ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2005. Серия 1. Том 12, № 3, 32–47

УДК 519.71

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ 2-ДИСТАНЦИОННОЙ $(\Delta+1)$-РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ 6[*)]

О. В. Бородин, А. О. Иванова, Т. К. Неустроева

Для 2-дистанционного хроматического числа графа G с максимальной степенью Δ нижняя граница равна $\Delta+1$. Известно, что если G планарен, а его обхват не меньше 7, то при достаточно большой Δ эта оценка достигается, но при обхвате 6 это не так. В статье доказано, что если граф G с обхватом 6 планарен, каждое его ребро инцидентно вершине степени 1 или 2, а $\Delta \geqslant 179$, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$.

Введение

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множество вершин и множество рёбер неориентированного графа G соответственно. Раскраска $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины в G, находящиеся на расстоянии не более 2 друг от друга, окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$. Задача 2-дистанционной раскраски возникает как в теории графов [2], так и в приложениях, например, в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования.

Очевидно, что $\chi_2(G) \geqslant \Delta + 1$ для любого графа G, где Δ — его максимальная степень. В [1], в частности, доказано, что если G — плоский граф с обхватом $g \geqslant 7$ (g — длина минимального цикла), то $\chi_2(G) = \Delta+1$ при $\Delta \geqslant 30$. Там же показано, что существуют такие графы обхвата 6 произвольно большой максимальной степени Δ, что $\chi_2(G) > \Delta + 1$. В настоящей статье дано достаточное условие того, что $\chi_2(G) = \Delta + 1$ при $g = 6$.

[*)] Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03–01–00796 и 02–01–00039).

Теорема 1. *Если планарный граф G имеет обхват 6 и максимальная степень $\Delta \geqslant 179$, а каждое ребро инцидентно вершине степени 1 или 2, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$.*

1. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G' — контрпример к теореме 1, Δ — его максимальная степень. Далее, пусть G — наименьший по числу рёбер граф со свойствами: $\Delta(G) \leqslant \Delta$, $g(G) = g \geqslant 6$ и $\chi_2(G) > \Delta + 1$. Множество графов с этими свойствами непусто, так как, например, G' всеми ими обладает. Доказательство теоремы 1 состоит в доказательстве несуществования графа G, что противоречит сделанному предположению о существовании графа G'.

Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен. Легко видеть, что в G нет вершин степени меньше 2. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде $(4|E| - 6|V|) + (2|E| - 6|F|) = -12$, где F — множество граней графа G. Следовательно,

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. *Заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G положим равным $2d(v) - 6$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани f графа G — равным $r(f) - 6$. Ясно, что заряд каждой вершины степени 2 равен -2, а заряды вершин степени не менее 3 и всех граней неотрицательны.

Опишем некоторые структурные свойства графа G, опираясь на которые перераспределим заряды вершин и граней так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин и граней при перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 1.

Заметим, что в силу минимальности графа G граф, полученный из G удалением ребра, имеет требуемую раскраску (напомним, что Δ — максимальная степень графа G', а не графа G). Легко видеть, что если мы сможем перекрасить концы этого ребра в цвета, не встречающиеся на смежных вершинах и вершинах, находящихся на расстоянии 2 от соответствующего конца, то полученная раскраска будет 2-дистанционной. Удалённое ребро на рисунке будем перечеркивать.

Далее под *k-цепью* в графе G будем понимать простую цепь, в которой содержится ровно k внутренних вершин, причем их степени равны 2, а степени концевых вершин не меньше 3. Две цепи с общим концом,

лежащие на границе некоторой грани, будем называть *соседними.* Если 6-грань образована 3-цепью и 1-цепью, то эти цепи и саму грань будем называть *особыми.* Пусть $d_q(v)$ — число особых граней при вершине v.

Назовём *пучком* множество, состоящее не менее чем из двух 2-цепей с общими концами. Обозначим через $b(v)$ число пучков при вершине v. Пучок назовём *толстым*, если он состоит не менее чем из $(\Delta - 29)/5$ цепей.

Вершину v назовём *младшей*, если $3 \leqslant d(v) \leqslant 5$. Через $d_l(v)$ обозначим число всех непучковых цепей (ножек), а через $d_j(v)$ — число 1-цепей, ведущих в младшие вершины. Наконец, пусть $d_s(v) = b(v)+d_l(v)-d_j(v)-d_q(v)$.

Назовём *жёсткими* все непучковые цепи, кроме 1-цепей, ведущих в младшие вершины. Число таких цепей равно $d_l(v) - d_j(v)$. Обозначим через $d_{ur}(v)$ число неособых жёстких ножек. Тогда, как легко видеть, $d_s(v) = b(v) + d_{ur}(v) + d_q(v)$.

Вершину v назовём *сильной*, если $d_l(v) \geqslant 30$. Пусть $M(v) = \max\{d_s(v), d_j(v)\}$. Пучковую (т. е. имеющую $b(v) \geqslant 1$) вершину v назовём *слабой*, если $M(v) < 7-0{,}5d_q(v)$, и *нейтральной*, если $d(v) \geqslant 30$, но v не является ни сильной, ни слабой, т. е. $d_l(v) \leqslant 29$ и $M(v) \geqslant 7 - 0{,}5d_q(v)$. Заметим, что если v — нейтральная вершина, то $b(v) \geqslant 1$.

