ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2005. Серия 1. Том 12, № 3, 60–73

УДК 519.71

ЧИСЛО k-НЕРАЗДЕЛЁННЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ n-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА (k-НЕРАЗДЕЛЁННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНЕЦИЙ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ). ЧАСТЬ III. СЛУЧАЙ $k \geqslant 3$ И ПРОИЗВОЛЬНЫХ $n^{*)}$

А. Д. Коршунов

Пусть S — множество, состоящее из n элементов, и k — натуральное число, $k \geqslant 2$. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $S_1, \ldots, S_r$ множества S называется *k-неразделённым,* если пересечение любых v членов, $v \leqslant k$, семейства $\mathcal{F}$ непусто. Число k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества равно числу k-неразделённых булевых функций от n переменных (булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *k-неразделённой,* если у любых v наборов, $v \leqslant k$, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента). В статье найдена асимптотика для числа k-неразделённых булевых функций от n переменных (следовательно, для числа k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества) при любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$.

Введение

Потребность в изучении различных семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих заданным ограничениям, возникает при решении ряда задач дискретной математики. Среди естественных ограничений, которым должны удовлетворять такие семейства, является отсутствие в каждом семействе v членов (подмножеств), $v \leqslant k$, с пустым

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00364), гранта по президентской программе поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–313.2003.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Новые методы дискретного анализа и комбинаторной оптимизации»).

пересечением, $k = 2, 3, \ldots$ Такие семейства называются *k-неразделёнными.*

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *k-неразделённой,* если у любых v наборов, $v \leqslant k$, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Нетрудно видеть, что число k-неразделённых семейств n-элементного множества совпадает с числом k-неразделённых булевых фунеций от n переменных.

Действительно, пусть k-неразделённое семейство $\mathcal{F}$ состоит из подмножеств $S_1, \ldots, S_r$ n-элементного множества S. Подмножеству S_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, поставим в соответствие такой двоичный (характеристический) набор $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, что

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й элемент из } S \text{ принадлежит множеству } S_i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ возьмём функцию, которая равна 1 на всех характеристических наборах и равна 0 на $2^n - r$ остальных наборах.

Ясно, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является k-неразделённой, а указанное соответствие между k-неразделёнными семействами подмножеств n-элементного множества и k-неразделёнными булевыми функциями от n переменных взаимно однозначно. Следовательно, число k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества равно числу k-неразделённых булевых функций от n переменных.

Замечание 1. Множество k-неразделённых булевых функций от n переменных при $k = 2, 3, \ldots$ впервые изучал Э. Пост [10] в связи с исследованием замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов булевых функций. Описание этих классов имеется в [6, 9].

Обозначим через $F_k(n)$ множество k-неразделённых булевых функций от n переменных. В работах [2] и [5] исследовался размер множества $F_2(n)$ при чётных и нечётных n соответственно.

Основной целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *При любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$ справедливо соотношение $|F_k(n)| \sim n2^{2^{n-1}}$.*

Замечание 2. Формулировка этого утверждения имеется в [3, 4].

Справедливость теоремы 1 устанавливается в два этапа. Сначала доказывается

Теорема 2. *При любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$ справедливо соотношение*
$$|F_k(n)| \geqslant n2^{2^{n-1}} - \binom{n}{2}2^{2^{n-2}} \sim n2^{2^{n-1}}.$$

Затем доказывается

Теорема 3. *При $n \to \infty$ справедливо соотношение*

$$|F_3(n) \leqslant 2^{2^{n-1}}(1 + o(1)).$$

Поскольку $F_3(n) \supseteq F_4(n) \supseteq \ldots \supseteq F_n(n)$, из теоремы 3 следует, что при любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$

$$|F_k(n)| \leqslant n2^{2^{n-1}}(1 + o(1)). \tag{1}$$

Из (1) и теоремы 2 следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 основано на использовании принципа включения и исключения. Теорема 3 доказывается иначе.

