ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2005. Серия 1. Том 12, № 3, 74–84

УДК 519.17

РАЗНООБРАЗИЕ ШАРОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЕРЕВЬЕВ*)

Т. И. Федоряева

Изучается разнообразие метрических шаров в графах. Получено описание векторов разнообразия шаров в метрических пространствах деревьев. Охарактеризованы деревья, обладающие свойством t-разнообразия шаров, и деревья, являющиеся графами максимального разнообразия.

В [1] был предложен подход к изучению строения графов как дискретных метрических пространств через разнообразие и пересекаемость метрических шаров, содержащихся в графе. Пусть $\tau(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, где τ_i — число различных шаров радиуса i в конечном графе G диаметра $d = d(G)$. Как замечено в [1],

$$\tau_0 = |V(G)| \geqslant \ldots \geqslant \tau_i \geqslant \tau_{i+1} \geqslant \ldots \geqslant \tau_d = 1,$$

где $V(G)$ — множество вершин графа G.

Определение 1. Вектор $\tau(G) = (\tau_0, \ldots, \tau_d)$ назовем *вектором разнообразия* шаров графа G.

Естественно возникает задача описания векторов разнообразия метрических шаров графов. В настоящей работе эта задача решена в классе деревьев, а именно в "неграфовых" терминах ниже определяется класс $\mathcal{A}$ векторов и доказывается, что $\mathcal{A}$ состоит из тех и только тех векторов, каждый из которых является вектором разнообразия шаров подходящего дерева (теорема 1).

В [1] введены следующие понятия и указана их связь с локально-изометрическими вложениями.

Определение 2. Граф G обладает свойством *t-разнообразия* шаров, если $\tau_i = |V(G)|$ при любом $i < t$. Граф, обладающий свойством t-разнообразия при $t = d(G)$, называется графом *максимального разнообразия.*

---

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00364).

Как следствие из теоремы 1 получено описание деревьев, обладающих свойством t-разнообразия шаров, и деревьев, являющихся графами максимального разнообразия (следствия 2 и 3).

Результаты работы анонсированы в [3].

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [2, 4]. Для графа G обозначим через

$V(G)$ — множество вершин,

$\deg_G x$ — степень вершины x,

$\rho_G(x,y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y,

$S_i^G(x) = \{y \mid y \in V(G), \rho_G(x,y) \leqslant i\}$ — шар радиуса i с центром в вершине x,

$d(G)$ — диаметр графа.

Множество всех вершин графа, лежащих на всех кратчайших цепях, соединяющих вершины x и y, называется *интервалом* $[x,y]$. Наибольшую длину кратчайшей цепи в графе G с концом x, содержащей вершину y, будем называть *относительным эксцентриситетом* вершины x относительно y и обозначать через $e_G(x,y)$. В вышеприведённых обозначениях будем опускать индекс G, если понятно, о каком графе G идет речь, и для краткости вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$. Как обычно, $G \setminus x$ обозначает граф, получающийся из G удалением вершины $x \in V(G)$; звезда — это граф $K_{1,n}, n \geqslant 1$; $\preceq$ — лексикографический порядок, определяемый следующим образом:

$$(x_1,x_2) \preceq (y_1,y_2), \text{ если } x_1 < y_1 \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \leqslant y_2.$$

Подграф G графа H называется *изометричным*, если для любых двух вершин $x,y \in V(G)$ выполняется равенство $\rho_G(x,y) = \rho_H(x,y)$. Кратчайшую цепь P с концами u_1, u_n такую, что

$$u_2,\ldots,u_{n-1} \in V(P), \ \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(u_i,u_{i+1}) = \rho_G(u_1,u_n)$$

(причем не обязательно $u_i \neq u_{i+1}$), обозначим через $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$.

