ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2005. Серия 1. Том 12, № 4, 3–22

УДК 519.71

О ГРАФАХ БЕЗ 3-ЛАП С НЕКЛИКОВЫМИ μ-ПОДГРАФАМИ

И. А. Вакула, В. В. Кабанов

Исследуются связные графы, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2 друг от друга, лежат в порождённом 4-цикле. Доказывается, что:
1) если такой граф не содержит порождённых $K_{1,3}$ подграфов, редуцирован и содержит 4-коклику, то он является рёберным графом;
2) если такой граф является рёберным, то он является рёберным графом некоторого полного многодольного графа.

Введение

Мы рассматриваем конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Пусть Γ — граф с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством рёбер $E(\Gamma)$. Будем писать $x \sim y$ и говорить, что вершины x и y смежны, если $\{x, y\}$ ребро из $E(\Gamma)$. Далее всюду, если не оговорено противное, подграф из Γ будет означать порождённый подграф графа Γ, т. е. подграф, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они смежны в Γ. Если a — вершина графа Γ, то через $[a]$ будем обозначать *окрестность вершины* a, т. е. множество вершин графа Γ, смежных с a, а через $a^{\perp}$ — объединение $[a] \cup \{a\}$, которое назовём *замкнутой окрестностью*. Для двух несмежных вершин a, b графа Γ положим $M(a, b) = a^{\perp} \cap b^{\perp}$. Подграф, порождённый множеством $M(a, b)$, будем называть *μ-подграфом* с вершинами a и b, если они находятся на расстоянии два в Γ. Для двух множеств $V_1, V_2 \subseteq V(\Gamma)$ будем писать $V_1 \not\approx V_2$, если замкнутая окрестность любой вершины из V_1 не пересекается с V_2. В случае, когда V_i одноэлементно, фигурные скобки в его записи будем опускать. Заметим, что в случае, когда оба множества одноэлементны и различны, отношение $\not\approx$ совпадает с отношением $\not\sim$, т. е. с отношением несмежности на множестве вершин графа. Кроме некоторых особо оговоренных случаев мы рассматриваем только порождённые подграфы. Для удобства мы часто используем одно и то же обозначение для подмножества вершин графа и порождённого им подграфа.

Пусть x и y вершины графа Γ. Положим $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x^{\perp} = y^{\perp}$. Легко видеть, что $\equiv$ является отношением эквивалентности. Фактор-граф $\overline{\Gamma}$ графа Γ по отношению $\equiv$ будем называть *редукцией* графа Γ, а граф, изоморфный редукции некоторого графа, — *редуцированным*. Для графа Γ рассмотрим Γ^* — граф, полученный из Γ добавлением к нему одной вершины a такой, что в Γ^* выполняется равенство $a^{\perp} = b^{\perp}$ для некоторой вершины b из Γ. Граф Δ, полученный из Γ посредством конечного числа таких операций, называется *кликовым расширением* графа Γ. Нетрудно заметить, что если граф Γ был редуцированным, то он изоморфен редукции $\overline{\Delta}$ графа Δ. Также ясно, что любой нередуцированный граф изоморфен некоторому кликовому расширению своей редукции.

Рёберный граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ графа Γ — это граф на ребрах графа Γ, причем два ребра смежны в $\mathcal{L}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда они имеют общую вершину.

Полный n-вершинный граф будем обозначать через K_n. Тогда вполне несвязный граф с n вершинами есть дополнение графа K_n. Подграф H графа Γ назовём *кликой*, если H — полный, *кокликой*, если H — вполне несвязный. Полный многодольный граф с долями, состоящими из $m_1, m_2, \ldots, m_k$ вершин, где $k \geqslant 2$, обозначим через $\mathrm{K}_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$. Под 3-*лапой* будем понимать граф $\mathrm{K}_{1,3}$. Треугольным графом $T(n)$ при $n \geqslant 2$ называется граф $\mathcal{L}(\mathrm{K}_n)$, а $(m \times n)$-решёткой — граф $\mathcal{L}(\mathrm{K}_{m,n})$. *Путь* на n вершинах обозначается через P_n. Для двух вершин x и y графа Γ обозначим через $d(x,y)$ расстояние между ними в Γ. *Радиусом* связного графа Γ называется число $r(G) = \min\limits_{x\in\Gamma} \max\limits_{y\in\Gamma} d(x,y)$. Радиус несвязного графа считаем бесконечным.