§ 1. Доказательство теоремы 2

Обозначим через $F_k^+(n)$ множество таких k-неразделённых булевых функций $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, что во всех наборах, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Пусть натуральные числа $i_1, \ldots, i_s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$, таковы, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$. Обозначим через $F^+_{k,i_1,\ldots,i_s}(n)$ множество таких функций $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ из $F_k^+(n)$, что во всех наборах, на которых функция f равна 1, i_1-я, …, i_s-я компоненты являются единичными (возможно наличие других таких компонент).

Нетрудно видеть, что при любых рассматриваемых $i_1, \ldots, i_s$

$$|F^+_{k,i_1,\ldots,i_s}(n)| = 2^{2^{n-s}}.$$

Воспользовавшись принципом включения и исключения [8] по параметру s, имеем

$$|F_k^+(n)| = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\binom{n}{s}2^{2^{n-s}}. \tag{2}$$

Из (2) и неравенства Бонферрони [8] следует, что при любом $n \geqslant 3$

$$|F_k^+(n)| > n2^{2^{n-1}} - \binom{n}{2}2^{2^{n-2}}, \quad |F_k^+(n)| \leqslant n2^{2^{n-1}}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$|F_k^+(n)| \sim n2^{2^{n-1}}. \tag{3}$$

Так как $|F_k(n)| \geqslant |F_k^+(n)|$, то из (3) следует утверждение теоремы 2.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 2 следует, что почти каждая функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ из $F_k^+(n)$ является такой, что во всех наборах, на которых f равна 1, имеется только одна общая единичная компонента.

§ 2. Доказательство теоремы 3

Множество всех упорядоченных двоичных наборов длины n обозначим через B^n. Через $B_{i,1}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим множество наборов из B^n, в каждом из которых i-я компонента равна 1. Через $B_{i,0}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим множество наборов из B^n, в каждом из которых i-я компонента равна 0. Ясно, что $|B^n| = 2^n$ и $|B_{i,1}^n| = |B_{i,0}^n| = 2^{n-1}$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Множество $F_3(n)$ представим в виде $F_3(n) = F_3^1(n) \cup F_3^2(n)$, где $F_3^1(n)$ состоит из таких функций $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ множества $F_3(n)$, что среди наборов из B^n, на которых f равна 1, имеются два набора, в которых присутствует только одна общая единичная компонента; $F_3^2(n) = F_3(n) \setminus F_3^1(n)$.

Нетрудно видеть, что любая функция из $F_3^1(n)$ принадлежит множеству $F_3^+(n)$, введённому в § 1. Поэтому согласно теореме 2 для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$|F_3^2(n)| = o(|F_3^+(n)|). \tag{4}$$

Прежде чем переходить к доказательству соотношения (4), введём несколько понятий и убедимся в справедливости двух вспомогательных утверждений (лемм 1 и 2).

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — различные наборы из B^n. Через $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ обозначается число общих единичных компонент в $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ называются *противоположными,* если $\alpha_i + \beta_i = 1$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Говорят, что набор $\widetilde{\alpha}$ *предшествует* набору $\widetilde{\beta}$ (обозначение: $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Ясно, что не любые наборы находятся в отношении предшествования. Например, наборы (1,0) и (0,1) в таком отношении не находятся. Если $\widetilde{\alpha} \not\prec \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\alpha} \not\succ \widetilde{\beta}$, то наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ называются *несравнимыми.*

Пусть $M(n)$ обозначает множество монотонных булевых функций от n переменных.

