ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2005. Серия 1. Том 12, № 3, 85–104

УДК 519.72

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЧЁТКИХ ДАННЫХ С СОХРАНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ*)

Л. А. Шоломов

Рассматривается задача повышения определённости нечётких данных с сохранением энтропийных свойств. Энтропия $\mathcal{H}(S)$ нечёткого источника S характеризует степень сжимаемости порождаемых им последовательностей [5]. Источник $S\varphi$, полученный из S некоторой операцией φ частичного доопределения, называется адекватным источнику S, если $\mathcal{H}((S\varphi)\hat{S}) = \mathcal{H}(S\hat{S})$ для любого нечёткого источника $\hat{S}$, и полуадекватным источнику S, если $\mathcal{H}(S\varphi) = \mathcal{H}(S)$. Исследуется задача построения максимально чётких адекватных и полуадекватных источников. Установлено, что для свойства адекватности такой источник единственен и может быть построен эффективно, а число максимально чётких полуадекватных источников может быть экспоненциально много.

Введение

Под нечёткими данными понимаются последовательности символов, среди которых встречаются нечёткие. Каждому нечёткому символу соответствует некоторое множество чётких символов, одним из которых он может быть замещён (доопределен). С нечёткой информацией имеют дело в задачах распознавания образов, синтеза схем для частичных булевых функций, управления, принятия решений, генетики и т. д. Это указывает на целесообразность рассмотрения нечётких данных в качестве самостоятельного объекта.

В [5] (краткое изложение имеется в [6]) изучена задача сжатия нечётких данных. Она сформулирована в терминах кодирования источников S, порождающих нечёткие символы с некоторыми вероятностями. При этом по коду нечёткой последовательности требуется восстановить не саму последовательность, а какое-либо её доопределение. Оказалось, что

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Отделения информационных технологий и вычислительных систем РАН по программе фундаментальных исследований.

степень сжимаемости последовательностей источника S совпадает с энтропией $\mathcal{H}(S)$, введённой в [1], исходя из некоторых эвристических соображений. В [5] исследованы свойства этой энтропии, некоторые из которых подобны свойствам энтропии Шеннона, а некоторые оказались новыми.

Из-за наличия нечёткости возникают трудности алгоритмического и принципиального характера. Энтропия $\mathcal{H}(S)$ представляет собой минимум некоторой функции и её явное выражение удаётся найти лишь в редких случаях. Для чётких источников имеются эффективные (полиномиальные) процедуры асимптотически наилучшего сжатия (см. обзор [4]), а для нечётких источников таких процедур не известно — алгоритмы сжатия в [5] используют доопределение нечётких последовательностей, получаемое либо методом случайного кодирования, либо трудоёмкой градиентной процедурой. При введении для нечётких источников понятий условной энтропии $\mathcal{H}(S_2|S_1)$ и информации также возникают трудности, связанные с тем, что в общем случае нечётких источников правило сложения энтропий $\mathcal{H}(S_1S_2) = \mathcal{H}(S_1) + \mathcal{H}(S_2|S_1)$ [2] не согласуется с колмогоровской интерпретацией условной энтропии как относительной сложности [3]. В некоторых ситуациях они оказываются совместимыми и удаётся дать удовлетворительное определение этих понятий [7]. Множество таких ситуаций может быть расширено за счёт использования преобразований, повышающих чёткость источников и сохраняющих их информационные свойства.

Такие преобразования изучаются в данной статье. Рассматриваются преобразования φ частичного доопределения, при которых некоторые символы исходного нечёткого источника S заменяются более чёткими. Возникающий при этом источник $S\varphi$ называется адекватным источнику S, если он ведёт себя по отношению к другим источникам как S, т. е. для любого источника $\hat{S}$ имеет место равенство $\mathcal{H}((S\varphi)\hat{S}) = \mathcal{H}(S\hat{S})$. В статье дано полное описание преобразований φ, приводящих к адекватным источникам. Установлено, что для всякого источника существует единственный (с точностью до переименования символов) максимально чёткий адекватный ему источник, и он может быть получен с помощью достаточно простой процедуры. Использование вместо исходных нечётких источников максимально чётких адекватных им источников расширяет множество ситуаций, в которых удаётся ввести удовлетворительные понятия условной энтропии и информации. Эти вопросы будут рассмотрены отдельно.

Если ограничиться задачей кодирования источников (вне связи с другими источниками), то достаточно более слабого свойства $\mathcal{H}(S\varphi) = \mathcal{H}(S)$, названного полуадекватностью. В этом случае кодирование исходного источника S может быть заменено кодированием более чёткого источника $S\varphi$. Показано, что максимально чёткие полуадекватные источники могут быть получены из исходного источника последовтельным исключением некоторых чётких символов. Найдены точные по порядку логарифма оценки количества таких источников в зависимости от числа исходных и оставшихся (неисключённых) символов. Из этих оценок следует, что число максимально чётких полуадекватных источников может быть экспоненциально большим.

1. Энтропия нечётких источников

Введём некоторые понятия (см. [5, 6]). Пусть задано множество $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и каждому непустому подмножеству $T \subseteq M$ сопоставлен символ a_T. Алфавит всех символов a_T обозначим через A, а его подалфавит $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, символы которого соответствуют элементам множества M, – через A_0. Символы из A будем называть *нечёткими*, из A_0 – *чёткими*. *Доопределением* символа $a_T \in A$ назовём всякий чёткий символ a_i, $i \in T$, а доопределением последовательности в алфавите A – любую последовательность в алфавите A_0, полученную из исходной заменой всех её символов некоторыми доопределениями. Будем говорить, что символ $a_{T'}$ *чётче* символа a_T (a_T *размытее* $a_{T'}$), если $T' \subseteq T$. *Частичным доопределением последовательности* в алфавите A будем называть результат замены некоторых её символов более чёткими.

Пусть задан источник S, порождающий символы $a_T \in A$ независимо с вероятностями $p_T \geqslant 0$, $\sum\limits_T p_T = 1$. Набор вероятностей $(p_T,\ T \subseteq M)$ обозначим через P и для источника S будем использовать обозначение (A, P). Такой источник будем называть *нечётким*, а при выполнении условия $p_T = 0$ для $a_T \notin A_0$ – *чётким*. Зададимся некоторым набором вероятностей $Q = (q_i,\ i \in M)$ символов $a_i \in A_0$ ($q_i \geqslant 0$, $q_0 + \ldots + q_{m-1} = 1$) и введёи функцию

$$\mathcal{H}(P, Q) = -\sum_{T \subseteq M} p_T \log \sum_{i \in T} q_i \tag{15}$$

(здесь и дальше логарифмы двоичные). *Энтропией источника* S назовём величину

$$\mathcal{H}(P) = \min_Q \mathcal{H}(P, Q). \tag{16}$$

Наряду с $\mathcal{H}(P)$ будем использовать обозначение $\mathcal{H}(S)$. Величина $\mathcal{H}(S)$ характеризует сжимаемость нечётких последовательностей, порождаемых источником S: средняя длина кода, затрачиваемая на символ источника, не меньше $\mathcal{H}(S)$ и может быть сделана сколь угодно близкой к этой величине [5]. Отметим, что в задаче кодирования нечётких последовательностей по коду последовательности требуется восстановить некоторое её доопределение (но не саму последовательность). В случае чётких источников S величина $\mathcal{H}(S)$ совпадает с обычной энтропией.