Отметим, что слабая вершина v имеет не более 5 неособых жёстких 1-цепей, а также не более 12 ножек. Действительно, из определения слабой вершины следует, что $d_s(v) = b(v) + d_{ur}(v) + d_q(v) < 7 - 0{,}5d_q(v)$, а так как $b(v) \geqslant 1$, то $1{,}5d_q(v)+d_{ur}(v) < 6$. Отсюда следует, что $d_{ur}(v) < 6$. Аналогично, $d_j(v) < 7 - 0{,}5d_q(v)$ и

$$d_s(v) = b(v) + d_l(v) - d_j(v) - d_q(v) < 7 - 0{,}5d_q(v).$$

Поэтому

$$b(v)+d_l(v) < 7-\frac{d_q(v)}{2}+d_j(v)+d_q(v) < 7-\frac{d_q(v)}{2}+7-\frac{d_q(v)}{2}+d_q(v) < 14,$$

т. е. $d_l(v) < 13$.

1.1. Структурные свойства минималького контрпримера

Лемма 1. *В графе G не существует k-цепи, $k \geqslant 3$, ограниченной хотя бы с одной стороны вершиной степени меньше Δ.*

Доказательство. На рис. 1 удалённое ребро перечеркивается и первой красится вершина с меткой N_1 (имеется не более Δ ограничений на

выбор цвета), а затем красится вершина с меткой N_2 (имеется четыре ограничения). Лемма 1 доказана.

Следствие $1'$. *В* G *не существует* k*-цепи,* $k \geqslant 4$.

Лемма 2. *В* G *нет двух вершин, соединенных*

(i) *двумя* 3*-цепями,*

(ii) 3*-цепью и* 2*-цепью.*

Доказательство. (i) Удалим перечёркнутое ребро на рис. 2, *a* и обесцветим вершины v_1, v_2 и v_3. Пусть вершина z окрашена в цвет 1. Заметим, что v_1 нельзя покрасить лишь в том случае, когда на вершине u и смежных с ней вершинах встречаются все Δ цветов (т. е. для v_1 остается только цвет 1). В этом случае вершину x перекрасим в цвет 1 (это всегда возможно, так как вершина y находится на расстоянии 2 от z, и следовательно, не окрашена в цвет 1), а v_1 — в освободившийся цвет. Последними красим вершины v_2 и v_3 (для каждой из них имеется 4 ограничения на выбор цвета).

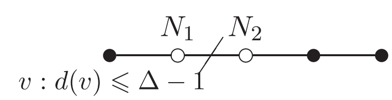

Рис. 1

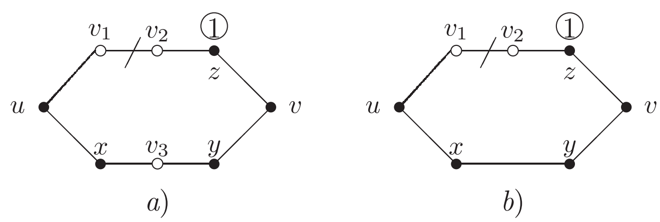

Рис. 2

(ii) Доказательство аналогично доказательству утверждения (i) с той лишь разницей, что нет вершины v_3 (см. рис. 2, *b*). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В* G *нет пучка, ограниченного с обеих сторон вершинами, степени которых меньше* Δ.

Доказательство. Удалим перечёркнутое ребро и обесцветим его концы (см. рис. 3). Пусть $d(w) \leq \Delta - 1$ и $d(v) \leqslant \Delta - 1$. Покрасим один из концов ребра, например, y (на него действует не более Δ ограничений). Заметим, что вершину x нельзя покрасить лишь в том случае, когда для

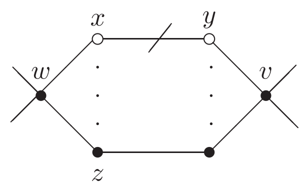

Рис. 3

x остаётся только цвет, использованный для y. В этом случае вершину x покрасим в цвет вершины z, а z перекрасим в цвет вершины y (в дальнейшем такую операцию, использованную ещё в лемме 2, будем называть *подкруткой*). Лемма 3 доказана.

Следствие $3'$. *Если v — слабая вершина, то $d(v) \geqslant \Delta - 4$.*

Доказательство. Пусть $d(v) \leqslant \Delta - 5$. Тогда $d(w) = \Delta$ (по лемме 3). Удалим перечёркнутое ребро и обесцветим вершину v, все 2-вершины пучка B, центральные вершины особых 3-цепей и все смежные с v вершины, кроме лежащих на жёстких 1-цепях (см. рис. 4). Пусть k — толщина пучка B. Покрасим v в один из цветов, встречающихся на w или на оставшихся окрашенными вершинах, смежных с w. Имеется $\Delta - k + 1$ таких цветов, а на выбор цвета для v имеется не более $d(v) - k + 5 \leqslant \Delta - k$ ограничений (поскольку есть не более пяти неособых жёстких 1-цепей, которые дают по два ограничения, тогда как остальные неособые цепи – одно ограничение, а две цепи каждой особой грани вместе дают два ограничения), т. е. v всегда можно покрасить в цвет вершины w или ее соседей. Затем красим смежные с w вершины из B (на последнюю имеется Δ ограничений, так как цвет вершины v встречается дважды); затем — смежные с v вершины (что возможно, так как $d(v) \leqslant \Delta - 5$) и, наконец, центральные вершины особых 3-цепей. Следствие $3'$ доказано.

