турниром, но не является (Z_k, Z'_k)-турниром, а следовательно, при каждом $i = k, k+1, \ldots, 3s$ турнир $H_{R_1,\ldots,R_i}$ не является транзитивно-двудольным. В противном случае H является (Z_{3s}, Z'_{3s})-турниром, т. е. при каждом $i = 1, \ldots, 3s$ турнир $H_{R_1,\ldots,R_i}$ является сингулярным (Z_i, Z'_i)-турниром.

Турнир $H_{R_1,\ldots,R_{3s}}$, построенный на последнем шаге, есть искомый турнир B. Ясно, что

$$|V(B)| \leqslant |V_F| + |V_F^{(3)}| + |V_R| \leqslant n + 3s + 36s \leqslant n + 156m = O(n+m) \leqslant O(n^4),$$

а $|E(B)| = O((n+m)^2) \leqslant O(n^8)$. Таким образом, указанное построение турнира B по заданному 4-однородному гиперграфу F непротиворечиво и выполняется за время, полиномиальное от числа его вершин и гиперребер.

Убедимся в том, что B является транзитивно-двудольным турниром тогда и только тогда, когда множество вершин $V(F)$ 4-однородного гиперграфа F можно раскрасить в два цвета так, что в каждой четверке вершин, являющейся гиперребром, есть в точности две вершины, окрашенные в один цвет.

Действительно, пусть существует такое множество $U \subseteq V(F)$, что $|U \cap e| = 2$ для любого гиперребра $e \in E(F)$. Множество $V(B)$ разобьем на два непересекающихся подмножества $V_1(B)$ и $V_2(B)$ следующим образом. Для каждой вершины $\xi \in V_F$ положим, что $\xi \in V_1(B)$, если вершина из $V(F)$, соответствующая ξ, принадлежит U, и $\xi \in V_2(B)$ в противном случае. Для каждой вершины $\xi' \in V_F^{(3)}$, принадлежащей некоторой ориентированной тройке, найдем соответствующую ей вершину $\xi \in V_F$ и поместим ξ' в то же множество, что и ξ:

$$\xi' \in \begin{cases} V_1(B), & \text{если} \quad \xi \in V_1(B), \\ V_2(B), & \text{если} \quad \xi \in V_2(B). \end{cases}$$

Наконец, при каждом $i = 1, \ldots, 3s$ вершины a_i, d_i, f_i, u_i, принадлежащие i-й копии турнира R, поместим в множество, в котором находятся вершины x_i и x'_i этой копии:

$$a_i, d_i, f_i, u_i \in \begin{cases} V_1(B), & \text{если} \quad x_i \in V_1(B) \text{ и } x'_i \in V_1(B), \\ V_2(B), & \text{если} \quad x_i \in V_2(B) \text{ и } x'_i \in V_2(B), \end{cases}$$

а вершины $b_i, c_i, e_i, g_i, v_i, y_i \in V(R_i)$ поместим в другое множество:

$$b_i, c_i, e_i, g_i, v_i, y_i \in \begin{cases} V_2(B), & \text{если} \quad x_i \in V_1(B) \text{ и } x'_i \in V_1(B), \\ V_1(B), & \text{если} \quad x_i \in V_2(B) \text{ и } x'_i \in V_2(B). \end{cases}$$

Из условия $|U \cap e| = 2$ следует, что в каждой ориентированной тройке $T' \in V_F^{(3)}$ имеется не более двух вершин, принадлежащих множеству $V_1(B)$, и не более двух вершин, принадлежащих множеству $V_2(B)$. Значит, множества $V_1(B) \cap V(H)$ и $V_2(B) \cap V(H)$ являются допустимыми долями разбиения транзитивно-двудольного турнира H, содержащегося в турнире B в качестве подграфа. Тогда по лемме 4 и по определению множеств $V_1(B)$ и $V_2(B)$ турнир B является транзитивно-двудольным турниром с допустимым разбиением $V(B) = V_1(B) \cup V_2(B)$.

