ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2005. Серия 1. Том 12, № 3, 48–53

УДК 519.718

ЖЁСТКАЯ РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

Раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа называется жёсткой p-раскраской, если а) инциденторы раскрашены правильно; б) для любого ребра модуль разности между цветами его инциденторов равен p. Исследуется минимальное число цветов, необходимое для жёсткой p-раскраски инциденторов при $p \geqslant 1$.

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный неориентированный мультиграф без петель [5] с множеством вершин V и множеством рёбер E. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная степень вершины мультиграфа G. Мультиграф G называется *мультиграфом степени* Δ, если $\Delta(G) = \Delta$. Мультиграф называется *однородным,* если степени всех его вершин одинаковы.

Фактором мультиграфа $G = (V, E)$ будем называть мультиграф $F = (V, E')$ с тем же множеством вершин, в котором $E' \subseteq E$. Если при этом $\Delta(F) \leqslant k$, то F называется k*-фактором.* Фактор называется *однородным,* если степени всех его вершин одинаковы. Теорема Петерсена [9] утверждает, что однородный мультиграф четной степени $2m$ разбивается на m однородных 2-факторов. Из теоремы Петерсена легко вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. *Мультиграф G степени Δ разбивается на $\lceil \Delta/2 \rceil$ 2-факторов.*

Утверждение 2. *Мультиграф G степени $\Delta = 2pr$ разбивается на r $2p$-факторов.*

Утверждение 3. *Мультиграф G степени $\Delta = 2k + t$, где $k \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$ разбивается на два фактора F' и F'' таких, что $\Delta(F') \leqslant 2k$ и $\Delta(F'') \leqslant 2\lceil t/2 \rceil$.*

Введём понятие инцидентора. Если ребро e инцидентно вершине v, то пара (v, e) называется *инцидентором* ребра e, примыкающим к вершине

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173).

v. Таким образом, каждое ребро имеет два инцидентора, которые называются *сопряженными.* Два инцидентора, принадлежащие различным ребрам, называются *смежными,* если они примыкают к одной и той же вершине.

Пусть $I(G)$ — множество всех инциденторов мультиграфа G. Раскраской инциденторов называется отображение $f : I(G) \to N$, где N — множество натуральных чисел (цветов). Если инциденторы ребра e окрашены в цвета a и b, причем $a < b$, то будем говорить, что a — младший, а b — старший цвет ребра e.

Задача раскраски инциденторов начала систематически изучаться, начиная с работы [6]. Обзор результатов, полученных до середины 2004 года, имеется в [3].

Раскраска инциденторов, при которой смежные инциденторы окрашиваются различно, называется *правильной.* Правильная раскраска инциденторов f называется *p-раскраской* (p — целое, $p \geqslant 0$), если для любых двух сопряженных инциденторов i_1 и i_2 выполняется неравенство $|f(i_1) - f(i_2)| \geqslant p$. Через $\chi(p, G)$ обозначается наименьшее k такое, при котором существует p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G цветами из интервала $[1, k]$. В статье [4] доказано

Утверждение 4. *Для мультиграфа G степени Δ справедливо равенство $\chi(p, G) = \max\{\Delta, \lceil\Delta/2\rceil + p\}$.*

Назовём p-раскраску инциденторов *жёсткой,* если $|f(i_1) - f(i_2)|=p$ для любых двух сопряженных инциденторов i_1 и i_2. *Жёстким инциденторным p-хроматическим числом* $\chi(p, p, G)$ мультиграфа G называется наименьшее k, при котором существует жёсткая p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G цветами из интервала $[1, k]$. Очевидно, что

$$\chi(p, p, G) \geqslant \chi(p, G) = \max\{\Delta, \lceil\Delta/2\rceil + p\} \geqslant \Delta. \tag{1}$$

Жёсткая 0-раскраска инциденторов совпадает с правильной раскраской рёбер. В этом отношении понятие жёсткой раскраски инциденторов является обобщением понятия правильной раскраски рёбер, а понятие жёсткого инциденторного 0-хроматического числа совпадает с понятием хроматического класса. Однако приводимые ниже результаты, касающиеся жёсткой p-раскраски при $p \geqslant 1$, существенно отличаются от известных фактов, касающихся жёсткой 0-раскраски [1, 2, 10].