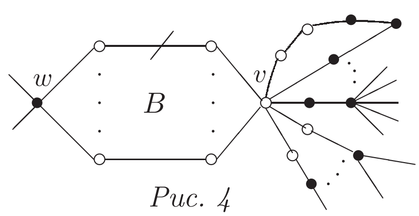

Рис. 4

Следствие $3''$. *Если пучковая вершина v не является сильной, то $d(v) \geqslant \Delta - 28$.*

Доказательство. Пусть $d(v) \leqslant \Delta - 29$. Тогда $d(w) = \Delta$ (по лемме 3). Удалим перечёркнутое ребро и обесцветим вершину v, все 2-вершины пучка B, центральные вершины особых 3-цепей и все смежные с v вершины, кроме лежащих на непучковых цепях (см. рис. 5). Пусть k —

толщина пучка B. Покрасим v в один из цветов, встречающихся на w или на оставшихся окрашенными вершинах, смежных с w. Число таких цветов равно $\Delta - k + 1$, а на выбор цвета для v имеется не более $d(v) - k + 29 \leqslant \Delta - k$ ограничений (ввиду того, что v не является сильной, имеется не более 29 непучковых цепей; они дают не более чем по два ограничения, тогда как пучковые цепи – одно ограничение), т. е. v всегда можно покрасить в цвет вершины w или ее соседей. Затем красим смежные с w вершины из B (на последнюю вершину имеется Δ ограничений, так как цвет вершины v встречается дважды); затем — смежные с v вершины (что возможно, так как $d(v) \leqslant \Delta - 29$), и наконец, центральные вершины особых 3-цепей. Следствие $3''$ доказано.

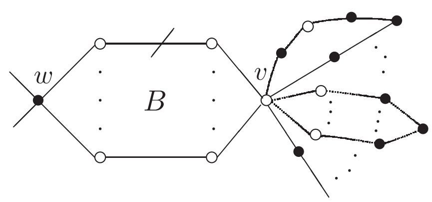

Рис. 5

Лемма 4. *В G нет пучка, толщина которого не меньше* $3\Delta/4$.

Доказательство. Пусть в G имеется пучок B толщиной не менее $3\Delta/4$. На рис. 6 удалим перечёркнутое ребро и обесцветим все вершины степени 2 пучка и его концы v_1, v_2. Тогда на выбор цвета для каждой из вершин v_1 и v_2 имеется не более $\Delta/2$ ограничений. Следовательно, найдётся цвет, в который можно покрасить v_1 и v_2, что мы и сделаем.

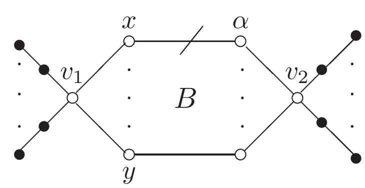

Рис. 6

Пусть все вершины пучка, кроме x, окрашены (это возможно, так как на покраску каждой вершины имеется не более Δ ограничений). Вершину x нельзя покрасить только в том случае, когда для неё остаётся только цвет α (см. рис. 6). В этом случае делаем подкрутку: перекрашиваем y в α, а освободившийся цвет используем для x. Лемма 4 доказана.

Следствие $4'$. *Слабая вершина v инцидентна не менее чем двум пучкам, а значит, не более чем четырем жёстким 1-цепям.*

Доказательство. Если бы $b(v) = 1$, то по следствию $3'$ и лемме 4 вершина v имела бы не менее $\Delta - 4 - 3\Delta/4 \geqslant 13$ непучковых цепей, что невозможно для слабой вершины. Итак, $b(v) \geqslant 2$.

Из определения слабой вершины следует, что

$$b(v) + d_{ur}(v) + d_q(v) < 7 - \frac{d_q(v)}{2} \leqslant 7.$$

Поэтому $d_{ur}(v) + d_q(v) < 5$. Заметим, что число жёстких неособых 1-цепей не превосходит $d_{ur}(v)$, а число жёстких особых 1-цепей в точности равно $d_q(v)$ по лемме 2. Следовательно, число жёстких 1-цепей не превосходит 4. Следствие $4'$ доказано.

Лемма 5. *В G нет слабой вершины, инцидентной пучку толщины не менее* $(2\Delta + 4)/3$.