Лемма 1. *При чётном $n \to \infty$*

$$|M(n)| < 2^{\binom{n}{n/2}} \exp\left(2^{n/2}\right),$$

а при нечётном $n \to \infty$

$$|M(n)| < 2^{\binom{n}{(n-1)/2}} \exp\left(2^{n/2}\right).$$

Доказательство. Из теоремы 1 [1] следует, что при чётном $n \to \infty$

$$|M(n)| < 2^{\binom{n}{n/2}} \exp\left(\tbinom{n}{n/2} 2^{-n/2+1}\right), \tag{5}$$

а при нечётном $n \to \infty$

$$|M(n)| < 2^{\binom{n}{(n-1)/2}+1} \exp\left(\tbinom{n}{(n-1)/2} 2^{-n/2+1}\right). \tag{6}$$

Воспользовавшись асимптотической формулой Стирлинга

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}(k/e)^k,$$

при чётном $n \to \infty$ получаем

$$\tbinom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!} \sim 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \tag{7}$$

и при нечётном $n \to \infty$ имеем

$$\tbinom{n}{(n-1)/2} = \frac{n!}{((n-1)/2)!((n+1)/2)!} \sim 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{8}$$

Из (5)–(8) следует утверждение леммы 1.

Пусть S — произвольное множество попарно несравнимых наборов из B^r. Такие множества называются *шпернеровыми*. Введём следующие обозначения:

a) $\overline{S}$ — множество таких наборов из B^r, каждый из которых противоположен некоторому набору из S;

b) $P(S)$ — множество таких наборов из B^r, каждый из которых предшествует некоторому набору из S;

c) $T(S)$ — множество таких наборов из B^r, что для каждого из них имеется предшествующий набор из S.

Легко видеть, что если S состоит из таких наборов, что в любых двух наборах имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента, то в любых двух наборах из $S \cup T(S)$ имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента, $(S \cup T(S)) \cap (\overline{S} \cup P(\overline{S})) = \varnothing$ и $|S \cup T(S)| = |\overline{S} \cup P(\overline{S})|$.

Поэтому при любом таком S выполняется неравенство $|S \cup T(S)| \leqslant 2^{r-1}$. Следовательно, $|T(S)| < 2^{r-1}$.

Теперь убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. $|F_2(r)| < |M(r)| \cdot 2^{2^{r-1}}$ *при любом* $r \geqslant 1$.

Доказательство. Все функции из $F_2(r)$ можно получить следующим способом.

1) Выбирается такое шпернерово множество S из B^r, что в любых двух наборах из S имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента. Так как совокупность наборов из S можно рассматривать как множество нижних единиц (единственной) монотонной булевой функции от r переменных, то число способов выбора множества S меньше числа монотонных булевых функций от r переменных, т. е. меньше величины $|M(r)|$.

2) Берутся такие булевы функции от r переменных, которые равны 1 на каждом наборе из S, принимают произвольные значения на наборах из $T(S)$ и равны 0 на остальных наборах из B^r. Так как $|T(S)| < 2^{r-1}$, то при фиксированном S число способов задания таких функций меньше $2^{2^{r-1}}$.

Из пп. 1 и 2 следует, что

$$|F_2(r)| < |M(r)| \cdot 2^{2^{r-1}}.$$

Лемма 2 доказана.

Множество S из $B^n_{1,1}$ (или $B^n_{1,0}$) назовём *множеством с v-кратным пересечением,* $v \geqslant 1$, если $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant v$ для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ из S и в S имеются такие наборы $\widetilde{\alpha}', \widetilde{\beta}'$, что $c(\widetilde{\alpha}', \widetilde{\beta}') = v$.

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $F_3(n)$, $B^n_{1,1,f}$ и $B^n_{1,0,f}$ — множества наборов из $B^n_{1,1}$ и $B^n_{1,0}$ соответственно, на которых функция f равна 1. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Среди наборов из $B^n_{1,1,f}$ имеются такие наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, что $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, т. е. общей единичной компонентой в $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ является только первая компонента.

Случай 2. Среди наборов из $B^n_{1,0,f}$ есть такие наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 1$.

Случай 3. Множество $B^n_{1,1,f}$ является множеством с 2-кратным пересечением, а среди наборов из $B^n_{1,0,f}$ нет таких наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 1$.