Определим класс $\mathcal{A}$. Для этого при $d \geqslant 1$, $q \geqslant s \geqslant 1$ и $q+s \leqslant d$ введём векторы $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d)$ и $\beta_d(q,s) = (\beta_{0qs}^d, \beta_{1qs}^d, \ldots, \beta_{dqs}^d)$:

$$\Delta_j^d = \begin{cases} d+1, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor, \\ 2(d-j)+1, & \text{если } \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor < j \leqslant d; \end{cases}$$

$$\beta^{\,d}_{jqs} = \begin{cases} s, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant q, \\ s-(j-q), & \text{если } 1+q \leqslant j \leqslant q+s-1, \\ 0, & \text{если } q+s \leqslant j \leqslant d. \end{cases}$$

Положим

$$\mathcal{A} = \bigcup_{d \geqslant 1} \mathcal{A}_d,$$

где $\mathcal{A}_d = \{\overline{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \mid$ существуют такие $m \geqslant 0,\ \overline{q} = (q_0, \ldots, q_m)$ и $\overline{s} = (s_0, \ldots, s_m)$, что выполняются условия (1)–(3) и $\overline{\alpha}{=}\Delta_d{+}\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_d(q_j, s_j)\}$,

$$q_0 = s_0 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor,\ 1 \leqslant s_j \leqslant q_j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1}$$

$$(q_0, s_0) \succeq (q_1, s_1) \succeq \ldots \succeq (q_m, s_m), \tag{2}$$

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, q_{i+1}) > 0 \text{ при } 1 \leqslant i < m. \tag{3}$$

Здесь функция $\mathcal{X}$ определяется следующим образом: при любом $j \leqslant q_0$

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(0, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 2j, \\ 2 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а при любом $j \leqslant q_{i+1}$

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i{+}1, j) = \begin{cases} \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, j) + 1, & \text{если } j < s_{i+1} \text{ или } j = s_{i+1} < q_{i+1}, \\ \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, j), & \text{если } j = s_{i+1} = q_{i+1} \text{ или } s_{i+1} < j < q_{i+1}, \\ \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, j) - 1, & \text{если } s_{i+1} < j = q_{i+1}. \end{cases}$$

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Вектор α принадлежит классу $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует дерево G такое, что $\tau(G) = \alpha$.*

Справедливость теоремы 1 непосредственно вытекает из нижеприведённых лемм 5 и 6.

Сначала получим условие совпадения шаров в деревьях в терминах относительных эксцентриситетов.

Лемма 1. *Если x, y — различные вершины дерева G и $i \leqslant d(G)$, то $S^G_i(x) = S^G_i(y)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

$$e_G(x, z) \leqslant i \text{ для любого } z \in [y, y_x], \tag{4}$$

$$e_G(y, z) \leqslant i \text{ для любого } z \in [x, x_y], \tag{5}$$

где $x_y, y_x \in [x,y]$ и $\rho_G(y,y_x) = \rho_G(x,x_y) = \left\lceil \frac{\rho_G(x,y)}{2} \right\rceil - 1$.

Доказательство. Пусть $S_i(x) = S_i(y)$ и $z \in [y, y_x]$. Предположим противное, т. е. $e(x,z) \geqslant i+1$. Тогда $\rho(y,z) < \rho(x,z)$ и существует кратчайшая цепь (x,z,z',u) такая, что $z' \in [z,y]$, $[z',u] \cap [x,y] = \{z'\}$ и $\rho(x,u) = i+1$. Следовательно, $\rho(y,u) = \rho(y,z') + \rho(z',u) \leqslant \rho(y,z) + \rho(z',u) < \rho(x,z) + \rho(z',u) \leqslant \rho(x,u) = i+1$, т. е. $u \in S_i(y) \setminus S_i(x)$. Противоречие. Значит, справедливо неравенство (4). Аналогично доказывается справедливость неравенства (5).