Доказательство. Удалим перечёркнутое ребро (см. рис. 6) и обесцветим слабую вершину v_1 и второй полюс v_2 пучка B, все младшие вершины, находящиеся на расстоянии 2 от v_1 и v_2, а также все смежные с v_1 и v_2 вершины, кроме тех, что лежат на инцидентных им жёстких 1-цепях. Тогда на выбор цвета для v_1 имеется не более $(\Delta - 4)/3 + 4$ ограничений, для v_2 — не более $2(\Delta - 4)/3$ ограничений, а всего не более Δ ограничений. Следовательно, найдётся цвет, в который можно покрасить v_1 и v_2, после чего действуем, как в доказательстве леммы 4. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *В G нет слабой вершины, из которой исходят только пучковые цепи и 1-цепи, ведущие в младшие вершины.*

Доказательство. По следствию $4'$ слабая вершина v инцидентна не менее чем двум пучкам. Удалим перечёркнутое ребро и обесцветим v, все смежные с ней вершины и младшие концы 1-цепей. Пусть конец одного из пучков окрашен в цвет 1.

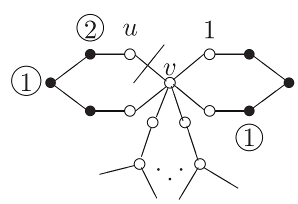

Рис. 7

Если вершину v можно покрасить в цвет 1, то раскраску можно продолжить следующим образом: сначала раскрасим непучковые вершины,

смежные v, а потом вершины степени 2 в пучках аналогично доказательству леммы 4, применяем подкрутку. Последними красим младшие вершины.

Если v нельзя покрасить в цвет 1, то имеет место ситуация, представленная на рис. 7, на котором фиксированные цвета отмечены кружками. В этом случае в цвет 1 покрасим одну из смежных с v вершин (см. рис. 7). Далее действуем как в предыдущем случае. Вершину u красим последней; если для u остаётся только цвет 2, то применяем подкрутку. Последними красим младшие вершины. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если слабая вершина v является концом толстого пучка, то второй конец пучка является сильной вершиной.*

Доказательство. Пусть v_L и v_R — концы толстого пучка B, где v_L —

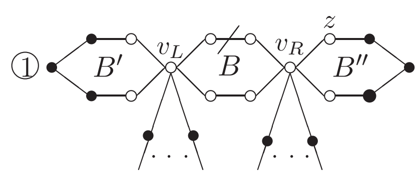

Рис. 8

слабая вершина, а v_R не является сильной, т. е. из v_R исходит не более 29 ножек (см. рис. 8). Удалим перечёркнутое ребро и обесцветим вершины v_L, v_R и все вершины, смежные с ними по k-цепям, $k \geqslant 2$, и 1-цепям, ведущим в младшие вершины, а также все младшие вершины, находящиеся на расстоянии 2 от v_L и v_R. Будем считать, что конец второго пучка B', инцидентного вершине v_L, окрашен в цвет 1.

Если цвет 1 не встречается ни на одной из смежных с v_L вершине, то покрасим в цвет 1 одну из смежных с v_L вершин в пучке B. После этого покрасим v_R в цвет, отличный от цвета 1: это возможно, так как v_R инцидентна не менее чем $(\Delta - 29)/5 - 1$ цепи, каждая из которых не даёт ограничений на выбор цвета, а не более 29 ножек дают не более чем по 2 ограничения, т. е. для вершины v_R можно выбрать не менее $1+(\Delta-29)/5-29-1 \geqslant 1$ свободных цветов (что верно при $\Delta \geqslant 179$). По следствию $4'$ для вершины v_L имеется не менее $(\Delta-29)/5-4$ допустимых цветов (цепи пучка B не дают ограничений, не более чем четыре цепи при v_L дают по 2 ограничения, а остальные цепи — не более чем по одному ограничению).

Эти цвета обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$.

Случай 1. На вершине v_R и смежных с ней вершинах встречается хотя бы один из цветов $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$.

Красим вершину v_L в один из этих цветов, затем красим вершины, смежные с v_R по ножкам (заметим, что в момент окраски вершины y, смежной с младшей вершиной, от младшей вершины добавляется не более четырех ограничений, но неокрашенных братьев из B у вершины y больше), затем красим пучковые вершины не из B, а потом все пучковые вершины из B (ввиду повторения цвета в вершине v_L на последнюю вершину действует не более Δ ограничений, если цвет 1 встречается на одной из смежных с v_L вершинах не из B; если в цвет 1 окрашена вершина из B, смежная с v_L, то применяем подкрутку, введённую в доказательстве леммы 3). Далее по той же схеме красим соседей вершины v_L; заметим, что последними красятся вершины из B', пользуясь тем, что для них цвет 1 повторяется, и применяем к самой последней вершине подкрутку. Наконец, красим младшие вершины: на каждую действует не более 10 ограничений.

Случай 2. На вершине v_R и смежных с ней вершинах не встречается ни один из цветов $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$.

По лемме 5 при вершине v_R найдётся пучок B'', отличный от B. Действительно, иначе (с учётом того, что $d(v_R) \geqslant \Delta - 28$ по следствию $3''$) при v_R было бы не менее $\Delta - 28 - (2\Delta + 4)/3 \geqslant 30$ ножек. Противоречие. Пусть z — смежная с v_R вершина из B''. Покрасим z и v_L в один из цветов α_i, что возможно, так как на z действует не более двух ограничений по его цепи из B'', а $(\Delta - 29)/5 - 4 - 2 \geqslant 1$ (ведь ни цвет вершины v_R, ни цвета её соседей не встречаются среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$). Далее действуем как в случае 1. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *В графе G нет цепи vzw, для которой $d(v) \leqslant 29$, $d(z) = 2$ и $d(w) \leqslant 5$, кроме случая, когда $d(v) = d(w) = 2$, т. е. когда vzw есть 3-цепь.*

Доказательство. Смотри рис. 9 при условии, что $d(v) \geqslant 3$. Если $d(v) = 2$, то тогда $d(w) \geqslant 3$, и действуем аналогично. Лемма 8 доказана.