Случай 4. Среди наборов из $B^n_{1,1,f}$ нет таких наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, что $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, а среди наборов из $B^n_{1,0}$ имеется только один набор, на кото-

ром функция f равна 1, т. е. $|B^n_{1,0,f}| = 1$.

Случай 5. Среди наборов из $B^n_{1,0,f}$ нет таких наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 1$, а среди наборов из $B^n_{1,1}$ имеется только один набор, на котором функция f равна 1, т. е. $|B^n_{1,1,f}| = 1$.

Случай 6. Для любых различных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ справедливо неравенство $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3$, а $B^n_{1,0,f}$ является множеством с 2-кратным пересечением.

Случай 7. Для любых различных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ справедливо неравенство $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3$, а $B^n_{1,0,f}$ является множеством с 3-кратным пересечением.

Случай 8. Для любых различных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ справедливо неравенство $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3$, а $B^n_{1,0,f}$ является множеством с 4-кратным пересечением.

Случай 9. Для любых различных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ справедливо неравенство $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 3$, а для любых различных наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$ справедливо неравенство $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) \geqslant 5$.

Исследуем функции в каждом случае при условии, что они являются 3-неразделёнными.

Случай 1. Поскольку функция f является 3-неразделённой, в произвольных двух наборах $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ таких, что $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, и любом наборе из $B^n_{1,0}$ нет общих единичных компонент. Поэтому функция f равна 0 на любом наборе из $B^n_{1,0}$. Следовательно, функция f принадлежит множеству $F^+_3(n)$.

Случай 2. Пусть наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$ таковы, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 1$, и общей единичной компонентой в этих наборах является i-я компонента, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда в наборах $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\sigma}$ и любом наборе из $B^n_{1,1,f}$ только i-я компонента является общей единичной компонентой. Это означает, что во всех наборах из $B^n_{1,1,f}$ i-я компонента равна 1. Кроме того, в наборах $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\sigma}$ и любом оставшемся наборе из $B^n_{1,0,f}$ только i-я компонента является общей единичной компонентой. Поэтому во всех наборах из $B^n_{1,0,f} \cup B^n_{1,1,f}$ i-я компонента равна 1. Следовательно, функция f принадлежит множеству $F^+_3(n)$.

Случай 3. Пусть наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$ таковы, что $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 2$, и пусть i-я и, конечно, первая компоненты в них равны 1, $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда в наборах $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и любом наборе из $B^n_{1,0,f}$ только i-я компонента является общей единичной компонентой. Следовательно, во всех наборах из $B^n_{1,0,f}$ i-я компонента равна 1.

Обозначим через $B^{n-2}_{1,0,f}$ множество наборов длины $n-2$, полученных

из наборов множества $B^n_{1,0,f}$ после удаления из них первой и i-й компонент. Так как $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) \geqslant 2$ для любых наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$, то множество $B^{n-2}_{1,0,f}$ является 2-неразделённым. Отсюда и из леммы 2 следует, что при фиксированном i, $2 \leqslant i \leqslant n$, на множестве $B^n_{1,0}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-2)| \cdot 2^{2^{n-3}}$ способами. Аналогично, так как $c(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \geqslant 2$ для любых наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $B^n_{1,1,f}$, то на множестве $B^n_{1,1}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}}$ способами. Следовательно, общее число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$n \cdot |M(n-2)| \cdot 2^{2^{n-3}} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = (\text{см. лемму 1 при } n \to \infty) = o(2^{2^{n-1}}). \quad (9)$$

Случай 4. Из леммы 2 следует, что в $B^n_{1,1}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}}$ способами, а для выбора одного набора из $B^n_{1,0}$ имеется 2^{n-1} возможностей. Следовательно, число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$2^{n-1} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = (\text{см. лемму 1 при } n \to \infty) = o(2^{2^{n-1}}). \quad (10)$$

Случай 5. Согласно лемме 2 в $B^n_{1,0}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}}$ способами, а для выбора одного набора из $B^n_{1,1}$ имеется 2^{n-1} возможностей. Следовательно, число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$2^{n-1} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = (\text{см. лемму 1 при } n \to \infty) = o(2^{2^{n-1}}). \quad (11)$$