Покажем обратное. Предположим, что существует вершина $u \in S_i(x) \setminus S_i(y)$. Выберем вершину $z \in [x,y]$ такую, что $\rho(z,u) = \min\{\rho(v,u) \mid v \in [x,y]\}$. Тогда

$$\rho(x,u) = \rho(x,z) + \rho(z,u),\ \rho(y,u) = \rho(y,z) + \rho(z,u). \tag{6}$$

Если $z \in [x,x_y]$, то в силу (5) и (6) имеем $\rho(y,u) \leqslant e(y,z) \leqslant i$. Если $z \in [x,y] \setminus [x,x_y]$, то $\rho(y,z) \leqslant \rho(x,z)$, и в силу (6) имеем $\rho(y,u) \leqslant \rho(x,u) \leqslant i$. Значит, $u \in S_i(y)$. Противоречие. Лемма 1 доказана.

Введём некоторые дополнительные определения и новые обозначения. Кратчайшую цепь $X = (x_0, x_1, \ldots, x_j)$ длины j в дереве G будем называть *окончанием*, если $\deg_G x_j = 1$, $\deg_G x_i = 2$ при $0 < i < j$ и при $j \neq 0$ выполняется неравенство $\deg_G x_0 \geqslant 2$. Вершину x_0 назовём *основанием* окончания X, а окончание длины j — j-*окончанием*.

Пусть X — s-окончание, Y— q-окончание дерева G, имеющие общее основание z. Цепь $X \cup Y$ назовём *галочкой* в дереве G, если $X \neq Y$ и $\deg_G z \geqslant 3$. Пару (q,s) будем называть *рангом галочки* $X \cup Y$, если $q \geqslant s$, и обозначать через $\mathrm{rank}(X \cup Y)$. Ясно, что если пара (q,s) — ранг некоторой галочки, то $q \geqslant s \geqslant 1$.

На произвольном множестве M j-окончаний в заданном дереве G определим бинарное отношение $\sim$ следующим образом:

$$X \sim Y \Leftrightarrow V(X) \cap V(Y) \neq \varnothing, \text{ где } X, Y \in M.$$

Нетрудно видеть, что если $X \sim Y$, то выполняется один из следующих случаев:

1) $X = Y$;

2) $X \cup Y$ — галочка в G;

3) G — цепь и в G есть только два различных j-окончания X и Y.

Очевидно, что $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве M. Поэтому корректно следующее определение. Определим $\varphi_G(j)$ как число попарно непересекающихся j-окончаний дерева G, не имеющих на своем основании окончаний меньшей длины.

Лемма 2. *Пусть G — цепь длины d. Тогда $\tau(G) = \Delta_d$ и при $j \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$*

$$\varphi_G(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 2j, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 следует непосредственно из определений.

Справедлива следующая очевидная

Лемма 3. *В дереве G нет галочек тогда и только тогда, когда G является цепью.*

В дальнейшем будем рассматривать линейное упорядочение всех галочек в дереве G, используя лексикографический порядок $\preceq$ для рангов этих галочек. Определим *ранг* произвольного дерева G следующим образом:

$$\operatorname{rank} G = \begin{cases} \left(\left\lfloor \frac{d(G)}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d(G)}{2} \right\rfloor \right), & \text{если G — цепь,} \\ \text{наименьший ранг галочек в дереве } G & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть G — дерево ранга (q, s), $X \cup Y$ — галочка в G, где $X = (z, x_1, \ldots, x_s)$ — s-окончание и $Y = (z, y_1, \ldots, y_q)$ — q-окончание с общим основанием z. Пусть $G' = G \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$. Тогда*

1. $d(G') = d(G)$;
2. $\operatorname{rank} G \preceq \operatorname{rank} G'$;
3. *при* $j \leqslant q$

$$\varphi_G(j) = \begin{cases} \varphi_{G'}(j) + 1, & \text{если } j < s \text{ или } j = s < q, \\ \varphi_{G'}(j), & \text{если } j = s = q \text{ или } s < j < q, \\ \varphi_{G'}(j) - 1, & \text{если } s < j = q; \end{cases}$$

4. $\varphi_{G'}(q) > 0$;
5. $\tau(G) = \tau(G') + \beta_{d(G)}(q, s)$.