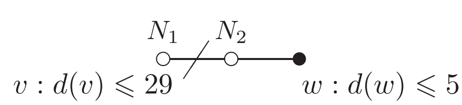

Рис. 9

Лемма 9. *В G нет цикла, образованного особыми 3-цепями.*

Доказательство. Пусть k таких цепей $a_i x_i y_i z_i a_{i+1}$ образуют цикл (где $1 \leq i \leq k$, а $a_{k+1} = a_1$). Удалим ребро $x_1 y_1$ и раскрасим полученный граф. Обесцветим все вершины степени 2 цикла; тогда для каждой из

$2k$ вершин x_i, z_i имеется по два допустимых цвета. Поэтому задача их раскраски сводится к нахождению обычной (не 2-дистанционной) предписанной раскраски чётного цикла, что нетрудно сделать. Затем красим все y_i (у них имеется по четыре ограничения на выбор цвета). Лемма 9 доказана.

Введём понятие *спонсора*. Рассмотрим граф, образованный особыми (т. е. инцидентными граням ранга 6) 3-цепями. В силу леммы 9 эти цепи образуют лес. Пусть v — висячая вершина. Тогда вершину v назовём *спонсором* центральной вершины этой цепи. Затем отбросим эту 3-цепь, получившую спонсора, и повторим процедуру. Поскольку мы рассматриваем граф без циклов, то висячая вершина всегда найдётся. По построению каждая центральная вершина степени 2 особой 3-цепи получает спонсора, а каждая вершина степени Δ будет служить спонсором не более чем для одной 3-цепи.

1.2. Правила перераспределения зарядов

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов:

R1: (i) Любая вершина, инцидентная двум соседним k-цепям, $k \geqslant 2$, получает заряд 1 от инцидентной этим цепям грани ранга не менее 8.

(ii) Любая вершина, инцидентная соседним 1-цепи и k-цепи, $k \geqslant 2$, получает заряд 1/2 от инцидентной этим цепям грани ранга не менее 7.

(iii) Любая вершина v, инцидентная соседним 1-цепям, концы которых являются младшими вершинами, получает заряд 1 от инцидентной этим цепям грани.

(iv) Любая грань f ранга не менее 8 отдает заряд 1 центральной вершине инцидентной ей 3-цепи.

R2: (i) Любая вершина v с $d(v) \geqslant 3$, являющаяся концом 1-цепи, отдает смежной с ней вершине степени 2 заряд 1.

(ii) Любая вершина v с $d(v) \geqslant 3$, инцидентная k-цепи, $k \geqslant 2$, отдаёт смежной с ней вершине степени 2 заряд 2.

(iii) Любая центральная вершина степени 2 особой 3-цепи (инцидентной грани ранга 6) получает заряд 1 от своего спонсора.

R3: Любая младшая вершина получает заряд 1 от другого конца инцидентной ей 1-цепи.

R4: Слабая вершина получает заряд 5/2 от другого конца каждого инцидентного ей толстого пучка.

Заряды вершины v и грани f, оставшиеся после применения правил, обозначим через $\mu^*(v)$ и $\mu^*(f)$ соответственно.

1.3. Проверка неравенства $\mu^*(f) \geqslant 0$

Напомним, что $\mu(f) = r(f) - 6$ и по лемме 2 в G нет двух вершин степени Δ, соединенных двумя 3-цепями либо 3-цепью и 2-цепью. Пусть r — ранг грани f. Заметим, что по лемме 8 вершины, получающие заряд 1 по правилу R1.iii, не являются младшими.

При любом r, $r \geqslant 12$, следующим образом усредним заряды, передаваемые гранью f инцидентным ей вершинам по правилам R1 до 1/2. Заряд 1, передаваемый гранью f вершине v по правилам R1.i и R1.iii, распределим по 1/4 на ребра, прилегающие к v по два с каждой стороны. Аналогично, заряд 1/2, получаемый вершиной v по R1.ii, распределим по 1/4 на два инцидентных ей ребра, а заряд 1, получаемый центральной вершиной 3-цепи, по R1.iv распределим на все четыре ребра этой цепи. Ясно, что при таком усреднении грань f отдает на каждое ребро заряд, не превышающий 1/2. Следовательно, $\mu^*(f) \geqslant r-6-r/2 = (r-12)/2 \geqslant 0$.

Пусть $7 \leqslant r \leqslant 11$. Отдельно рассмотрим случаи, когда в G отсутствуют и есть 3-цепи. Пусть в G нет 3-цепей. Тогда при любом r, $9 \leqslant r \leqslant 11$, усредним заряды, передаваемые гранью f вершине v, следующим образом. Заряд, получаемый v по правилу R1.i, рапределяется на четыре ребра двух инцидентных вершине v и грани f цепей: на первые (ближайшие) два по 1/3 и на вторые два по 1/6. Аналогично, заряд, получаемый вершиной v по правилу R1.ii, — на два ребра k-цепи, $k \geqslant 2$: на первое 1/3, а на второе 1/6, по правилу R1.iii — на четыре ребра по 1/4. Таким образом, каждое ребро получает от грани заряд, не превосходящий 1/3. Значит, $\mu^*(f) \geqslant r - 6 - r/3 = 2(r-9)/3 \geqslant 0$.