Графы без 3-лап с несвязными μ-подграфами изучали А. Брауэр и М. Нумата [6]. Они получили полное описание всех таких графов, причем не только с конечным числом вершин. В частности, если граф является конечным и содержит 3-коклику, то он является $(m \times n)$-решёткой.

Для случая, когда граф связен и содержит 3-коклику, этот результат был обобщен В. В. Кабановым в [2]. При этом вместо условия несвязности всех μ-подграфов требуется, чтобы все μ-подграфы имели радиус больше 1, т. е. чтобы в μ-подграфе были две несмежные вершины.

В. В. Кабановым было доказано, что связный редуцированный граф содержит 3-коклику, а любой его μ-подграф имеет радиус больше 1 тогда и только тогда, когда он является либо треугольным графом $T(n)$, $n \geqslant 6$, либо $(m \times n)$-решёткой, $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 3$, либо графом Шлефли. Граф Шлефли — это единственный сильно-регулярный граф с парамет-

рами $(27, 16, 10, 8)$.

Рассмотрим следующие условия, налагаемые на граф Γ:

(i) *в* Γ *нет* 3*-лап*;

(ii) *любые две вершины, находящиеся в* Γ *на расстоянии* 2 *друг от друга, лежат в порождённом* 4*-цикле*;

(iii) *в* Γ *содержится* 4*-коклика.*

(iv) *для любых вершин* a, b *графа* Γ *условие* $a^{\perp} = b^{\perp}$ *влечёт равенство* $a = b$.

Понятно, что любое кликовое расширение графа одновременно с ним удовлетворяет или не удовлетворяет условиям (i)–(iii). Это означает, что можно ограничиться изучением только редуцированных графов с условиями (i)–(iii).

Заметим, что условие (i) равносильно отсутствию в графе 3-коклик внутри окрестности любой вершины. Другими словами, среди любых трёх вершин, находящихся в окрестности некоторой вершины, по крайней мере две вершины смежны. Понятно также, что условие (ii) равносильно условию: любой μ-подграф графа Γ не является кликой. Поэтому условие (ii) более общее чем условие из [2].

В настоящей статье исследуется классификация графов, удовлетворяющих условиям (i)–(iv). В ней доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если связный граф* Γ *удовлетворяет условиям* (i)–(iv)*, то* Γ *является рёберным графом.*

Теорема 2. *Если связный рёберный граф* Γ *удовлетворяет условию* (ii)*, то* Γ *является рёберным графом полного многодольного графа.*

Эти теоремы дают описание графов, содержащих 4-коклику и удовлетворяющих условиям (i)–(iv).

Конечно, хотелось бы избавиться от условия (iii). Однако имеются примеры таких графов без 4-коклик, которые удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iv), не являются рёберными графами и содержат 3-коклику. Пример такого графа имеется в [2]. Этот граф является графом Шлефли; он не содержит 4-коклик и является единственным сильно регулярным графом с параметрами (27, 16, 10, 8). Путём компьютерного поиска в [4] найдено довольно много других примеров таких графов. Полная классификация графов, удовлетворяющих условиям (i), (ii) и (iv), пока неизвестна. Важный шаг в нахождении такой классификации сделан И. А. Вакулой в работе [1], в которой изучаются графы, не содержащие 4-коклик и содержащие 3-коклику, которая вместе с μ-подграфами своих вершин не порождает весь граф. Таким образом, настоящая статья и

статья [1] сводят решение проблемы о классификации графов к изучению графов, в которых любая 3-коклика вместе с μ-подграфами своих вершин порождает весь граф, и к классификации графов без 3-коклик.

1. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть* Γ *— связный граф без 3-лап.*

(1) *Если* a, b *— несмежные вершины в* Γ*, то для любой вершины* x *из* $M(a,b)$ *выполнено включение* $x^\perp \subseteq a^\perp \cup b^\perp$.

(2) *Если вершины* a, b *и* y *попарно несмежны в* Γ*, то*

$$M(a, y) \cap M(b, y) = \varnothing.$$

(3) *Если две пары несмежных вершин* a, b *и* c, d *порождают 4-цикл, то* $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$.

Доказательство. (1) Допустим, что $x \in M(a,b) = a^\perp \cap b^\perp$ и $v \in x^\perp \setminus (a^\perp \cup b^\perp)$. Тогда вершины x, a, b, v порождают 3-лапу.

(2) Пусть $v \in M(a,y) \cap M(b,y)$. Тогда $v \in [a] \cap [b] \cap [y]$ и v, a, b, y порождают 3-лапу.

(3) По условию $a, b \in M(c,d)$. Тогда из первого утверждения леммы следует, что $a^\perp \cup b^\perp \subseteq c^\perp \cup d^\perp$ и $c^\perp \cup d^\perp \subseteq a^\perp \cup b^\perp$. Лемма 1 доказана.

Соотношение окрестностей вершин порождённого 4-цикла из леммы 1 назовём *прямоугольным* соотношением.

Пусть до конца следующего раздела Γ — связный граф без 3-лап с некликовыми μ-подграфами.

Лемма 2. *Диаметр графа* Γ *не превосходит* 2.

Доказательство. Допустим, что диаметр графа Γ больше 2. Тогда в Γ есть путь $v_1v_2v_3v_4$ такой, что $d(v_1, v_4) = 3$. По условию в $M(v_1, v_3)$ имеются несмежные вершины w_1, w_2. Поскольку в Γ нет 3-лап, то $v_4^\perp \cap \{w_1, w_2\} \neq \varnothing$, что противоречит условию $d(v_1, v_4) = 3$. Отсюда, учитывая связность Γ, следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть вершины* a, b *и* c *в графе* Γ *попарно несмежны, вершина* d *смежна с вершиной* a *и несмежна с вершинами* b *и* c*. Тогда* $a^\perp = d^\perp$.

Доказательство. Пусть y и $\widetilde{y}$ — несмежные вершины из $M(a,b) \cap d^\perp$. В силу прямоугольного соотношения имеем $y^\perp \cup \widetilde{y}^\perp = a^\perp \cup b^\perp = d^\perp \cup b^\perp$. Значит, $a^\perp \setminus b^\perp = d^\perp \setminus b^\perp$. По второму утверждению первой леммы имеем $M(b,c) \cap M(a,c) = M(b,c) \cap M(d,c) = \varnothing$. Отсюда следует, что $b \not\approx M(a,c) \cup M(d,c)$. Следовательно, $M(a,c) = M(d,c)$. По условию в $M(a,c)$ также есть пара несмежных вершин. Теперь как и выше имеем

$M(a,b) = M(d,b)$, так как $a^\perp \setminus b^\perp = d^\perp \setminus b^\perp$ и b не смежна с a и d. Поэтому $a^\perp = d^\perp$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть a, b и c — попарно несмежные вершины в графе Γ, x и y — смежные вершины в Γ, лежащие в μ-подграфе с вершинами a и b. Если $x^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c)) = y^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c))$, то $x^\perp = y^\perp$.*