Доказательство. Нам потребуются следующие свойства дерева G:

(a) любое окончание, отличное от X, с основанием z имеет длину не менее q;

(b) $e_G(z, z') \geqslant q$ для любой вершины $z' \in G \setminus \{x_1\}$, смежной с z;

(c) $e_{G'}(x, y) = e_G(x, y)$ при $x, y \in G'$;

(d) если $x, y \in G'$ и $j \leqslant d(G)$, то

$$S_j^G(x) = S_j^G(y) \Leftrightarrow S_j^{G'}(x) = S_j^{G'}(y);$$

(e) если $m \leqslant s$, $j \leqslant d(G)$, $w \in G'$ и $S_j^G(x_m) = S_j^G(w)$, то $S_j^G(x_m) = S_j^G(y_m)$;

(f) если $m \leqslant j - q$ и $1 \leqslant m \leqslant s$, то $S_j^G(x_m) = S_j^G(y_m)$;

(g) если $j - q < m < l \leqslant s$, $1 \leqslant m \leqslant s$ и $1 \leqslant n \leqslant q$, то $S_j^G(x_m) \neq S_j^G(y_n)$ и $S_j^G(x_m) \neq S_j^G(x_l)$.

Докажем справедливость свойства (a). Пусть Z — l-окончание, отличное от X, с основанием z. Пусть от противного $l < q$. Тогда $Z \cup X$ — галочка в дереве G и $\operatorname{rank}(Z \cup X) = (\max\{l, s\}, \min\{l, s\}) \prec (q, s) = \operatorname{rank} G$, противоречие.

Докажем свойство (b). Пусть z' — вершина, смежная с z и $z' \neq x_1$. Будем считать, что $z' \neq y_1$, так как $e_G(z, y_1) = q$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Вершина z' принадлежит некоторому l-окончанию Z с основанием z. Тогда $Z \neq X$ и по свойству (a) имеем $l \geqslant q$. Следовательно, $e_G(z, z') = l \geqslant q$.

Случай 2. Пусть случай 1 не выполняется. Тогда существует кратчайшая цепь $P = (z, z', z'')$ такая, что $\deg_G z'' \geqslant 3$. Выберем вершину z'', наиболее удаленную от z. Тогда существует галочка $Z_1 \cup Z_2 = (z_1, \ldots, z'', \ldots, z_2)$ такая, что $P \cap (Z_1 \cup Z_2) = \{z''\}$. Значит, $\operatorname{rank}(Z_1 \cup Z_2) \succeq \operatorname{rank} G = (q, s)$. Поэтому $\rho_G(z'', z_i) \geqslant q$ для некоторого i. Следовательно, $e_G(z, z') \geqslant \rho_G(z, z_i) = \rho_G(z, z'') + \rho_G(z'', z_i) \geqslant q$.

Докажем свойство (c). Пусть $x, y \in G'$. Так как G' изометричный подграф графа G, то $e_{G'}(x, y) \leqslant e_G(x, y)$. Покажем, что $e_G(x, y) \leqslant e_{G'}(x,\ y)$. Пусть P — кратчайшая цепь в G длины $e_G(x, y)$ с концом x, содержащая вершину y. Достаточно построить кратчайшую цепь в G' с концом x, содержащую y, длина которой не меньше длины цепи P. Можно считать, что $P \not\subseteq G'$. Тогда $X \subseteq P$ и $x, y \in P \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$. Если $P \cap Y = \{z\}$, то $(P \setminus X) \cup Y \subseteq G'$ — требуемая кратчайшая цепь. Поэтому считаем, что $P \subseteq X \cup Y$. Так как $\deg_G z \geqslant 3$, по свойству (b) существует кратчайшая цепь $Z \subseteq G' \setminus \{y_1, \ldots, y_q\}$ длины q с концом z. Следовательно, $(P \setminus X) \cup Z \subseteq G'$ — требуемая кратчайшая цепь.