В дальнейшем понадобится следующее утверждение [5].

Лемма 1. *Набор вероятностей Q минимизирует функцию $\mathcal{H}(P,Q)$ тогда и только тогда, когда при каждом i, $i \in M$, выполнено неравенство*

$$\sum_{T:\, i\in T} \frac{p_T}{\sum\limits_{j\in T} q_j} \leqslant 1, \tag{17}$$

где строгое неравенство может иметь место лишь при таких i, что q_i=0.

2. Операции над нечёткими источниками

Пусть выход источника $S = (A, P)$, $P = (p_T,\, T \subseteq M)$, подан на вход вероятностного преобразователя φ, который переводит символы алфавита A в символы некоторого нечёткого алфавита $A' = \{a'_{T'},\, T' \subseteq M'\}$ и описывается набором переходных вероятностей $p_{T'|T} = p(a_{T'}|a_T)$, $T \subseteq M$, $T' \subseteq M'$, $\sum\limits_{T'} p_{T'|T} = 1$. На выходе преобразователя реализуется источник $S' = (A', P')$, $P' = (p'_{T'},\, T' \subseteq M')$, где $p'_{T'} = \sum\limits_{T} p_T p_{T'|T}$. Этот источник будем обозначать через $S\varphi$. В произведении источников $S \cdot S\varphi = SS'$ пары $(a_T, a'_{T'})$ имеют вероятность $p_{TT'} = p_T p_{T'|T}$.

Пусть помимо $S = (A, P)$ задан источник $\hat{S} = (\hat{A}, \hat{P})$ и произведению $S\hat{S}$ соответствует совместное распределение $p_{T\hat{T}}$ пар $(a_T, \hat{a}_{\hat{T}})$. Распространим преобразование φ на произведение $S\hat{S}$, положив вероятность пары $(a'_{T'}, \hat{a}_{\hat{T}})$ в произведении $S\varphi \cdot \hat{S} = S'\hat{S}$, равной $p_{T'\hat{T}} = \sum\limits_{T} p_{T\hat{T}} p_{T'|T}$.

В терминах преобразователей φ опишем некоторые операции над нечёткими источниками [5, 6]. Операция *частичного доопределения* источника S, заменяющая некоторые символы источника более чёткими, соответствует преобразователю φ, в котором $A' = A$ и переходные вероятности $p_{T'|T}$ положительны лишь для $T \supseteq T'$. Будем рассматривать также операцию *размытия источника* S, осуществляющую замену некоторых символов более размытыми. Она соответствует преобразователю φ, в котором $A' = A$ и $p_{T'|T} > 0$ лишь для $T \subseteq T'$.

Частным случаем операции частичного доопределения является операция *исключения символа*. Она применима к символу a_i источника

$S = (A, P)$, если $p(a_i) = p_i = 0$, и соответствует преобразователю φ, в котором $M' = M \setminus \{i\}$, $A' = \{a_{T'} \mid T' \subseteq M'\}$, $p_{T'|T} = 1$ для $T' = T \setminus \{i\}$ и $p_{T'|T} = 0$ для $T' \neq T \setminus \{i\}$. Преобразователь производит детерминированную замену символов a_T на $a_{T \setminus \{i\}}$. Результатом является источник $S' = (A', P')$, где $p'_{T'} = p_{T'} + p_{T' \cup \{i\}}$, $T' \subseteq M'$.

Путём последовательного применения таких операций можно исключить некоторое множество символов $\{a_j \mid j \in J\}$. Это можно сделать, если для любых T с $p_T > 0$ выполнено $T \setminus J \neq \varnothing$. Легко видеть, что результат исключения символов множества $\{a_j \mid j \in J\}$ не зависит от порядка, в котором они удалялись, и даёт источник $S'' = (A'', P'')$, где $A'' = \{a_U \mid U \subseteq M \setminus J\}$ и

$$p''_U = \sum_{T\colon T \setminus J = U} p_T, \quad U \subseteq M \setminus J. \tag{18}$$

Множество символов $\{a_j \mid j \in J\}$ назовём *устранимым*, если существует решение $Q = (q_0, \ldots, q_{m-1})$ системы (17), в котором $q_j = 0$ при $j \in J$. В частности можно говорить об устранимости одного символа. Операцию исключения какого-либо устранимого множества символов будем называть *приведением*. Операция частичного доопределения (и, в частности, операция исключения символов) не уменьшает энтропию источника [5]. При осуществлении операции приведения энтропия сохраняется.

Пусть теперь наряду с источником $S = (A, P)$, $A = \{a_T,\ T \subseteq M\}$, заданы множество $L = \{0, 1, \ldots, l-1\}$ и функция $F:\ M \to L$, и с множеством L связан нечёткий алфавит $B = \{b_U, U \subseteq L\}$. Функция F индуцирует отображение алфавитов $F:\ A \to B$, $F(a_T) = b_{F(T)}$, $F(T) = \{F(i), i \in T\}$, и, в частности, — отображение $F:\ A_0 \to B_0$, $F(a_i) = b_{F(i)}$, чётких алфавитов. Рассмотрим детерминированный преобразователь φ_F с входным и выходным алфавитами A и B соответственно, который переводит символы a_T в $b_{F(T)}$. Формально преобразоватеь описывается переходными вероятностями $p_{F(T)|T} = 1$ и $p_{T'|T} = 0$ для $T' \neq F(T)$. Результат преобразования $S\varphi_F$ будем обозначать через $F(S)$ и называть *функцией от источника* S, а само преобразование будем называть *функциональным*. Согласно определению имеем $F(S) = (B, P')$, где $P' = (p'_U, U \subseteq L)$, $p'_U = \sum_{T\colon F(T) = U} p_T$ (сумма по пустому множеству считается равной 0). Произведение $S \cdot F(S)$ представляет собой источник, порождающий пары $(a_T, F(a_T))$ с вероятностями p_T. Если $|L| = |M|$ и функция $F:\ M \to L$ является биекцией, источники S и $F(S)$ будем называть *идентичными*.

Пусть заданы нечёткие источники $S = (A, P)$, $A = \{a_T,\ T \subseteq M\}$, и $S' = (B, P')$, $B = \{b_U,\ U \subseteq L\}$. Будем называть их *эквивалентны-*

ми, если $|L| = |M|$ и существует биекция $F : M \to L$, при которой $p_T = p'_{F(T)}$, $T \subseteq M$. В отличие от свойства идентичности здесь совместное распределение источников S и S' роли не играет. Отметим, что два различных экземпляра одного источника эквивалентны, но не идентичны. Пара идентичных источников возникает, если распараллелить выход одного источника и, возможно, переименовать (без отождествления) на параллельном выходе чёткие символы (и в соответствии с этим — нечёткие).