Обратно, пусть B является транзитивно-двудольным турниром с долями разбиения $V_1(B)$ и $V_2(B)$. В каждой ориентированной тройке $T' \subseteq V_F^{(3)}$ обязательно есть вершины, принадлежащие разным долям разбиения. Любой вершине ориентированной тройки T' однозначно соответствует определенная вершина из V_F, находящаяся с ней в одной и той же доле разбиения. Тогда в силу построения турнира B в каждой четверке вершин из V_F, которой соответствует гиперребро гиперграфа F, никакие три вершины не находятся в $V_1(B)$ и никакие три вершины не лежат в $V_2(B)$. В противном случае в множестве $V_F^{(3)}$ найдется ориентированная тройка, вершины которой принадлежат одной и той же доле разбиения множества $V(B)$, что невозможно. Следовательно, в каждой четверке вершин из V_F, соответствующей гиперребру из F, в точности две вершины принадлежат $V_1(B)$ и в точности две принадлежат $V_2(B)$. Определим множество $U \subseteq V(F)$ как совокупность тех и только тех вершин из $V(F)$, которым соответствуют вершины из V_F, принадлежащие множеству $V_1(B)$. Тогда для любого гиперребра $e \in E(F)$ справедливо $|U \cap e| = 2$. Теорема 16 доказана.

Следствие 2. *Задача распознавания орграфов из класса транзитивно-двудольных турниров является* NP*-полной.*

Следствие 3. *Если* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, *то класс транзитивно-двудольных турниров характеризуется бесконечным множеством запрещенных порожденных подграфов.*

NP-полнота задачи распознавания в одном из минимальных по включению наследственных классов орграфов с наименьшим положительным значением энтропии указывает на существенное отличие от ситуации для наследственных классов обыкновенных графов. Известно, что задача распознавания графов в каждом из трех минимальных по включению классов обыкновенных графов с наименьшей положительной энтропией (см. введение) разрешима за полиномиальное время.

Таким образом, в статье получены следующие результаты:

1) для всех, кроме двух, минимальных по включению наследственных классов орграфов, имеющих наименьшую положительную энтропию, найдена полная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов; на основе этой характеризации установлено, что задача распознавания орграфов для каждого из этих классов полиномиально разрешима;

2) для класса $\mathcal{T}al\mathcal{T}$ найдена частичная характеризация и доказано, что задача распознавания орграфов из этого класса полиномиально разрешима;

3) установлена NP-полнота задачи распознавания орграфов из класса $\mathcal{T}lr\mathcal{T}$; этот факт свидетельствует о существенном отличии между поведением сложности задачи распознавания для минимальных по включению наследственных классов орграфов с наименьшим положительным значением энтропии и сложности распознавания для аналогичных наследственных классов обыкновенных графов.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю проф. В. Е. Алексееву за внимание к работе и неоценимую помощь, благодаря которой удалось существенно сократить доказательства нескольких теорем. Автор также очень благодарен рецензенту за полезные советы и ценные замечания, с помощью которых были устранены опечатки и недочеты, имевшиеся при обосновании некоторых результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Об энтропии наследственных классов ориентированных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 20–28.

2. **Алексеев В. Е.** Об энтропии фрагментно замкнутых классов графов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьковский госуниверситет, 1986. С. 5–15.

3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

4. **Schaefer T. J.** The complexity of satisfiability problems // Proc. of the 10th ann. ACM symposium on theory of computing. New York: ACM, 1978. P. 216–226.

5. **Farrugia A.** Vertex-partitioning into fixed additive induced-hereditary properties is NP-hard // Electron. J. Combin. 2004. V. 11, N 46. 9 p.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
фак. вычисл. математики
и кибернетики,
пр. Гагарина, 23, корпус 2,
603950 Нижний Новгород,
Россия.

Статья поступила
29 июня 2004 г.

Переработанный вариант —
8 января 2005 г.