Случай 6. Пусть наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$ таковы, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 2$, и пусть, для определённости, вторая и третья компоненты в этих наборах равны 1. Тогда в наборах $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\sigma}$ и любом наборе из $B^n_{1,0}$, в котором вторая и третья компоненты равны 0, нет общей единичной компоненты. Значит, наборы из $B^n_{1,0}$, в котором вторая и третья компоненты равны 0, не принадлежат множеству $B^n_{1,0,f}$. Множество таких наборов обозначим через $B^{n,0}_{1,0}$.

Множество $B^n_{1,0} \setminus B^{n,0}_{1,0}$ представим в виде $B^n_{1,0} \setminus B^{n,0}_{1,0} = B^{n,1}_{1,0} \cup B^{n,2}_{1,0}$, где $B^{n,1}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых первая и вторая компоненты равны 0, а третья компонента равна 1; множество $B^{n,2}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых первая компонента равна

0, а вторая компонента равна 1. Обозначим через $B^{n,1}_{1,0,f}$ $(B^{n,2}_{1,0,f})$ множество наборов из $B^{n,1}_{1,0}$ $(B^{n,2}_{1,0})$, на которых функция f равна 1. Так как $c(\widetilde{\gamma}', \widetilde{\sigma}') \geqslant 2$ для любых различных наборов из $B^{n,1}_{1,0,f}$ или из $B^{n,2}_{1,0,f}$, то на множестве $B^{n,1}_{1,0}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-3)|\cdot 2^{2^{n-4}}$ способами, а на множестве $B^{n,2}_{1,0}$ — менее чем $|M(n-2)|\cdot 2^{2^{n-3}}$ способами. Вместе с тем на множестве $B^n_{1,1}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}}$ способами. Следовательно, общее число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$\tbinom{n-1}{2} \cdot |M(n-3)| \cdot 2^{2^{n-4}} \cdot |M(n-2)| \cdot 2^{2^{n-3}} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} \\ = (\text{см. лемму 1 при } n \to \infty) = o(2^{2^{n-1}}) \quad (12)$$

(множитель $\binom{n-1}{2}$ равен числу способов выбора двух позиций среди $n-1$ позиций).

Случай 7. Пусть наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$ таковы, что $c(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\sigma}) = 3$, и пусть, для определённости, вторая, третья и четвёртая компоненты в этих наборах равны 1. Тогда в наборах $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ и любом наборе из $B^n_{1,0}$, в котором вторая, третья и четвёртая компоненты равны 0, нет общей единичной компонетны. Поэтому наборы из $B^n_{1,0}$, в которых вторая, третья и четвёртая компоненты равны 0, не принадлежат множеству $B^n_{1,0,f}$. Множество таких наборов обозначим через $B^{n,0}_{1,0}$.

Множество $B^n_{1,0,f} \setminus B^{n,0}_{1,0}$ представим в виде

$$B^n_{1,0,f} \setminus B^{n,0}_{1,0} = B^{n,1}_{1,0} \cup B^{n,2}_{1,0} \cup B^{n,3}_{1,0},$$

где $B^{n,1}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая компонента равна 1; $B^{n,2}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая компонента равна 0, а третья компонента равна 1; $B^{n,3}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая и третья компоненты равны 0, а четвёртая компонента равна 1. Очевидно, что

$$|B^{n,1}_{1,0}| = 2^{n-2}, \quad |B^{n,2}_{1,0}| = 2^{n-3}, \quad |B^{n,3}_{1,0}| = 2^{n-4}. \quad (13)$$