Свойство (d) непосредственно следует из свойства (c) и леммы 1.

Докажем свойство (e). Пусть $S_j^G(x_m) = S_j^G(w)$, где $w \in G'$. Тогда по лемме 1 имеем

$$e_G(x_m, u) \leqslant j \text{ для любого } u \in [w, w_{x_m}]. \tag{7}$$

Покажем, что $m + q \leqslant j$. Действительно, если $w \in Y$, то из (7) следует, что $j \geqslant e_G(x_m, w) \geqslant \rho(x_m, y_q) = m + q$. Пусть $w \notin Y$. Рассмотрим вершину $z' \in [w, z]$, смежную с z. По свойству (b) имеем $e_G(z, z') \geqslant q$. Значит, $e_G(x_m, z') \geqslant m + q$. Если $z' \in [w, w_{x_m}]$, то из (7) следует, что $j \geqslant e_G(x_m, z') \geqslant m + q$. Поэтому $z' \notin [w, w_{x_m}]$. Тогда $\rho(w, z') \geqslant \rho(z', x_m)$ и

$\rho(w,z) > \rho(z,x_m) = m$. Следовательно, $y_q \in S^G_{m+q}(x_m) \setminus S^G_{m+q}(w)$. Значит, $m+q < j$. Таким образом, во всех случаях $m+q \leqslant j$ и по лемме 1 имеем $S^G_j(x_m) = S^G_j(y_m)$.

(f). Имеем $e_G(y_m,x_m) = m+s \leqslant m+q = e_G(x_m,y_m) \leqslant j$. По лемме 1 получаем $S^G_j(x_m) = S^G_j(y_m)$.

(g). Очевидно, что если $u \neq v$ и $e_G(u,v) > j$, то $S^G_j \neq S^G_j(v)$. Так как $e_G(x_m,y_n) = m+q > j$ и $e_G(x_l,x_m) \geqslant l+q > j$, то $S^G_j(x_m) \neq S^G_j(y_n)$ и $S^G_j(x_m) \neq S^G_j(x_l)$.

Таким образом, свойства (a)—(g) доказаны.

Теперь перейдём непосредственно к доказательству пп. 1–5 леммы 4.

1. Так как G'— изометричный подграф графа G, то $d(G') \leqslant d(G)$. Покажем обратное неравенство. Пусть (a_1,b_1,b_2,a_2)— некоторая диаметральная цепь в G, где a_i,b_i— смежные вершины. Тогда $a_i,b_i \in G'$ при некотором i. По свойству (c) имеем $d(G') \geqslant e_{G'}(a_i,b_i) = e_G(a_i,b_i)$. Значит, $d(G) = d(G')$.

2. Если G'— цепь, то $d(G') \geqslant 2q$ в силу свойства (a). Следовательно, rank $G' \succeq (q,q) \succeq (q,s) =$ rank G. Пусть теперь G' — не цепь. По лемме 3 в дереве G' существует галочка $X' \cup Y'$ и можно считать, что $\mathrm{rank}(X' \cup Y') = \mathrm{rank}\ G'$, где X' — s'-окончание, Y' — q'-окончание. Если $X' \cup Y'$ — галочка в дереве G, то $\mathrm{rank}(X' \cup Y') \succeq \mathrm{rank}\ G$. Поэтому считаем, что $X' \cup Y'$ не является галочкой в G. Тогда нетрудно убедиться в том, что $X' \neq Y \subset X'$ или $Y' \neq Y \subset Y'$. Поэтому соответственно $s' \geqslant q+1$ или $q' \geqslant q+1$. Значит, $\mathrm{rank}(X' \cup Y') \succeq (q+1,1) \succeq (q,s) = \mathrm{rank}\ G$.