При $r = 8$ возможны два типа граней. Грань может быть инцидентна четырем 1-цепям, либо двум 2-цепям и одной 1-цепи. В первом случае по правилу R1.iii грань f отдаёт заряд, не больший 2×1, а во втором случае по правилам R1.ii и R1.i грань f отдаёт заряд, равный $2 \times 1/2 + 1$. Следовательно, $\mu^*(f) \geqslant 0$. При $r = 7$ ввиду того, что в G нет 0-цепей, возможна единственная грань, инцидентная двум 1-цепям и одной 2-цепи. По правилу R1.ii и лемме 2 имеем $\mu^*(f) \geqslant 1 - 2 \times 1/2 = 0$.

Пусть теперь в G имеются 3-цепи. Учитывая утверждение (ii) леммы 2, получаем, что не существует грани ранга 7, инцидентной 3-цепи. Значит, $8 \leqslant r \leqslant 11$. При $r = 8$ по утверждению (i) леммы 2 существует только одна грань, инцидентная 3-цепи и двум 1-цепям. Отсюда по правилам R1.iv и R1.ii имеем $\mu^*(f) \geqslant 2 - 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$. Если $r = 9$, то грань f ограничена 3-, 2- и 1-цепями. Следовательно, по правилам R1.i, R1.ii и R1.iv имеем $\mu^*(f) \geqslant 3 - 1 - 2 \times 1/2 - 1 = 0$. Рассмотрим грань f ранга 10. Она ограничена 3-, 3- и 1-цепями, либо 3-, 2- и 2-цепями, либо

одной 3-цепью и тремя 1-цепями. В каждом случае f отдает не более 4 единиц заряда. Следовательно, $\mu^*(f) \geqslant 0$. Пусть, наконец, $r = 11$. Возможны два варианта: f ограничена 3-, 3- и 2-цепями либо 3-, 2-цепями и двумя 1-цепями. Тогда по правилам R1.i–iv грань f отдает заряд, не превосходящий 5. Следовательно, $\mu^*(f) \geqslant 5 - 5 = 0$.

1.4. Проверка неравенства $\mu^*(v) \geqslant 0$ при $d(v) \leqslant 29$

Пусть $d(v) = 2$. Тогда $\mu(v) = -2$ и v получает либо заряд 2 от смежной вершины по правилу R2.ii, либо два раза по единичному заряду от смежных вершин по правилу R2.i, или, когда она является центральной вершиной 3-цепи, по 1 от инцидентных граней согласно правилу R1.iv, либо по 1 от инцидентной ей грани ранга не менее 8 и своего спонсора по правилу R2.iii (последнее следует из того, что 3-цепь не может лежать в грани ранга 7 по утверждению (ii) леммы 2 и не может лежать в двух гранях ранга 6, так как в графе G нет 4-циклов).

Рассмотрим младшую вершину v, т. е. такую, что $3 \leqslant d(v) \leq 5$. Согласно лемме 8 из v исходят только жёсткие 1-цепи. Отсюда по правилам R2.i и R3 имеем $\mu^*(v) \geqslant 2d(v) - 6 - d(v) + d(v) \geqslant 0$.

Пусть теперь $6 \leqslant d(v) \leqslant 29$. По лемме 8 вершина v не соединена с младшей вершиной по 1-цепи и не инцидентна k-цепям, $k \geqslant 2$. Следовательно, по R2.i имеем $\mu^*(v) \geqslant 2d(v) - 6 - d(v) \geqslant 0$.

1.5. Проверка неравенства $\mu^* \geqslant 0$ для слабых вершин

Напомним, что слабые вершины по каждой цепи могут отдавать заряд не более 2 младшим вершинам и вершинам степени 2, а также, быть может, спонсорский заряд 1 по правилу R2.iii. Поэтому их дефицит не превышает $2d-(2d-6)+1 = 7$. Покажем, что эти слабые вершины получают заряд, не меньший 7, от граней по правилам R1 и концов толстых пучков по правилу R4.

Рассмотрим слабую вершину v, т. е. такую, что $M(v) < 7 - d_q(v)/2$. Напомним, что в окружении слабой вершины имеется не менее 2 пучков и не более 11 ножек по следствию $4'$, а $d(v) \geqslant \Delta - 4$ по следствию $3'$.