Обозначим через $B^{n,i}_{1,0,f}$ множество наборов из $B^{n,i}_{1,0}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, на которых функция f равна 1. Так как $c(\widetilde{\gamma}', \widetilde{\sigma}') \geqslant 2$ для любых наборов $\widetilde{\gamma}'$ и $\widetilde{\sigma}'$ из $B^{n,i}_{1,0,f}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, то согласно лемме 2 и соотношениям (13) на множестве $B^{n,i}_{1,0}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-i-1)|2^{2^{n-i-2}}$ способами, а на множестве $B^n_{1,1}$ функция f может

быть задана менее чем $|M(n-1)|2^{2^{n-2}}$ способами. Следовательно, общее число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$\binom{n-1}{3}\cdot|M(n-2)|\cdot 2^{2^{n-3}}\cdot|M(n-3)|\cdot 2^{2^{n-4}}\cdot|M(n-4)|\cdot 2^{2^{n-5}}\cdot|M(n-1)|\cdot 2^{2^{n-2}} \\ = (\text{см. лемму 1 при } n\to\infty) = o(2^{2^{n-1}}) \quad (14)$$

(множетель $\binom{n-1}{3}$ равен числу способов фиксацмм трёх позиций среди $n-1$ позиций).

Случай 8. Пусть наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ из $B^n_{1,0,f}$ таковы, что $c(\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma}) = 4$, и пусть, для определённости, вторая–пятая компоненты в этих наборах равны 1. Тогда в наборах $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\sigma}$ и любом наборе из $B^n_{1,0}$, в котором вторая–пятая компоненты равны 0, нет общей единичной компонетны. Поэтому наборы из $B^n_{1,0}$, в которых вторая–пятая компоненты равны 0, не принадлежат множеству $B^n_{1,0,f}$. Множество таких наборов обозначим через $B^{n,0}_{1,0}$.

Множество $B^n_{1,0,f}\setminus B^{n,0}_{1,0}$ представим в виде

$$B^n_{1,0,f}\setminus B^{n,0}_{1,0} = \bigcup_{i=1}^{4} B^{n,i}_{1,0},$$

где $B^{n,1}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая компонента равна 1; $B^{n,2}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая компонента равна 0, а третья компонента равна 1; $B^{n,3}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая и третья компоненты равны 0, а четвёртая компонента равна 1; $B^{n,4}_{1,0}$ состоит из таких наборов, в каждом из которых вторая–четвёртая компоненты равны 0, а пятая компонента равна 1. Очевидно, что

$$|B^{n,1}_{1,0}| = 2^{n-2}, \quad |B^{n,2}_{1,0}| = 2^{n-3}, \quad |B^{n,3}_{1,0}| = 2^{n-4}, \quad |B^{n,4}_{1,0}| = 2^{n-5}. \qquad (15)$$

Обозначим через $B^{n,i}_{1,0,f}$ множество наборов из $B^{n,i}_{1,0}$, $1\leqslant i\leqslant 4$, на которых функция f равна 1. Так как $c(\widetilde{\gamma}',\widetilde{\sigma}') > 2$ для любых наборов $\widetilde{\gamma}'$ и $\widetilde{\sigma}'$ из $B^{n,i}_{1,0,f}$, $1\leqslant i\leqslant 4$, то согласно лемме 2 и соотношениям (15) на множестве $B^{n,i}_{1,0}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-i-1)|2^{2^{n-i-2}}$ способами, а на множестве $B^n_{1,1}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)|2^{2^{n-2}}$ способами. Следовательно, общее

число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида меньше величины

$$\binom{n-1}{4} \cdot |M(n-2)| \cdot 2^{2^{n-3}} \cdot |M(n-3)| \cdot 2^{2^{n-4}} \cdot |M(n-4)| \cdot 2^{2^{n-5}} \cdot |M(n-5)| \cdot 2^{2^{n-6}} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = (\text{см. лемму 1 при } n \to \infty) = o(2^{2^{n-1}}) \quad (16)$$

(множетель $\binom{n-1}{4}$ равен числу способов фиксации четырёх позиций среди $n-1$ позиций).