Дальше будем говорить об операциях φ, имея ввиду операции, реализуемые соответствующими преобразователями. Операции размытия и функционального преобразования не увеличивают энтропию [5]. Имеет место следующий факт [5, 6].

Теорема 1. *Для нечётких источников S и $\hat{S}$ равенство $\mathcal{H}(S\hat{S}) = \mathcal{H}(S)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\hat{S}$ может быть получен из S последовательным применением операции приведения φ_0, функционального преобразования φ_1 и размытия φ_2, т. е. $\hat{S} = S\varphi_0\varphi_1\varphi_2$.*

3. Адекватные источники

Будем говорить, что источник S' *чётче* источника S, и записывать $S' \succeq S$, если существует операция φ частичного доопределения такая, что $S' = S\varphi$. Скажем, что источник S', $S' \succeq S$, *адекватен* источнику S, если для любого источника $\hat{S}$ справедливо равенство $\mathcal{H}(S'\hat{S}) = \mathcal{H}(S\hat{S})$. Источник $S'\hat{S} = S\varphi \cdot \hat{S}$ определен выше. Очевидно, что отношения чёткости $\succeq$ и адекватности являются частичными порядками (нестрогими). Легко видеть, что если источник S'_1 адекватен источнику S_1, то для любого S_2 источник S'_1S_2 адекватен источнику S_1S_2, и если, кроме того, S'_2 адекватен S_2, то $S'_1S'_2$ адекватен S_1S_2.

Лемма 2. *Если источник S' адекватен источнику S, то $\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(S)$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение SS идентичных источников. По теореме 1 имеем $\mathcal{H}(SS) = \mathcal{H}(S)$. Можно считать, что источник S получен из источника S' размытием. Поэтому в силу теоремы 1 имеем $\mathcal{H}(S'S) = \mathcal{H}(S')$. Учитывая, что S' адекватен S, получаем

$$\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(S'S) = \mathcal{H}(SS) = \mathcal{H}(S).$$

Лемма 2 доказана.

Пусть $S = (A, P)$ и $P = (p_T,\ T \subseteq M)$. Будем говорить, что *символ a_i мажорирует в S символ a_j*, $i, j \in M$, если для любого $T \subseteq M$ с $p_T > 0$ из $j \in T$ следует $i \in T$. Отношение мажорирования для источника S будем обозначать через $\mu(S)$ и записывать $a_i\mu(S)a_j$. Пусть φ — операция частичного доопределения источника S и произведению $S \cdot S\varphi$ соответствует совместное распределение $\{p_{TT'}\}$. Обозначим через $J = J(S, \varphi)$ множество таких $j \in M$, для которых существуют такие T и T', что $p_{TT'} > 0$ и $j \in T \setminus T'$. Скажем, что операция частичного доопределения φ *согласована с отношением мажорирования* $\mu(S)$, если для каждого $j \in J$ найдется такое $i \in M \setminus J$, что $a_i \mu(S) a_j$.

Если a_j мажорируется некоторым a_i, то $p_j = p(a_j) = 0$ и к источнику S применима операция исключения символа a_j. Она является операцией частичного доопределения, согласованной с $\mu(S)$. Отметим, что операция исключения мажорируемого символа может рассматриваться также как частный случай операции функционального преобразования $F(S)$, где $F(j) = i$, $F(u) = u$ при $u \neq j$. В общем случае исключение символа не сводится к функциональному преобразованию.

Лемма 3. *Если операция φ согласована с $\mu(S)$, то множество символов $\{a_j \mid j \in J,\ J = J(S, \varphi)\}$ может быть исключено из S и результатом исключения является источник, адекватный источнику S.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $T \subseteq M$, для которого $p_T > 0$. Покажем, что $T \setminus J$ непусто. Если $T \cap J = \varnothing$, то $T \setminus J = T \neq \varnothing$. Пусть $T \cap J \neq \varnothing$ и $j \in T \cap J$. По свойству операции φ найдется $i \in M \setminus J$ такое, что a_i мажорирует a_j. Согласно определению мажорирования i содержится в T и множество $T \setminus J$ непусто. Так как T произвольно, множество символов $\{a_j \mid j \in J\}$ может быть исключено из S. Полученный в результате исключения источник обозначим через S'.

Рассмотрим произведение $S\hat{S}$, где $\hat{S}$ — некоторый источник. Пусть он использует алфавит $B = \{b_U,\ u \subseteq L\}$. Образуем произведение $S'\hat{S}$ (см. выше).

Для $j \in J$ обозначим через i_j, $i_j \in M \setminus J$, индекс некоторого символа, мажорирующего a_j. Тогда $S'\hat{S}$ можно считать результатом функционального преобразования F источника $S\hat{S}$, где для любого $v \in L$

$$F(j, v) = \begin{cases} (i_j, v) & \text{при } j \in J, \\ (j, v) & \text{при } j \in M \setminus J. \end{cases}$$

Поскольку функциональное преобразование не увеличивает энтропию, справедливо равенство $\mathcal{H}(S'\hat{S}) \leqslant \mathcal{H}(S\hat{S})$. С другой стороны, $S'\hat{S}$ является результатом исключения символов. Учитывая, что исключение не уменьшает энтропию, приходим к равенству $\mathcal{H}(S'\hat{S}) = \mathcal{H}(S\hat{S})$, которое в силу произвольности $\hat{S}$ означает адекватность источника S' источнику S. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Исключение мажорируемого символа приводит к адек-*

ватному источнику.

Действительно, эта операция является частичным доопределением, согласованным с отношением мажорирования.

Следствие 2. *Всякий мажорируемый символ устраним.*

Этот факт вытекает из следствия 1 и леммы 2.

Лемма 4. *Если источник $S\varphi = S'$ адекватен источнику S, то из S в результате последовательного исключения мажорируемых символов может быть удалено множество $\{a_j \mid j \in J,\ J = J(S, \varphi)\}$, и полученный источник будет чётче источника S' и адекватен источнику S.*

Доказательство. Пусть совместное распределение источников S и S' из формулировки леммы задаётся вероятностями $p_{TT'}$. Возьмем $i \in J$ и рассмотрим некоторые $U \subseteq M, U' \subseteq M$ такие, что $p_{UU'} > 0$ и $i \in U \setminus U'$. Образуем чёткий источник S_i, доопределив символы a_T для всех T, содержащих i, символом a_i, а остальные a_T произвольными символами a_j, $j \in T$. Поскольку S размытее S_i, в силу теоремы 1 выполнено $\mathcal{H}(SS_i) = \mathcal{H}(S_i)$, что с учётом адекватности S' источнику S даёт $\mathcal{H}(S'S_i) = \mathcal{H}(S_i)$. Так как S_i — чёткий источник, к нему не применима операция приведения и по теореме 1 источник S' может быть получен из S_i с помощью некоторого функционального преобразования F и размытия. Пусть $F(i) = j$. Тогда $U' \supseteq F(U) = F(i) = \{j\}$. Отсюда и из соотношения $i \notin U'$ следует, что $j \neq i$.