Случай 1. $b(v) = 2$. По лемме 5 толщина более толстого из двух пучков при v не превосходит $(2\Delta{+}4)/3$. Поэтому во втором пучке имеется не менее

$$d(v) - \frac{2\Delta + 4}{3} - 11 \geqslant \Delta - 4 - \frac{2\Delta + 4}{3} - 11 \geqslant \frac{\Delta - 29}{5}$$

2-цепей, поскольку $\Delta \geqslant 179$. Это означает, что оба пучка при v являются толстыми. Значит, вершина v получает от их концов заряд 5 согласно

правилу R4 и заряд, не меньший 2, от граней. Чтобы убедиться в последнем, проделаем такой мысленный эксперимент. Удалим все непучковые цепи при v. Тогда каждая из двух граней при v даёт вершине v заряд 1 согласно правилу R1.i. Теперь, когда будем восстанавливать цепи поочередно (в порядке удлинения: сначала 1-цепи, а затем 2- и 3-цепи), каждый раз сумма зарядов, поступивших от граней (с учётом заряда, передаваемого от v на вершины добавленной цепи), не уменьшается. Действительно, если мы вставляем цепь P_1 между цепями P_2 и P_3, то возникают три подслучая в зависимости от того, является ли каждая из цепей P_2, P_3 1-цепью или k-цепью, $k \geqslant 2$. Для каждого случая достаточно рассмотреть соответствующие варианты правила R1.

Пусть P_i есть k_i-цепь, $1 \leqslant i \leqslant 3$, f_1 – грань до добавления P_1, а f_j, где $2 \leqslant j \leqslant 3$, – грань между P_1 и P_j. Заметим, что 6-грани в G могут состоять только из трех 1-цепей (тип 111), либо из двух 2-цепей (тип 22, пучковая 6-грань), либо из 1- и 3-цепи (особая грань), а 7-грани (в силу леммы 2) могут быть только типа 112.

Подслучай 1.1. $k_2 \geqslant 2$ и $k_3 \geq 2$. Если $k_1 \geqslant 2$, то каждая из граней f_2, f_3 есть k-грань, $k \geqslant 8$, и отдаёт заряд 1 вершине v. Если же $k_1 = 1$, то каждая из f_2, f_3 есть k-грань, $k \geqslant 7$ (она не может быть особой, так как 3-цепи еще не вставлены). Поэтому согласно правилу R1.ii каждая из граней f_2, f_3 отдаёт вершине v заряд $1/2$.

Подслучай 1.2. $k_2 = 1$ и $k_3 \geqslant 2$. Раньше f_1 отдавала вершине v заряд $1/2$, а сейчас f_3 отдаёт вершине v заряд, не меньший $1/2$ (f_3 не может быть особой, так как 3-цепи еще не вставлены).

Подслучай 1.3. $k_2 = k_3 = 1$. Если $k_1 \geqslant 2$, то каждая из граней f_2, f_3 отдаёт вершине v заряд $1/2$. Пусть $k_1 = 1$. Если P_1 ведет в младшую вершину, то согласно правилу R1.iii каждая из граней f_2, f_3 отдаёт вершине v заряд 1. Если P_1 ведет в немладшую вершину, то дефицит вершины v при добавлении P_1 не возрастает из-за того, что согласно правилу R1.i по цепи P_1 от v передаётся не заряд 2, а лишь заряд 1.

Случай 2. $3 \leqslant b(v) \leqslant 5$. Покажем, что хотя бы один пучок при вершине v является толстым. Иначе число 2-цепей, содержащихся во всех пучках, не превосходит $5 \times (\Delta - 30)/5 = \Delta - 30$ и слабая вершина v имеет не менее $d(v) - (\Delta - 30) \geqslant 26$ ножек, что невозможно.

Таким образом, по правилу R4 по толстому пучку вершина v получает заряд, не меньший $5/2$, и заряд, не меньший $b(v)$, от граней (см. рассуждение в случае 1). По лемме 6 вершина v инцидентна либо жёсткой 1-цепи, либо k-цепи, $k \geqslant 2$. Восстановим такую цепь первой. Тогда в первом случае вершина v по такой 1-цепи передаёт на вершину степени

2 заряд 1, а не заряд 2; а во втором случае вершина v получает дополнительный заряд 1 от грани. В результате после восстановления первой цепи дефицит $2d(v)-(2d(v)-6)=6$, возникающий после того, как v отдаст заряд вершинам степени 2 и младшим вершинам по правилам R2, уменьшится не менее чем на $b(v)+1+5/2 \geqslant 6{,}5$.

Если v не является спонсором, то

$$\mu^*(v) \geqslant 2d(v)-6-d(v)\times 2+b(v)+1+2{,}5 \geqslant 0{,}5.$$

Пусть v является спонсором. Тогда она должна давать заряд 1 некоторой центральной вершине особой 3-цепи P_4, инцидентной вершине v, т. е. возникает дефицит 0,5 (если и только если $b(v)=3$).

Чтобы погасить этот дефицит, мы следующим образом конкретизируем рассуждения, приведенные в случае 1. Заметим, что P_4 замыкается (до грани ранга 6) 1-цепью P_5, ведущей по лемме 1 в вершину степени Δ. Первой мы восстанавливаем P_5 (достигая при этом дефицита не больше 0,5), а затем цепь P_4, получая при этом еще 0,5 от граней за счет того, что вместо 0,5, приходившей вершине v от грани, заключенной между P_5 и пучком, вершина v получает теперь заряд 1 от грани, заключенной между пучком и P_4. Как и ранее, добавление остальных цепей не ухудшает ситуацию. Поэтому $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Заметим, что $b(v) < d_s(v) \leqslant 6$ по лемме 6. Этим завершается доказательство для слабых вершин.