Теорема 1. *Пусть G — мультиграф степени $\Delta > 0$. Если $p \geqslant \Delta/2$, то $\chi(p, p, G) = \chi(p, G) = \lceil\Delta/2\rceil + p$.*

Доказательство. В силу соотношения (1) достаточно доказать, что

$\chi(p,p,G) \leqslant \lceil\Delta/2\rceil + p$, т. е. все инциденторы мультиграфа G можно жёстко p-раскрасить с помощью $\lceil\Delta/2\rceil + p$ цветов. Разобьём G на $\lceil\Delta/2\rceil$ 2-факторов F_j; это возможно по утверждению 1. Построим жёсткую p-раскраску инциденторов каждого фактора F_j с помощью цветов j и $j+p$ ($j = 1,\ldots,\lceil\Delta/2\rceil$) следующим способом. Выберем направление обхода каждой компоненты связности 2-фактора F_j. Для каждого ребра окрашиваем в цвет j тот инцидентор, который встречается раньше при обходе; сопряжённый ему инцидентор окрашиваем в цвет $j+p$. Покажем, что после раскраски указанным способом инциденторов всех 2-факторов получится жёсткая p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G с помощью $\lceil\Delta/2\rceil + p$ цветов. Нужно убедиться только в правильности раскраски инциденторов. Правильность следует из того, что младшие цвета рёбер различных факторов различны, старшие цвета рёбер различных факторов различны; кроме того, младший цвет любого ребра не больше $\lceil\Delta/2\rceil$, а в силу $p \geqslant \lceil\Delta/2\rceil$ старший цвет любого ребра больше $\lceil\Delta/2\rceil$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть G — мультиграф степени $\Delta = 2pr$, где $p \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$. Тогда $\chi(p,p,G) = \chi(p,G) = \Delta$.*

Доказательство. По утверждению 2 мультиграф G можно разбить на r $2p$-факторов. По теореме 1 инциденторы каждого такого $2p$-фактора можно жёстко p-раскрасить с помощью $2p$ цветов. Следовательно, все инциденторы мультиграфа G можно жёстко p-раскрасить с помощью $2pr$ цветов. Значит, $\chi(p,p,G) \leqslant 2pr = \Delta$. Отсюда с учётом (1) получаем, что $\chi(p,p,G) = \chi(p,G) = \Delta$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при $p \geqslant 1$ жёсткое инциденторное p-хроматическое число мультиграфа, степень которого удовлетворяет условиям теорем 1 или 2, точно выражается через степень мультиграфа и не зависит от других структурных свойств мультиграфа.

Теперь нас будет интересовать тот случай, когда степень мультиграфа имеет вид $2pr+s$, где $r \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ и $1 \leqslant s \leqslant 2p-1$. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant 1$, и пусть G — n-вершинный мультиграф, инциденторы которого жёстко p-раскрашены. Пусть $[a+1, a+2p]$ — произвольный интервал длины $2p$ с натуральными концами. Тогда число рёбер, младшие цвета которых принадлежат этому интервалу, не больше pn.*

Доказательство. Пусть E' и E'' — множества рёбер, младшие цвета которых принадлежат соответственно интервалам $[a+1, a+p]$ и

$[a+p+1, a+2p]$. Старшие цвета рёбер множества E' принадлежат тому же интервалу $[a+p+1, a+2p]$, которому принадлежат младшие цвета рёбер из E''. Так как жёсткая раскраска инциденторов является правильной, то в один и тот же цвет могут быть окрашены не более n инциденторов; поэтому $|E'| + |E''| \leqslant pn$. Лемма 1 доказана.