Доказательство. По условию $x^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c)) = y^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c))$, а по первому утверждению леммы 1 имеем $x^\perp \subseteq a^\perp \cup b^\perp$ и $y^\perp \subseteq a^\perp \cup b^\perp$. Следовательно, $M(x,c) = M(y,c)$. В $M(x,c)$ имеются две несмежные вершины d и f. Из прямоугольного соотношения следует, что $y^\perp \cup c^\perp = d^\perp \cup f^\perp = x^\perp \cup c^\perp$. Следовательно, вне окрестности вершины c вершины x и y смежны с одними и теми же вершинами. Так как x и y смежны, то $x^\perp = (x^\perp \setminus c^\perp) \cup M(x,c) = (y^\perp \setminus c^\perp) \cup M(y,c) = y^\perp$. Лемма 4 доказана.

Будем говорить, что множества B и C *расщепляют* множество A, если $A \subseteq B \cup C$ и $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Лемма 5. *Пусть граф Γ редуцирован и пусть a, b и c — попарно несмежные вершины в Γ.*

(1) *Если u, v — несмежные вершины в $M(a,b)$, то $[u]$ и $[v]$ расщепляют $M(b,c)$.*

(2) *$M(a,b)$ является полным многодольным графом, в каждой доле которого имеется не более двух вершин.*

Доказательство. (1) Первое утверждение следует из прямоугольного соотношения для пар вершин u, v и a, b, а второе — из второго утверждения леммы 1.

(2) По лемме 2 граф Γ имеет диаметр два. Значит, множество вершин в $M(a,b)$ не пусто. Теперь достаточно доказать, что любые три вершины в $M(a,b)$ соединяются не менее чем двумя рёбрами. Пусть x, y, z — различные вершины из $M(a,b)$, причём z не смежна с x и y. Тогда, во-первых, $\{x,y\}$ — ребро, а во-вторых, по первому утверждению леммы окрестности вершин x, z расщепляют $M(a,c)$ и $M(b,c)$. То же справедливо для вершин y и z. Следовательно, $x^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c)) = y^\perp \cap (M(a,c) \cup M(b,c))$. По предыдущей лемме $x^\perp = y^\perp$, что противоречит редуцированности графа Γ. Лемма 5 доказана.

2. Структурные свойства

Предположим, что в графе Γ имеются три попарно несмежные вершины a, b, c и вершина d, которая смежна с вершиной a. В случае, когда граф Γ удовлетворяет условию теоремы 1, существование таких четырех вершин в графе Γ — простое следствие наличия 4-коклики, связности

графа Γ, второго утверждения леммы 1 и леммы 2. Рассмотрим подграф $\Delta(a,b,c,d)$ графа Γ, порождённый множеством

$$4\{a,b,c,d\} \cup M(a,b) \cup M(a,c) \cup M(b,c) \cup M(d,b) \cup M(d,c).$$

Положим

$$X_1 = M(a,b) \setminus M(d,b),\ Y_1 = M(a,b) \cap M(d,b), Z_1 = M(d,b) \setminus M(a,b).$$

Заменив в этих определениях b на c, соответственно получим X_2, Y_2, Z_2. Заметим, что X_i в $\Delta(a,b,c,d)$ и Z_i в $\Delta(d,b,c,a)$ равны $i = 1,2$. Также X_1, Y_1, Z_1 из $\Delta(a,b,c,d)$ соответственно совпадают с X_2, Y_2, Z_2 из $\Delta(a,c,b,d)$. Зафиксируем вершины a,b,c,d и обозначим через Δ граф $\Delta(a,b,c,d)$.

Лемма 6. *Подмножества $X_1 \cup X_2$ и $Z_1 \cup Z_2$ либо пусты, либо порождают клики.*

Доказательство. Так как Γ не содержит 3-лап, достаточно заметить, что $a \sim d$ и $(X_1 \cup X_2) \cap [d] = \varnothing$, $(Z_1 \cup Z_2) \cap [a] = \varnothing$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Подмножества Y_1, Y_2 либо пусты, либо порождают клики.*

Доказательство. Из леммы 3 вытекает, что в противном случае $a^{\perp} = d^{\perp}$. Отсюда в силу редуцированности получаем, что $a = d$. Противоречие. Лемма 7 доказана.