Рассмотрим произвольное T такое, что $i \in T$ и $p_T > 0$, где p_T — вероятность порождения символа a_T источником S. Найдется T', для которого $p_{TT'} > 0$. Аналогично предыдущему выполнено $T' \supseteq F(T) = F(i) = \{j\}$ и потому $j \in T' \subseteq T$. Это означает, что j мажорирует i и по следствию 2 символ a_i устраним из S. Обозначим через $\hat{S}$ источник, полученный из S исключением a_i. По следствию 1 он адекватен источнику S.

Теперь рассмотрим некоторое такое T', что $p'_{T'} > 0$ (в источнике S'), и $i \in T'$. Найдется такое $T \supseteq T'$, что $p_{TT'} > 0$. Тогда $i \in T$ и по доказанному $j \in T'$. Таким образом, a_j мажорирует a_i в S' и символ a_i устраним из S'. Обозначим через $\hat{S}'$ источник, полученный в результате такого устранения. По следствию 1 он адекватен источнику S'. Убедимся, что $\hat{S}'$ чётче $\hat{S}$. Возьмем произвольные $T, T' \subseteq M \setminus \{i\}$. Вероятность $\hat{p}_{TT'}$ пары $(a_T, a_{T'})$ в $\hat{S}S'$ связана с её вероятностью в SS' следующим образом:

$$\hat{p}_{TT'} = p_{TT'} + p_{T\cup\{i\},T'} + p_{T,T'\cup\{i\}} + p_{T\cup\{i\},T'\cup\{i\}}.$$

Если включение $T' \subseteq T$ нарушено, то каждое слагаемое в правой части равно 0, а поэтому $\hat{p}_{TT'} = 0$. Это означает, что $\hat{S}' \succeq \hat{S}$. Отсюда и из того, что первые источники пар (S', S), $(\hat{S}', S')$ и $(\hat{S}, S)$ адекватны вторым, вытекает адекватность $\hat{S}'$ источнику $\hat{S}$. Легко видеть, что преобразованию, переводящему $\hat{S}$ в $\hat{S}'$, соответствует множество $\hat{J} = J \setminus \{i\}$.

Источники $\hat{S}$ и $\hat{S}'$ удовлетворяют условиям леммы. Заменив в предыдущих рассуждениях источники S, S' на $\hat{S}, \hat{S}'$, заключаем, что если множество $J \setminus \{i\}$ непусто и u —некоторый его элемент, то a_u устраним из $\hat{S}$ и $\hat{S}'$. В результате исключения a_u придем к новой паре источников, удовлетворяющей условиям леммы. Процесс повторяем до тех пор, пока не исчерпаем все J. После завершения получим пару источников с алфавитом $A = \{a_T \mid T \subseteq M \setminus J\}$. Легко понять, что они имеют совместное распределение $p_{TT} = 1$ и $p_{TU} = 0$ при $U \neq T$ и поэтому совпадают. Обозначим этот общий источник через S''. Поскольку S'' получен из источников S и S' последовательным исключением мажорируемых символов, он чётче S' и адекватен S. Лемма 4 доказана.

Следующее утверждение содержит полное описание преобразований, приводящих к адекватным источникам.

Теорема 2. *Если источник $S\varphi$ получен из источника S операцией частичного доопределения φ, то $S\varphi$ адекватен S тогда и только тогда, когда операция φ согласована с отношением мажорирования $\mu(S)$.*

Доказательство. 1. Пусть источник $S\varphi$ адекватен источнику S. Согласно лемме 4 путём последовательного исключения мажорируемых символов из S могут быть удалены все символы с индексами в $J = J(S, \varphi)$. Так как отношение $\mu(S)$ является частичным порядком, то для всякого символа a_j, $j \in J$, найдется мажорирующий его символ a_i, $i \in M \setminus J$. Следовательно, φ согласовано с $\mu(S)$.

2. Пусть преобразование φ частичного доопределения согласовано с $\mu(S)$. По лемме 3 из источника S в результате исключения множества символов $\{a_j \mid j \in J\}$ получается источник S', адекватный источнику S. Нетрудно видеть, что S' может быть получен из $S\varphi$ исключением символов (с индексами из J). С учётом этого имеем $S' \succeq S\varphi \succeq S$.

Пусть $\hat{S}$ — произвольный источник и задано произведение $S\hat{S}$. Тогда определены произведения $S\varphi \cdot \hat{S}$ и $S'\hat{S}$. Ясно, что $S'\hat{S} \succeq S\varphi \cdot \hat{S} \succeq S\hat{S}$. Поскольку с повышением чёткости энтропия не убывает и S' адекватен S, справедливы равенства $\mathcal{H}(S'\hat{S}) = \mathcal{H}(S\varphi \cdot \hat{S}) = \mathcal{H}(S\hat{S})$. Отсюда в силу произвольности $\hat{S}$ следует, что $S\varphi$ адекватен S. Теорема 2 доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A}(S)$ множество всех источников, адекватных источнику S. Множество максимальных по отношению $\succeq$ источников в $\mathfrak{A}(S)$ конечно, поскольку по лемме 4 они могут быть получены из S исключением символов.

Теорема 3. *Все максимально чёткие источники, адекватные источнику S, идентичны. Любой такой источник может быть получен из S последовательным исключением* (*в произвольном порядке*) *мажорируемых символов, пока это возможно.*

Доказательство. Символ a_i источника S назовём *строго мажорируемым*, если существует такой символ a_j, что a_j мажорирует a_i и a_i не мажорирует a_j. Символы, не являющиеся строго мажорируемыми, разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из символов a_i, индексы i которых входят в одну и ту же совокупность множеств T с $p_T > 0$. Из лемм 3 и 4 следует, что максимально чёткие адекватные источники не содержат мажорируемых символов и могут быть образованы из S последовательным исключением таких символов. При этом будут устранены все строго мажорируемые символы, а в каждом классе эквивалентности остальных символов будет оставлен один. С учётом (18) легко видеть, что такие источники идентичны. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 даёт эффективный алгоритм построения максимально чётких источников, адекватных заданному.

Дальше будем понимать адекватность с точностью до идентичности, т. е. говоря об адекватности S' источнику S, будем иметь ввиду, что S' идентичен некоторому источнику, адекватному S. Следующее утверждение можно рассматривать как аналог теоремы 1 для адекватных источников.

Теорема 4. *Источник S адекватен источнику $S\hat{S}$ тогда и только тогда, когда $\hat{S}$ может быть получен из S применением операций функционального преобразования φ_1 и размытия φ_2, т. е. $\hat{S} = S\varphi_1\varphi_2$.*

Доказательство. 1. Пусть источник $\hat{S}$ получен из источника S функциональным преобразованием F и размытием. Покажем, что при каждом i в произведении $S\hat{S}$ символ $(a_i, b_{F(i)})$ мажорирует любой символ (a_i, b_j).