3. Сравним j-окончания в G и G' при $j \leqslant q$. В силу свойства (a) всякое j-окончание с основанием z в дереве G' имеет длину $j = q$, причём в дереве G оно имеет на своем основании s-окончание X, $s \leqslant q$. Всякое j-окончание Z' с основанием $z' \neq z$ в дереве G' (в этом случае $z \notin Z'$ в силу свойства (a)), не имеющее на своем основании окончаний меньшей длины, является таковым и в G. При $j \leqslant s$ в G добавляется ровно одно новое j-окончание $(x_s, x_{s-1}, \ldots, x_{s-j})$ с основанием x_{s-j} $(x_o = z)$. При $j > s$ в G не добавляется новых j-окончаний. Суммируя все вышеизложенное, нетрудно получить требуемые соотношения между $\varphi_G(j)$ и $\varphi_{G'}(j)$.

4. Из определения $\varphi_{G'}$ и свойства (a) непосредственно получаем требуемое неравенство.

5. Пусть $\tau(G) = (\tau_0,\ldots,\tau_d)$ и $\tau(G') = (\tau'_0,\ldots,\tau'_{d'})$. В силу п. 1 $d = d'$. Так как $V(G) = V(G') \cup \{x_1,\ldots,x_s\}$, $V(G') \cap \{x_1,\ldots,x_s\} = \varnothing$, то в силу свойства (d) имеем $\tau_j = {\tau_j}' + \beta_j$, где β_j — число различных шаров $S^G_j(x_1),\ldots,S^G_j(x_s)$, не совпадающих с шарами вида $S^G_j(w)$, $w \in G'$. В

силу свойства (e) β_j равно числу различных шаров $S_j^G(x_1), \ldots, S_j^G(x_s)$, не совпадающих с шарами $S_j^G(y_1), \ldots, S_j^G(y_s)$. Рассматривая три случая для параметра j из определения $\beta_{jqs}^{d(G)}$, по свойствам (f) и (g) заключаем, что $\beta_j = \beta_{jqs}^{d(G)}$. Таким образом, $\tau_j = {\tau_j}' + \beta_{jqs}^{d(G)}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть G – дерево диаметра d. Тогда существуют $m \geqslant 0$, $\overline{q} = (q_0, \ldots, q_m)$ и $\overline{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ такие, что справедливы соотношения* (1)–(3) *и выполняются следующие условия*:

$$\tau(G) = \Delta_d + \sum_{j=1}^{m} \beta_d(q_j, s_j), \tag{8}$$

$$\operatorname{rank} G = (q_m, s_m), \tag{9}$$

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(m, j) = \varphi_G(j) \text{ при } j \leqslant q_m. \tag{10}$$

Доказательство проведем индукцией по числу вершин.

Базис индукции: $|V(G)| = d + 1$. Тогда G — цепь и полагаем $m = 0$, $q_0 = s_0 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. По лемме 2 имеем $\tau(G) = \Delta_d$ и $\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(0, j) = \varphi_G(j)$ при $j \leqslant q_0$. Тем самым (1)–(3) и (8)–(10) доказаны.

Шаг индукции: $|V(G)| > d + 1$. Тогда G — не цепь и по лемме 3 в G существует галочка. Пусть $\operatorname{rank} G = (q, s)$ — наименьший ранг галочек в G. Определим дерево G' как в лемме 4. В силу п. 1 леммы 4 имеем $d(G') = d$. По индукционному предположению существуют $m \geqslant 0$, $\overline{q} = (q_0, \ldots, q_m)$ и $\overline{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ такие, что для дерева G' справедливы (1)–(3) и (8)–(10) . Положим

$$q_{m+1} = q,\ s_{m+1} = s,\ q^+ = (q_0, \ldots, q_m, q_{m+1}),\ s^+ = (s_0, \ldots, s_m, s_{m+1})$$

и покажем справедливость соотношений (1)–(3) и (8)–(10) для графа G. Так как $\operatorname{rank} G = (q, s)$, то по индукционному предположению для G' получаем (1), (9) и, используя п. 2 леммы 4, имеем (2). В силу п. 5 леммы 4 и индукционного предположения имеем

$$\tau(G) = \tau(G') + \beta_d(q, s) = \Delta_d + \sum_{j=1}^{m+1} \beta_d(q_j, s_j),$$

т. е. справедливо (8).