1.6. Проверка неравенства $\mu^* \geqslant 0$ для нейтральных и сильных вершин

Назовём *дефицитом* вершины v величину

$$\begin{aligned}\mu'(v) = 2d(v)-6-1-2(d(v)-K-d_q(v))-K-d_q(v)-2{,}5T \\ = -7+K+d_q(v)-2{,}5T,\end{aligned}$$

где K — число жёстких неособых 1-цепей, инцидентных вершине v, а T — число передач, которые делает v по толстым пучкам согласно правилу R4. Нетрудно видеть, что эта величина есть заряд, оставшийся на v после передачи ею заряда 1 по правилу R2.iii (если v — спонсор); заряда 2 смежным с ней вершинам степени 2 k-цепей, $k \geqslant 2$, по правилу R2.ii; заряда 1 младшим вершинам по правилу R3 и вершинам степени 2 неособых и особых 1-цепей по правилу R2.i; по 5/2 концам толстых пучков, являющимся слабыми вершинами (правило R4).

Покажем, что вершина v получает от граней заряд, не меньший $-\mu'(v)$, а это означает, что $\mu^*(v) \geqslant 0$. Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 10. *Вершина v получает от граней заряд, не меньший $M(v) - K - d_q(v)/2$.*

Доказательство. Действуя по той же схеме, как и в случае 1 при рассмотрении слабых вершин, удалим все 1-цепи и особые 3-цепи. Тогда в полученной окрестности сумма зарядов, поступивших на вершину v от граней, равна $d_s(v) - K - d_q(v)$. Как и в случае 1 добавление никакой 1-цепи не уменьшит этой суммы. Сначала добавим жёсткие 1-цепи. При этом гарантированный минимум $d_s(v) - K - d_q(v)$ не изменится. Затем добавим особые 3-цепи. По утверждению (i) леммы 2 число таких цепей равно $d_q(v)$, а при добавлении очередной такой цепи величина зарядов, поступивших от граней, увеличивается на 0,5. В результате величина поступившего заряда возрастает до $d_s(v) - K - 0{,}5d_q(v)$. При последующем восстановлении 1-цепей, ведущих в младшие вершины, дефицит будет либо не меняться, либо уменьшаться на 1 в зависимости от того, увеличилось ли при добавлении очередной цепи число пар таких соседних цепей, каждая из которых вершине v приносит дополнительный заряд 1 по правилу R1.iii. Если $d_j(v) \geqslant d_s(v)$, то число таких пар не меньше $d_j(v) - d_s(v)$, и в результате вершина v получает заряд, не меньший $d_s(v) - K - 0{,}5d_q(v) + d_j(v) - d_s(v) = d_j(v) - K - 0{,}5d_q(v)$, а в противном случае получает заряд, не меньший $d_s(v) - K - 0{,}5d_q(v)$. Лемма 10 доказана.

Пусть v — нейтральная вершина. Так как v не является сильной, то она не отдаёт заряд 2,5 по толстому пучку. Поэтому $\mu'(v) \geqslant -7 + K + 0{,}5d_q(v)$. Но по определению $M(v) \geqslant 7 - 0{,}5d_q(v)$. Значит, по лемме 10 вершина v от граней получает заряд, не меньший $7 - K - 0{,}5d_q(v)$. Следовательно, $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Наконец, пусть v — сильная вершина. Заметим, что $T \leqslant 4$, поскольку иначе у неё было бы не более $\Delta - 5 \times \dfrac{\Delta - 29}{5} = 29$ ножек, что противоречит определению сильной вершины.

Если $T = 4$, то $\mu'(v) \geqslant -7 + K + 0{,}5d_q(v) - 4 \times 2{,}5 = K + 0{,}5d_q(v) - 17$, а $M(v) \geqslant 17 - 0{,}5d_q(v)$, поскольку

$$d_s(v) + d_j(v) = b(v) + d_l(v) - d_q(v) \geqslant 4 + 30 - d_q(v) = 34 - d_q(v).$$

По лемме 10 вершина v получает от граней заряд, не меньший $17 - K - d_q(v)$. Следовательно, $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Если $T \leqslant 3$, то $\mu'(v) \geqslant -7 + K + d_q(v) - 3 \times 2{,}5 = K + d_q(v) - 14{,}5$ и $M(v) \geqslant 15 - 0{,}5 d_q(v)$, поскольку $d_s(v) + d_j(v) \geqslant 30 - d_q(v)$. По лемме 10 вершина v получает от граней заряд, не меньший $15 - d_q(v) - K$. Следовательно, $\mu^*(v) > 0$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.** Достаточные условия 2-дистанционной раскрашиваемости // Сибирские электронные математические известия. 2004. Т. 1. С. 129–141 (http://semr.math.nsc.ru/).
2. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.

Адреса авторов:

О. В. Бородин
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

А. О. Иванова, Т. К. Неустроева
Якутский государственный университет
им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48,
677000 Якутск, Россия.
E-mail: shmgnanna@mail.ru
podn2001@mail.ru

Статья поступила
27 декабря 2004 г.

Переработанный вариант —
13 июля 2005 г.