Пусть $(i, j) \in T \times \hat{T}$ и $p_{T\hat{T}} = p(a_T, b_{\hat{T}}) > 0$. Преобразование F переводит T в $F(T)$. Поскольку размытие не уменьшает множеств индексов, выполнено включение $F(T) \subseteq \hat{T}$. Из $(i, j) \in T \times \hat{T}$ вытекает, что $i \in T$ и $F(i) \subseteq F(T) \subseteq \hat{T}$, т. е. $(i, F(i)) \in T \times \hat{T}$. Это означает, что символ $(a_i, b_{F(i)})$ мажорирует символ (a_i, b_j). Исключив из $S\hat{S}$ все символы (a_i, b_j), $j \neq F(i)$, получим источник, который по лемме 3 адекватен источнику $S\hat{S}$. Он идентичен источнику S, поскольку S может быть образован из него переименованием символов $(a_i, b_{F(i)})$ в a_i.

2. Пусть источник S адекватен источнику $S\hat{S}$. По лемме 2 они имеют равную энтропию и в соответствии с теоремой 1 источник $\hat{S}$ может быть получен из S некоторыми операциями приведения φ_0, функционального преобразования φ_1 и размытия φ_2. Обозначим через J множество индексов j символов a_j, исключённых в процессе приведения φ_0. Пусть функциональное преобразование φ_1 порождается функцией $F:\ M \setminus J \to L$. Распространим F на множество M следующим образом.

Для $i \in J$ обозначим через S_i чёткий источник, полученный из S доопределением, при котором символ a_T доопределяется до a_i в случае $i \in T$, а при $i \notin T$ доопределяется произвольным символом a_j, $j \in T$. По доказанному в пункте 1 теоремы S_i адекватен источнику S_iS. Учитывая, что $S\hat{S}$ адекватен источнику S, имеем

$$\mathcal{H}(S_i\hat{S}) = \mathcal{H}(S_iS\hat{S}) = \mathcal{H}(S_iS) = \mathcal{H}(S_i).$$

Поскольку источник S_i всюду определен, к нему не применима операция приведения и по теореме 1 источник $\hat{S}$ может быть получен из S_i некоторым функциональным преобразованием F_i и размытием. Положим $F(i) = F_i(i)$. Проделав это для всех $i \in J$, получим функцию $F:\ M \to L$. При этом если $i \in T$ и $p_{T\hat{T}} > 0$, то

$$F(i) = F_i(i) \in F_i(T) \subseteq \hat{T}. \tag{19}$$

Убедимся, что для так определенной функции F и произвольных T, $\hat{T}$, для которых $p_{T\hat{T}} > 0$, справедливо включение $F(T) \subseteq \hat{T}$. Так как размытие не увеличивает чёткость, то $F(T \setminus J) \subseteq \hat{T}$ и в случае $i \in T \setminus J$ имеют место включения

$$F(i) \in F(T \setminus J) \subseteq \hat{T}.$$

Они и соотношения (19), справедливые для $i \in T \cap J$, доказывают включение $F(T) \subseteq \hat{T}$, из которого следует, что источник $\hat{S}$ может быть получен из $F(S)$ операцией размытия. Теорема 4 доказана.

Пример 1. Пусть S_1 — некоторый чёткий источник в алфавите $\{0, 1\}$, S_2 получен из S_1 размытием и пусть $S = S_1S_2$. Алфавитом источника S является $\{(0,0), (1,1), (0,*), (1,*)\}$, где $*$ означает символ, доопределимый любым из символов 0 и 1. После переобозначения $(0,0) = a_0$, $(0,1) = a_1$, $(1,0) = a_2$, $(1,1) = a_3$ этот алфавит приобретает вид $A = \{a_0, a_3, a_{01}, a_{23}\}$, где указаны лишь символы, имеющие ненулевую вероятность. Предположим, что источник S в алфавите A задан исходно и не известно, каким образом он возник. Найдя по теореме 4 максимально чёткий адекватный источник путём исключения из S мажорируемых символов a_1 и a_2, получим чёткий источник в алфавите $\{a_0, a_3\}$, идентичный источнику S_1.

Приведем пример, показывающий, что область применимости теоремы 4 не ограничивается ситуациями из теоремы 4. Пусть произведение $S_1 S_2$ является источником в алфавите $\{(0,1),(1,*),(*,0)\}$. Легко видеть, что в этом случае ни один из источников S_1 и S_2 не может быть получен из другого функциональным преобразованием и размытием. Исключив согласно теореме 4 мажорируемые символы $(0,0)$ и $(1,1)$, придем к адекватному чёткому источнику в алфавите $\{(0,1),(1,0)\}$, из которого переименованием символов может быть образован идентичный чёткий источник в алфавите $\{0,1\}$.

4. Приведение нечётких источников

При решении задачи кодирования источников (вне связи с другими источниками) достаточно более слабого свойства, чем адекватность. Если $S' \succeq S$ и $\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(S)$, то будем говорить, что S' *полуадекватен* источнику S. Отношение полуадекватности представляет собой частичный порядок. Согласно лемме 2 всякий источник, адекватный некоторому источнику, полуадекватен последнему.

Следующее утверждение показывает, что для получения из исходного источника наилучших по чёткости полуадекватных источников можно ограничиться операцией исключения символов.

Теорема 5. *Если S' полуадекватен S, то из S путём исключения некоторых символов может быть получен источник S'', полуадекватный S и такой, что $S'' \succeq S'$.*

Доказательство. Пусть значение $\mathcal{H}(S')$ достигается на наборе Q, т. е. $\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(P', Q)$. С учётом равенств $p_T = \sum\limits_{T'} p_{TT'}$, $p'_{T'} = \sum\limits_{T} p_{TT'}$ и соотношений $T' \subseteq T$ в силу условий теоремы и определения энтропии (16) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(S') = \mathcal{H}(S) \leqslant -\sum_{T} p_T \log \sum_{j\in T} q_j = -\sum_{T,T'} p_{TT'} \log \sum_{j\in T} q_j \\ \leqslant -\sum_{T',T} p_{TT'} \log \sum_{j\in T'} q_j = -\sum_{T'} p'_{T'} \log \sum_{j\in T'} q_j = \mathcal{H}(P', Q) = \mathcal{H}(S').\end{aligned}$$

Из совпадения левой и правой частей следует, что здесь все неравенства обращаются в равенства. В частности, это означает, что на наборе Q

достигается $\mathcal{H}(S)$ (т. е. $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(P,Q)$), и для любого такого j, что

$$\exists T \exists T' (p_{TT'} > 0 \wedge j \in T \setminus T'),$$

$q_j = 0$. Множество всех j, удовлетворяющих указанному условию, обозначим через J. Очевидно, что $p_{TT'} > 0 \Longrightarrow T \setminus J = T' \setminus J$.