Докажем справедливость (3). Пусть $1 \leqslant i < m + 1$. Из определения $\mathcal{X}$ следует, что

$$\mathcal{X}_{q^+,s^+}(i, j) = \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, j) \text{ при } j \leqslant q_i,\ i \leqslant m. \tag{11}$$

В силу (11), индукционного предположения (3) для G' и неравенства $q_{i+1} \leqslant q_i$ имеем $\mathcal{X}_{q^+,s^+}(i, q_{i+1}) > 0$ при $i < m$. Используя (11), индукционное предположение (10) для G', п. 4 леммы 4 и неравенства $q_{m+1} \leqslant q_m$, получаем $\mathcal{X}_{q^+,s^+}(m, q_{m+1}) = \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(m, q_{m+1}) = \varphi_{G'}(q) > 0$.

Докажем справедливость равенства (10). Рассмотрим функцию

$$\psi(x, j, q, s) = \begin{cases} x+1, & \text{если } j < s \text{ или } j = s < q, \\ x, & \text{если } j = s = q \text{ или } s < j < q, \\ x-1, & \text{если } s < j = q. \end{cases}$$

Пусть $j \leqslant q_{m+1}$. Тогда из (11), индукционного предположения (10) для дерева G' и п. 3 леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{q^+,s^+}(m+1, j) &= \psi(\mathcal{X}_{q^+,s^+}(m, j), j, q_{m+1}, s_{m+1}) \\ &= \psi(\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(m, j), j, q, s) = \psi(\varphi_{G'}(j), j, q, s) = \varphi_G(j). \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть для* $d \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, $\overline{q} = (q_0, \ldots, q_m)$ *и* $\overline{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ *справедливы соотношения* (1)–(3). *Тогда существует дерево* G *такое, что выполняются соотношения* (8)–(10).

Доказательство проведем индукцией по m. Базис индукции: $m = 0$. В качестве G возьмем цепь длины d. В силу леммы 2 имеем $\tau(G) = \Delta_d$ и выполняются соотношения (9) и (10).

Шаг индукции: $m > 0$. Пусть выполняются соотношения (1)–(3). Положим $q^- = (q_0, \ldots, q_{m-1})$ и $s^- = (s_0, \ldots, s_{m-1})$. Из определения $\mathcal{X}$ следует, что

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(i, j) = \mathcal{X}_{q^-,s^-}(i, j) \text{ при } j \leqslant q_i,\ i \leqslant m-1. \tag{12}$$

По индукционному предположению существует дерево G' такое, что

$$\tau(G') = \Delta_d + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_d(q_j, s_j),$$

$$\operatorname{rank} G' = (q_{m-1}, s_{m-1}), \tag{13}$$

$$\mathcal{X}_{q^-,s^-}(m-1, j) = \varphi_{G'}(j) \text{ при } j \leqslant q_{m-1}. \tag{14}$$

Тогда $d(G') = d$. В силу (2), (12) и (14) имеем $\varphi_{G'}(q_m) = \mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(m-1, q_m)$. Тогда $\varphi_{G'}(q_m) > 0$, так как $\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(0, j) > 0$ и при $m > 1$ выполняется (3). Следовательно, в дереве G' существует q_m-окончание Y, не имеющее на своем основании z окончаний меньшей длины. В силу (1) имеем $1 \leqslant s_m \leqslant q_m$. Поэтому $\deg_{G'} z \geqslant 2$. Определим дерево $G = G' \cup X$, где

X — новое s_m-окончание с основанием z и $V(G') \cap V(X) = \{z\}$. Тогда $X \cup Y$ — галочка ранга (q_m, s_m) в дереве G. Заметим, что всякая галочка W в дереве G является либо галочкой в G', либо $W = Z \cup X$, где Z — некоторое l-окончание в G' с основанием z, причём $l \geqslant q_m$. Тогда в первом случае rank $W \succeq$ rank $G' = (q_{m-1}, s_{m-1}) \succeq (q_m, s_m)$ в силу (13) и (2), а во втором случае rank $W = (l, s_m) \succeq (q_m, s_m)$. Таким образом, rank $G = \operatorname{rank}(X \cup Y) = (q_m, s_m)$, т. е. выполняется соотношение (9).