Теорема 3. *Пусть G — мультиграф степени $\Delta = 2pr + s$, где $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ и $1 \leqslant s \leqslant 2p - 1$. Тогда*

$$\chi(p, p, G) \leqslant \Delta + p - \lfloor s/2 \rfloor. \tag{2}$$

Если $H = (V, E)$ — однородный мультиграф степени Δ, то

$$\chi(p, p, H) = \Delta + p - \lfloor s/2 \rfloor. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем соотношение (2). Разобьём G на два фактора F_1 и F_2 таких, что $\Delta(F_1) \leqslant 2pr$, $\Delta(F_2) \leqslant 2\lceil s/2 \rceil$. Это можно сделать по утверждению 3. В силу теорем 2 и 1 справедливы неравенства $\chi(p, p, F_1) \leqslant 2pr$, $\chi(p, p, F_2) \leqslant \lceil s/2 \rceil + p$. Поэтому

$$\chi(p, p, G) \leqslant 2pr + \lceil s/2 \rceil + p = 2pr + s - \lfloor s/2 \rfloor + p = \Delta + p - \lfloor s/2 \rfloor.$$

Теперь докажем равенство (3). Для этого достаточно показать, что $\chi(p, p, H) \geqslant \Delta + p - \lfloor s/2 \rfloor$. Рассмотрим жёсткую p-раскраску всех инциденторов мультиграфа H. Предположим, что мультиграф H имеет n вершин. Тогда в H имеется $(2pr + s)n/2 = prn + sn/2$ рёбер. В силу леммы 1 интервалу $[1, 2pr]$ принадлежат младшие цвета не более чем prn рёбер. Следовательно, в мультиграфе H имеется не меньше $sn/2$ рёбер, инциденторы которых окрашены в цвета, большие $2pr$. Пусть E' — подмножество таких рёбер и $H' = (V, E')$. Так как $|V| = n$ и $|E'| \geqslant sn/2$, то $\Delta(H') \geqslant s$ и в силу теоремы 1 имеем $\chi(p, p, H') \geqslant \lceil s/2 \rceil + p$. Значит, на раскраску инциденторов рёбер из E' использовано не меньше $\lceil s/2 \rceil + p$ цветов, больших чем $2pr$. Следовательно, $\chi(p, p, H) \geqslant 2pr + \lceil s/2 \rceil + p = \Delta + p - \lceil s/2 \rceil$. Теорема 3 доказана.

Замечание. В случае $p = 1$ утверждение теоремы 3 следует из более сильного результата [7] о том, что при нечётном Δ любой $(2, \Delta)$-бирегулярный двудольный граф имеет интервальную раскраску $\Delta + 1$ цветом.

Известно [10], что для мультиграфа G степени Δ имеют место неравенства $\Delta \leqslant \chi(0, 0, G) \leqslant \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$, причём для любого m такого, что $\Delta \leqslant m \leqslant \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$, можно построить однородный мультиграф G степени

Δ с $\chi(0,0,G) = m$. Однако, как показывают теоремы 1–3, при $p \geqslant 1$ инциденторное жёсткое p-хроматическое число однородного мультиграфа принимает вполне определенное значение, зависящее только от степени мультиграфа.

Осталась открытой проблема отыскания точного инциденторного жёсткого p-хроматического числа для неоднородных мультиграфов, степени которых удовлетворяют условиям теоремы 3. При $p = 0$ эта задача является NP-трудной [8]. При $p \geqslant 1$ ситуация не ясна.

Рассмотрим, например, случай $p = 1$. Пусть G — неоднородный мультиграф нечётной степени $\Delta \geqslant 3$. Тогда по теореме 3 выполняются неравенства $\Delta \leqslant \chi(1,1,G) \leqslant \Delta + 1$. Является ли NP-трудной задача точного определения $\chi(1,1,G)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p-графа // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. С. 25–30.
2. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфа // Кибернетика. 1965. № 3. С. 29–39.
3. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Задача раскраски инциденторов мультиграфа // Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций": Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. ??–??.
4. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
5. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.
6. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–70.
7. **Hanson D., Loten C. O. M., Toft B.** On interval colourings of bi-regular bipartite graphs // Ars Combinat. 1998. V. 50. P. 23–32.
8. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 718–720.
9. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. V. 50. P. 193–220.

10. **Shannon C.** A theorem on coloring the lines of a network // J. Math. and Physics. 1949. V. 29. P. 148–151.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
12 апреля 2005 г.