Пусть S'' — источник, образованный из S исключением символов a_j, $j \in J$. Источник S'' задаётся набором вероятностей (18). В силу сказанного имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(S) &= -\sum_T p_T \log \sum_{j \in T} q_j = -\sum_T p_T \log \sum_{j \in T \setminus J} q_j \\ &= -\sum_{U \subseteq M \setminus J} \sum_{T\colon T \setminus J = U} p_T \log \sum_{j \in U} q_j = -\sum_U p''_U \log \sum_{j \in U} q_j \geqslant \mathcal{H}(S'').\end{aligned}$$

Так как S'' чётче S, то $\mathcal{H}(S'') \geqslant \mathcal{H}(S)$. Поэтому $\mathcal{H}(S'') = \mathcal{H}(S)$ и S'' полуадекватен S.

Источник S'' получается из S путём детерминированной замены символов a_T на $a_{T \setminus J}$. Легко видеть, что тот же источник может быть получен путём исключения из S' символов a_j с индексами $j \in J$. Поэтому S'' чётче S'. Теорема 5 доказана.

Для источника S обозначим через $\mathfrak{A}'(S)$ множество всех источников S', полуадекватных источнику S. Из теоремы 5 следует, что в $\mathfrak{A}'(S)$ имеется лишь конечное число максимальных по отношению $\succeq$ источников и они могут быть получены из S последовательным исключением устранимых символов. Источник, в котором отсутствуют устранимые символы, будем называть *приведённым*. Максимальные по чёткости полуадекватные источники являются приведёнными и наоборот.

Проиллюстрируем возможность использования приведения для кодирования нечётких источников.

Пример 2. Пусть $M = \{0, 1, 2, 3\}$ и источник $S = (A, P)$ задан набором вероятностей $p_{01} = p_{12} = p_{23} = p_{03} = 1/4$ и $p_T = 0$ для остальных $T \subseteq M$. Используя лемму 1, можно проверить, что при любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, набор вероятностей $q_0 = q_2 = \alpha$, $q_1 = q_3 = 1/2 - \alpha$ минимизирует функцию $\mathcal{H}(P,Q)$. Взяв $\alpha = 1/4$, получим минимизирующий набор $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 1/4$, в соответствии с которым для асимптотически наилучшего кодирования используются все 4 символа и источник S должен кодироваться как нечёткий.

Выбрав другое значение $\alpha = 0$, получим $q_0 = q_2 = 0$. Символы a_0 и a_2 устранимы и в результате их исключения возникнет приведённый чёткий источник $S' = (A', P')$ с $A' = \{a_1, a_3\}$, $p_1 = p_3 = 1/2$. При $\alpha = 1/2$ аналогично исключатся символы a_1 и a_3 и получается чёткий источник S'' с $A'' = \{a_0, a_2\}$, $p_0 = p_2 = 1/2$. Используя вместо исходного нечёткого источника S один из полученных чётких источников, можно эффективно решить задачу сжатия для S и тем самым обойти трудности, возникающие при кодировании нечётких источников.

Приведённые источники S' и S'' эквивалентны, но не идентичны. Более того, они независимы, так как $p_{01} = p_{12} = p_{23} = p_{03} = 1/4$. Напомним, что по теореме 3 максимально чёткий адекватный источник единствен с точностью до идентичности.

Следующая теорема показывает, что без ухудшения качества процедуру приведения можно проводить в два этапа: сначала с помощью простого алгоритма из теоремы 4 построить максимальный адекватный источник, а затем осуществить его приведение.

Теорема 6. *Если S' — приведённый источник, полученный из S, а $\hat{S}$ — произвольный максимальный источник, адекватный источнику S, то путём приведения источника $\hat{S}$ можно получить источник, идентичный источнику S'.*

Доказательство. Пусть Q — набор, на котором достигается величина $\mathcal{H}(S)$ в (16), и который соответствует приведённому источнику S'. В нем $q_i = 0$ для всех a_i, устраненных в S'. Применим к Q лемму 1. Если символ a_u строго мажорируется символом a_v, то левая часть неравенства 17 при $i = v$ включает все члены из неравенства для u и некоторые дополнительные положительные члены. Поэтому неравенство для u является строгим и, следовательно, $q_u = 0$. Это означает, что в S' исключены все строго мажорируемые символы. Из каждого класса эквивалентности символов в S' присутствует не более одного, ибо при наличии эквивалентных символов один из них устраним по следствию 2, что противоречит приведённости S'. Пусть $\{a_j \mid j \in J\}$ – множество символов, исключённых из S'. Если среди оставшихся символов $a_j,\ j \in M \setminus J$, нет символов из некоторых классов эквивалентности, то, добавив по одному символу из каждого класса, получим множество $\{a_j \mid j \in M \setminus J',\ J' \subseteq J\}$. Так как символы можно исключать в любом порядке, то сначала исключая символы $a_j,\ j \in J'$, получаем максимальный адекватный источник S'', а затем устраняя из S'' символы $a_j,\ j \in J \setminus J'$, получим S'. По теореме 4 источники S'' и $\hat{S}$ идентичны, т. е. могут быть получены друг из друга переименованием символов. Если в $\hat{S}$ исключить символы, соответствующие символам $a_j,\ j \in J \setminus J'$, источника S'', получим источник, идентичный источнику S'. Теорема 6 доказана.

Более подробно рассмотрим случай, когда в результате приведения заданного источника возникают чёткие источники.

Теорема 7. *Все чёткие источники, возникающие в результате приведения заданного источника* S *(если они есть), эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $S = (A, P)$ и $P = (p_T,\, T \in M)$. Для набора $Q = (q_i,\, i \in M)$ положим $\sigma_T(Q) = \sum\limits_{i \in T} q_i$. Тогда функция (15) приобретет вид

$$\mathcal{H}(P, Q) = -\sum_T p_T \log \sigma_T(Q). \tag{20}$$

Покажем, что для любых наборов Q и Q', минимизирующих $\mathcal{H}(P, Q)$, при любом T с $p_T > 0$ справедливо равенство $\sigma_T(Q) = \sigma_T(Q')$ (дальше будем рассматривать только такие T, для которых $p_T > 0$). Зададимся некоторым μ, $0 < \mu < 1$. В силу вогнутости логарифмической функции справедливо неравенство

$$\log \sigma_T(\mu Q + (1-\mu)Q') \geqslant \mu \log \sigma_T(Q) + (1-\mu) \log \sigma_T(Q'). \tag{21}$$

Поэтому в соответствии с (20) имеем

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(P, \mu Q + (1-\mu)Q') \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mu \mathcal{H}(P, Q) + (1-\mu)\mathcal{H}(P, Q') = \mu \mathcal{H}(P) + (1-\mu)\mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(P).\end{aligned}$$

Поскольку значение $\mathcal{H}(P)$ минимально, неравенство обращается в равенство и поэтому в (21) также имеют место равенства. Из них в силу строгой вогнутости логарифмической функции следует, что $\sigma_T(Q) = \sigma_T(Q')$. Это общее значение обозначим через σ_T.