В силу пп.1 и 5 леммы 4 имеем $\tau(G) = \tau(G') + \beta_{d(G)}(q_m, s_m)$, т. е. справедливо (8).

Пусть $j \leqslant q_m$ и ψ — функция, определенная в лемме 5. В силу (12), (2), (14) и п. 3 леммы 4 получаем

$$\mathcal{X}_{\overline{q},\overline{s}}(m, j) = \psi(\mathcal{X}_{q^-,s^-}(m-1, j), j, q_m, s_m) = \psi(\varphi_{G'}(j), j, q_m, s_m) = \varphi_G(j),$$

т. е. справедливо (10). Лемма 6 доказана.

Следствие 1. *Если G — дерево ранга (q, s) и $\tau(G) = (\tau_0, \ldots, \tau_d)$, то* rank $G \preceq \left(\left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \dfrac{d}{2} \right\rfloor\right)$ *и* $\tau_0 = \ldots = \tau_q > \tau_{q+1}$.

Доказательство. По лемме 5 существуют $m \geqslant 0$, $\overline{q} = (q_0, \ldots, q_m)$ и $\overline{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ такие, что справедливы (1)–(3) и (8)–(10). В силу (1), (2), (9) получаем

$$s = s_m \leqslant q = q_m \leqslant q_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant q_1 \leqslant q_0 = s_0 = \lfloor d/2 \rfloor.$$

Поэтому rank $G \preceq (q_0, s_0)$. Из определения векторов Δ_d и $\beta_d(q_j, s_j)$ следует, что

$$\begin{aligned}
&\Delta_o^{\,d} = \ldots = \Delta_{q_o}^{\,d} > \Delta_{q_o+1}^{\,d},\\
&\beta_{\,o,q_j,s_j}^{\,d} = \ldots = \beta_{q_j,q_j,s_j}^{\,d} > \beta_{q_j+1,\,q_j,s_j}^{\,d} \quad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant m.
\end{aligned}$$

Поэтому из (8) следует, что $\tau_0 = \ldots = \tau_q > \tau_{q+1}$. Следствие 1 доказано.

Непосредственно из следствия 1 получаем следующую характеризацию деревьев, обладающих свойством t-разнообразия шаров.

Следствие 2. *Дерево G обладает свойством t-разнообразия шаров тогда и только тогда, когда* rank $G \succeq (t-1, 0)$.

В данном случае условие rank $G \succeq (t-1, 0)$ означает, что если G — цепь, то ее длина должна быть не меньше $2t-2$, а если G — не цепь, то "высота" любой галочки в G должна быть не меньше $t-1$.

Следующее следствие описывает деревья, являющиеся графами максимального разнообразия.

Следствие 3. *Дерево G является графом максимального разнообразия тогда и только тогда, когда G является звездой.*

Доказательство. Пусть дерево G является графом максимального разнообразия. По следствиям 1 и 2 имеем

$$(d(G)-1,0) \preceq \operatorname{rank} G \preceq \left(\left\lfloor \frac{d(G)}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d(G)}{2} \right\rfloor \right),$$

отсюда легко видеть, что $d(G) \leqslant 2$ и, следовательно, G является звездой $K_{1,n}$. Обратное утверждение очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изметричемкие вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5—12.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. **Федоряева Т. И.** О разнообразии метрических шаров в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005г.). М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2005. С. 159.
4. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
6 июня 2005 г.