Случай 9. Выше было показано, что на множестве $B^n_{1,1}$ функция f может быть задана менее чем $|M(n-1)|2^{2^{n-2}}$ способами, а число возможностей для задания таких функций f на множестве $B^n_{1,0}$, когда f равна 1 не более чем на $\lfloor 2^n/n \rfloor$ наборах из $B^n_{1,0}$, меньше величины $\sum_{i=1}^{\lfloor 2^n/n \rfloor} \binom{2^{n-1}}{i} < (en)^{2^n/n}$. Следовательно, при $n \to \infty$ общее число функций из $F_3(n)$, равных 1 не более чем на $\lfloor 2^n/n \rfloor$ наборах из $B^n_{1,0}$, меньше величины

$$(en)^{2^n/n} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = o(2^{2^{n-1}}). \quad (17)$$

Теперь рассмотрим функции из $F_3(n)$, принимающие значение 1 только на таких наборах из $B^n_{1,0}$, в каждом из которых содержится не менее $\lfloor n/2 \rfloor + 2$ единиц. Ясно, что число способов задания таких функций в $B^n_{1,0}$ не превосходит $2^{2^{n-2}-\binom{n-1}{n/2}-\binom{n-1}{n/2+1}}$ при чётном n и не превосходит $2^{2^{n-2}-\frac{1}{2}\binom{n-1}{(n+1)/2}-\binom{n-1}{(n+3)/2}}$ при нечётном n. Следовательно, общее число таких функций из $F_3(n)$ не превосходит

$$2^{2^{n-2}-\binom{n-1}{n/2}-\binom{n-1}{n/2+1}} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = o(2^{2^{n-1}}) \quad (18)$$

при чётном $n \to \infty$ и не превосходит

$$2^{2^{n-2}-\frac{1}{2}\binom{n-1}{(n+1)/2}-\binom{n-1}{(n+3)/2}} \cdot |M(n-1)| \cdot 2^{2^{n-2}} = o(2^{2^{n-1}}) \quad (19)$$

при нечётном $n \to \infty$.

Остаётся убедиться в том, что число остальных функций из $F_3(n)$, рассматриваемых в случае 9, равно $o(2^{2^{n-1}})$. Изложение будем вести на языке булева куба. Наборы из B^n назовём *вершинами* n-мерного булева куба, обозначаемого через E^n. Наборы с k единицами из B^n называются вершинами *k-го слоя* в E^n, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Воспользуемся следующим обобщением леммы 2. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольная вершина k-го слоя из E^n. Множество вершин $\widetilde{\beta}$ с $(k+w)$-го слоя из E^r, где $w \geqslant 1$ и $k+w \leqslant r$, таких, что $\widetilde{\beta} \succ \widetilde{\alpha}$, назовём *$w$-тенью* вершины $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $S = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_v\}$ — множество таких вершин из E^r, в каждой из которых имеется не более $r-w$ единиц. При каждом $j = 1, 2, \ldots, w$ обозначим через $T^j(S)$ множество вершин из E^r, каждая из которых принадлежит j-тени некоторого набора из S. Множество $T^j(S)$ назовём *j-тенью* множества S. Пусть множество S таково, что $c(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_l) \geqslant 5$ при любых i и l, $1 \leqslant i < l \leqslant v$. Далее, пусть при $j = 1, 2, 3, 4$

$$R_j = \bigcup_{i=1}^{v} T^j(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P\left(\bigcup_{i=1}^{v} T^j(\overline{\widetilde{\alpha}}_i)\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом $j = 1, 2, 3, 4$ ни одна вершина из R_j не может принадлежать множеству $S \cup T(S)$. Поэтому $|S \cup T(S)| \leqslant |R_j|$. Однако это неравенство является грубым и им нельзя воспользоваться при доказательстве сформулированного утверждения. Более точную оценку для $|S|$ можно получить, используя следующее утверждение Р. Г. Нигматуллина [7]: *в E^r среди всех вершинных подмножеств мощности $\sum_{i=1}^{t} \binom{r}{t}$ наименьшую границу имеет шар радиуса t. Число граничных вершин в таком множестве равно $\binom{r}{t}$.*