Пусть S' и S'' — чёткие источники, полученные приведением источника S, а Q' и Q'' — минимизирующие наборы функции $\mathcal{H}(P, Q)$, которым соответствуют источники S' и S''. Поскольку источники чёткие, в каждую из сумм $\sigma_T(Q')$ и $\sigma_T(Q'')$ входит по одному ненулевому слагаемому q'_i и q''_j. Поэтому $\sigma_T = q'_i = q''_j$. Это означает, что ненулевыми компонентами наборов Q' и являются одни и те же числа, причем все σ_T присутствуют в обоих наборах. Покажем, что каждое σ_T встречается в них одинаковое число раз. Предположим, что некоторое σ_{T_0} входит в Q' и Q'' соответственно m' и m'' раз и пусть, для определенности, $m' > m''$. Образуем из Q' набор $\hat{Q}$ следующим образом. Сначала заменим нулями все компоненты q'_i, равные σ_{T_0}, а затем в полученном наборе все компоненты, равные σ_{T_0}, и нулевые компоненты заменим на $m'\sigma_{T_0}/m''$. Сумма компонент набора $\hat{Q}$ равна 1. Набор σ соответствует чёткому источнику, в котором символы a_T с $\sigma_T = \sigma_{T_0}$ доопределены как в S'', а остальные символы a_T — как в S'. При этом

$$\sigma_T(\hat{Q}) = \begin{cases} \sigma_T = \sigma_T(Q'), & \text{если } \sigma_T \neq \sigma_{T_0}, \\ m'\sigma_T/m'' > \sigma_T(Q'), & \text{если } \sigma_T = \sigma_{T_0}. \end{cases}$$

Отсюда и из (20) следует, что $\mathcal{H}(P, Q') > \mathcal{H}(P, \hat{Q})$. Это противоречит тому, что Q' минимизирует $\mathcal{H}(P, Q)$. Таким образом, наборы Q' и Q'' могут быть получены друг из друга перестановкой компонент.

Обозначим через Q'_0 и Q''_0 наборы, полученные из наборов Q' и Q'' удалением нулевых компонент. Легко понять, что они являются минимизирующими для чётких источников S' и S'', т. е. $\mathcal{H}(P', Q'_0) = \mathcal{H}(S')$ и $\mathcal{H}(P'', Q''_0) = \mathcal{H}(S'')$. С учётом того, что для чётких источников функция $\mathcal{H}(P, Q)$ имеет вид $-\sum\limits_i p_i \log q_i$ и её минимум достигается в единственной точке $q_i = p_i$ при всех i, получаем $P' = Q'_0$, $P'' = Q''_0$. Отсюда следует, что наборы вероятностей P' и P'' различаются лишь расстановкой компонент. Поэтому источники S' и S'' эквивалентны. Теорема 7 доказана.

Теорема 7 может быть проиллюстрирована примером 2, где возникшие в результате приведения чёткие источники S' и S'', не являясь идентичными, оказались эквивалентными.

Теорема 7 касается лишь чётких приведённых источников. Следующий пример показывает, что для одного и того же источника могут одновременно существовать и чёткие и нечёткие приведённые источники.

Пример 3. Пусть $M = \{0, 1, \ldots, 8\}$, и пусть задана система множеств $T_1 = \{0, 3, 4\}$, $T_2 = \{1, 4, 5\}$, $T_3 = \{2, 3, 5\}$, $T_4 = \{0, 6, 7\}$, $T_5 = \{1, 7, 8\}$ и $T_6 = \{2, 6, 8\}$. Определим источник $S = (A, P)$, $A = \{a_T, T \subseteq M\}$, положив $p_{T_1} = \cdots = p_{T_6} = 1/6$ и $p_T = 0$ для остальных T. Непосредственно нетрудно проверить, что наборы $Q' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0)$ и $Q'' = (0, 0, 0, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$ удовлетворяют (с равенством) системе соотношений (17) для источника S и поэтому они являются минимизирующими. Отметим, что при этом $\sigma_{T_1} = \cdots = \sigma_{T_6} = 1/3$. Исключив из Q' символы $a_3, \ldots, a_8$, получим чёткий источник $S' = (A', P')$, где $A' = \{a_0, a_1, a_2\}$. Устранение в соответствии с Q'' символов a_0, a_1, a_2 даёт нечёткий источник $S'' = (A'', P'')$, где $A'' = \{a_{34}, a_{45}, a_{35}, a_{67}, a_{78}, a_{68}\}$. Он является приведённым, поскольку не содержит устранимых символов. Допустив, например, что символ a_3 устраним, из равенств $\sigma_{T_1} = q_0 + q_3 + q_4 = 1/3$ и $\sigma_{T_3} = q_2 + q_3 + q_5 = 1/3$ при $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ находим $q_4 = q_5 = 1/3$, что противоречит равенству $\sigma_{T_2} = q_1 + q_4 + q_5 = 1/3$.

5. Оценки числа приведённых источников

Из теоремы 7 следует, что алфавиты всех чётких источников, полученных из S приведением, состоят из одинакового числа символов, которое обозначим через $t(S)$. Число неидентичных чётких источников, которые могут быть получены приведением источника S, обозначим через $r(S)$.

Теорема 8. *При любых m и t таких, что $m > t \geqslant 2$, существует источник $S = (A, P)$, $A = \{a_T,\, T \subseteq M\}$, для которого $|M| = m$, $t(S) = t$ и $r(S) = \lfloor m/t \rfloor^{\lfloor t/2 \rfloor}$.*

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай нечётного t. Положим $k = \lfloor t/2 \rfloor$ и представим m в виде $m = 2kv + w + 1$, где $w < 2v$. Тогда $M = \{0, 1, \ldots, 2kv + w\}$.

Введём обозначения: $i \boxplus j = i + j \pmod{2k}$, $i \boxminus j = i - j \pmod{2k}$. С каждым s, $0 \leqslant s \leqslant 2k-1$, свяжем множество $T_s = \{s, s \boxplus 1, \ldots, s \boxplus (k-1)\}$. Для множества $T \subseteq M$ и натурального числа h положим $T + h = \{i + h \mid i \in T\}$. Введём множества $T_s^{(l)} = T_s + 2kl$, $0 \leqslant l \leqslant v - 1$ и, кроме того, положим $T' = \{2kv\}$, $T'' = \{2kv, 2kv + 1, \ldots, 2kv + w\}$.

Зададимся некоторыми α и β, $0 < \beta < \alpha < 1$, и построим источник S в алфавите $A = \{a_T,\ T \subseteq M\}$, положив

$$\begin{cases} p_{T_s^{(l)}} = \dfrac{1-\alpha}{2kv}, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 2k-1, \quad 0 \leqslant l \leqslant u-1, \\ p_{T'} = \alpha - \beta, & \text{если } p_{T''} = \beta, \\ p_T = 0 & \text{для остальных } T \subseteq M. \end{cases}$$

Для источника S выпишем систему неравенств (17). Нетрудно видеть, что элемент i, $0 \leqslant i \leqslant 2k-1$, содержится в множествах $T_{i \boxminus u}$, $u = 0, 1, \ldots, k-1$. Поэтому $i + 2kl$ принадлежит множествам $T_{i \boxminus u}^{(l)}$ и система (17) приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{2kv} \displaystyle\sum_{u=0}^{k-1} \frac{1}{\displaystyle\sum_{j \in T_{i \boxminus u}^{(l)}} q_j} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2k-1, \quad 0 \leqslant l \leqslant v-1, \\ \dfrac{\alpha - \beta}{q_{2kv}} + \dfrac{\beta}{\displaystyle\sum_{j=0}^{w} q_{2kv+j}} \leqslant 1, \quad \dfrac{\beta}{\displaystyle\sum_{j=0}^{w} q_{2kv+j}} \leqslant 1. \end{cases}$$

При каждом l, $0 \leqslant l \leqslant v-1$, выберем некоторое число i_l, $0 \leqslant i_l \leqslant k-1$, и с вектором $\mathbf{i} = (i_0, i_1, \ldots, i_{v-1})$ свяжем набор вероятностей $Q_{\mathbf{i}} =$

$(q_0, q_1, \ldots, q_{2kv+w})$, положив

$$q_i = \begin{cases} (1-\alpha)/(2v), & \text{если } i = 2kl + i_l,\ 0 \leqslant l \leqslant v-1, \\ (1-\alpha)/(2v), & \text{если } i = 2kl + i_l + k,\ 0 \leqslant l \leqslant v-1, \\ \alpha, & \text{если } i = 2kv, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В каждом множестве $T_s^{(l)}$, $s = 0, 1, \ldots 2k-1$, содержится ровно один из элементов $2kl + i_l$, $2kl + i_l + k$ и нет других i с ненулевыми q_i. Поэтому $\sum\limits_{j \in T_s^{(l)}} q_j = (1-\alpha)/(2v)$, левые части неравенств, относящихся к переменным q_i, $0 \leqslant i \leqslant 2kv-1$, принимают значения $(1-\alpha)/(2kv) \cdot k \cdot 2v/(1-\alpha) = 1$ и эти неравенства выполняются как равенства. Левая часть неравенства, относящегося к переменной q_{2kv}, имеет вид $(\alpha-\beta)/\alpha + \beta/\alpha = 1$, а для переменных $q_{2kv+1}, \ldots, q_{2kv+v}$ левые части неравенств строго меньше 1. В силу леммы 1 это означает, что набор $Q_{\mathbf{i}}$ минимизирует функцию $\mathcal{H}(P, Q)$.

Исключив символы a_j с нулевыми q_j, получаем чёткий источник $S_{\mathbf{i}}$, в котором символы $a_{T_s^{(l)}}$ при различных s доопределены одним из символов a_{2kl+i_l} и a_{2kl+i_l+k}, а $a_{T'}$ и $a_{T''}$ — символом a_{2kv}. При разных $\mathbf{i}$ источники $S_{\mathbf{i}}$ не идентичны. Число переменных источника $S_{\mathbf{i}}$ равно $2v+1 = t$, а число источников равно k^v. Учитывая, что

$$v = \left\lfloor \frac{m-1}{2k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m-1}{t-1} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor,$$

получаем утверждение теоремы.

2. При чётном t в конструкцию необходимо внести следующие изменения. Число m представляется в виде $m = 2kv + w$, $w < 2v$. Множества $T_s^{(l)}$, исключая $T_0^{(0)}$, строятся как прежде, а к $T_0^{(0)}$ добавляются элементы $2kv, 2kv+1, \ldots, 2kv+w$ (множества T' и T'' не образуются). Вероятности $p_{T_s^{(l)}}$ для всех построенных множеств полагаются равными $1/(2kv)$. Поскольку символы с индексами $i = 2kv, 2kv+1, \ldots, 2kv+w$ мажорируются любым символом из $T_0^{(0)}$, в минимизирующем наборе им соответствуют нулевые q_i. Если эти значения подставить в неравенства вида (17), получим неравенства, возникающие в нечётном случае при $\alpha = 0$. Дальше рассуждаем аналогично нечётному случаю. Теорема 8 доказана.

Будем рассматривать источники в алфавите $A = \{a_T, |\ T \subseteq M\}$, $|M| = m$. При $t \leqslant m$ положим $r(m,t) = \max\limits_{S:\, t(S) \leqslant t} r(S)$. Через $r(m)$ обозначим максимум $r(S)$ по всем источникам S, т. е. $r(m) = r(m,m)$. Через

$R(m,t)$ обозначим максимальное число приведённых источников (в том числе нечётких), которые содержат не более t неисключённых символов и образованы из одного источника, а через $R(m)$ — величину $R(m,m)$. Множества неисключённых символов различных приведённых источников не сравнимы по включению. Поэтому в силу неравенства Любеля–Мешалкина (см. дополнение в [8]) справедливы неравенства

$$R(m,t) \leqslant \binom{m}{t}, \quad R(m) \leqslant \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}. \tag{22}$$

Теорема 9. 1. *Если $t \to \infty$ и $m/t \to \infty$, то*

$$\frac{1}{2} t \log \frac{m}{t} \lesssim \log r(m,t) \leqslant \log R(m,t) \lesssim t \log \frac{m}{t}.$$

2. *При любом достаточно большом m*

$$0{,}264m < \log r(m) \leqslant \log R(m) < m.$$

Доказательство. В силу теоремы 8 имеем

$$\lfloor t/2 \rfloor \log \lfloor m/t \rfloor \leqslant \log r(m,t) \leqslant \log R(m,t). \tag{23}$$

Принимая во внимание условия на параметры, приходим к требуемой нижней оценке для $\log r(m,t)$. Нижнюю оценку для $\log r(m)$ получаем при $t = \lfloor m/3 \rfloor$ с учётом неравенства $(\log 3)/6 > 0{,}264$.

Из (22) следует, что

$$\log R(m,t) \leqslant mH(t/m), \tag{24}$$

где $H(x) = -x \log x - (1-x)\log(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поскольку $t/m \to 0$ и $H(x) \sim x \log(1/x)$ при $x \to 0$, то из (24) следует нужная верхняя оценка для $R(m,t)$. Теорема 9 доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что при любых значениях параметра t, $2 \leqslant t \leqslant m/2$, отношение оценок (24) и (23) ограничено абсолютной константой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонгард М. М. О понятии ”полезная информация” // Проблемы кибернетики. Вып. 9. М.: Физматгиз, 1963. С. 71–102.

2. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Советское радио, 1974.

3. **Колмогоров А. Н.** Три подхода к определению понятия "количество информации" // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1, вып. 1. С. 3–11.

4. **Потапов В. Н.** Обзор методов неискажающего кодирования дискретных источников // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 49–91.

5. **Шоломов Л. А.** Сжатие частично определенной информации // Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. М.: Физматлит, 2004. С. 385–399.

6. **Шоломов Л. А.** Кодирование частично-определенных дискретных источников без памяти // Доклады РАН. 2004. Т. 397, № 2. С. 178–180.

7. **Шоломов Л. А.** Энтропийные свойства частично-определенной информации // Материалы XV Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем". Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2004. С. 114–118.

8. **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.

Адрес автора:

Институт системного анализа РАН,
пр. 60–летия Октября, 9,
117312 Москва, Россия.
E-mail: sholomov@isa.ru

Статья поступила
30 мая 2005 г.