Пусть $r = n-1$. Легко видеть, что число вершин в E^r, в каждой из которых содержится не более $\lfloor n/2 + \sqrt{3n \ln n} \rfloor$ и не менее $\lfloor n/2 - \sqrt{3n \ln n} \rfloor$ единиц, не превосходит

$$2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 - \sqrt{3n \ln n} \rfloor} \binom{n-1}{i} < 2^n / n^3.$$

Отсюда и из неравенства $\sum_{i=1}^{t} \binom{r}{i} > 2^n/n$ следует, что в почти каждой граничной вершине такого множества содержится $n/2 \cdot (1 + o(1))$ единиц. Пользуясь этим фактом, нетрудно видеть,что при таком v

$$|R_1| \geqslant \binom{n-1}{t+1}(1 - o(1)), \quad |R_2| \geqslant \binom{n-1}{t+2}(1 - o(1)),$$

$$|R_3| \geqslant \binom{n-1}{t+3}(1 - o(1)), \quad |R_4| \geqslant \binom{n-1}{t+4}(1 - o(1)).$$

Если множество S является шаром, то

$$|R_1| = \binom{n-1}{t+1}, \ |R_2| = \binom{n-1}{t+2}, \ |R_3| = \binom{n-1}{t+3}, \ |R_4| = \binom{n-1}{t+4}.$$

Поэтому вершины с первых $t+4$ слоёв не могут принадлежать «шаровому» множеству S. Так как $t+4+t \leqslant n-1$, то $t \leqslant (n-5)/2$. В свою очередь, при чётном n

$$\sum_{i=1}^{\lfloor (n-5)/2 \rfloor} \binom{n-1}{i} \leqslant 2^{n-2} - \binom{n-1}{n/2} - \binom{n-1}{n/2+1},$$

а при нечётном n

$$\sum_{i=1}^{\lfloor (n-5)/2 \rfloor} \binom{n-1}{i} \leqslant 2^{n-2} - \frac{1}{2}\binom{n-1}{(n-1)/2} - \binom{n-1}{(n+1)/2}.$$

Следовательно, число функций из $F_3(n)$ рассматриваемого вида не превосходит

$$|M(n-1)|2^{2^{n-2} - \frac{1}{2}\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} - \binom{n-1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}} \cdot |M(n-1)|2^{2^{n-2}} = o(2^{2^{n-1}}). \quad (20)$$

Из (9)–(12), (14) и (16)–(20) следует, что $|F_3(n)| = o(2^{2^{n-1}})$ при $n \to \infty$. Тем самым справедливость соотношения (4) установлена. Теорема 3 доказана.

Замечание 4. Из (3) и теоремы 3 следует, что при любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$ почти каждая функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ из $F_k(n)$ является такой, что во всех наборах, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 5–108.

2. **Коршунов А. Д.** Число k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделённых булевых функций). Часть I. Случай чётных n и $k = 2$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 31–69.

3. **Коршунов А. Д.** О числе k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделённых булевых функций от n переменных) // II Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. С. 36–38.

4. **Коршунов А. Д.** О числе k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделённых булевых функций от n переменных) // Доклады РАН. 2004. Т. 397, № 5. С. 593–595.
5. **Коршунов А. Д.** Число k-неразделённых семейств подмножеств n-элементного множества (k-неразделённых булевых функций). Часть II. Случай нечётных n и $k = 2$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 1. С. 12–70.
6. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
7. **Нигматуллин Р. Г.** Некоторые метрические соотношения в единичном кубе // Дискретный анализ. Сб. научн. тр. Вып. 9. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1967. С. 47–58.
8. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967.
9. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
10. **Post E.** The two-valued iterative systems of mathematical logics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: korshun@math.nsc.ru

Статья поступила
13 мая 2005 г.