Лемма 8.

(1) *Если $u,v \in M(a,b)$ и $u \not\sim v$, то либо $u \in X_1$ и $v \in Y_1$, либо $v \in X_1$ и $u \in Y_1$;*

(2) $X_i, Y_i, Z_i \neq \varnothing$, $i = 1,2$.

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 6 и 7.

Второе утверждение следует из первого утверждения доказываемой леммы и того, что в каждом μ-подграфе графа Γ содержится пара несмежных вершин. Лемма 8 доказана.

Заметим, что первое утверждение леммы 8 останется справедливым, если вместо пары вершин (a,b) рассмотреть любую из пар (a,c), (d,b), (d,c), заменив (X_1,Y_1) на (X_2,Y_2), (Z_1,Y_1), (Z_2,Y_2) соответственно.

Лемма 9.

(1) *$X_1 \not\approx M(d,c)$ и $X_2 \not\approx M(d,b)$;*

(2) *$Z_1 \not\approx M(a,c)$ и $Z_2 \not\approx M(a,b)$.*

Доказательство. Докажем первое соотношение $X_1 \not\approx M(d,c)$. Второе соотношение доказываются аналогично. Пусть $x \in X_1$ и $t \in M(d,c)$. Если $x \sim t$, то подграф с вершинами t,x,d,c является 3-лапой. Противоречие. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $y \in Y_1$. Если имеется вершина $x \in X_1$ такая, что $x \not\sim y$, то $Y_2 \subseteq [y]$.*

Доказательство. Предположим, что $Y_2 \setminus [y] \neq \varnothing$ и y_2 — произвольная вершина из $Y_2 \setminus [y]$. Из леммы 9 следует, что x, y и y_2 из окрестности вершины a являются попарно несмежными. Противоречие. Лемма 10 доказана.

Замечание. Приняв во внимание, что в любом μ-подграфе графа Γ имеются две несмежные вершины, из лемм 8 и 10 следует, что в Y_1 имеется вершина, смежная со всеми вершинами из Y_2.

Лемма 11. *Пусть $y \in Y_1$ и $x \in X_1 \cap y^\perp$. Тогда $x^\perp \cap Z_1 = y^\perp \cap Z_1$.*

Доказательство. Пусть z — вершина из $(x^\perp \cap Z_1) \setminus (y^\perp \cap Z_1)$ и x_2 — произвольная вершина из X_2, которая имеется по лемме 8. Из определения вершины z и лемм 6 и 9 следует, что $\{x, x_2, y, z\}$ является 3-лапой. Противоречие. Пусть теперь z — вершина из $(y^\perp \cap Z_1) \setminus (x^\perp \cap Z_1)$. Согласно замечанию в Y_2 есть вершина y_2, смежная со всеми вершинами из Y_1. Тогда из леммы 9 и определения вершины z следует, что $\{y, y_2, x, z\}$ является 3-лапой. Противоречие. Следовательно, обе разности правой и левой частей равенства из заключения леммы — пустые множества. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Подграф $X_1 \cup Y_1 \cup Z_1$ изоморфен одному из следующих графов*:

(1) *одному из подграфов графа треугольной призмы, изображенных на рис.* 1, *а* – 1, *ж*;

(2) *полному s-вершинному графу, $s \geqslant 5$, который получен удалением двух смежных рёбер, общая вершина которых принадлежит Y_1, а из двух оставшихся вершин этих рёбер одна составляет X_1, а другая — Z_1.*

Доказательство. Для сокращения записи вместо X_1, Y_1 и Z_1 будем писать X, Y и Z соответственно. Для обозначения произвольной вершины из $X \cup Y \cup Z$ мы будем использовать одну из букв x, y или z, возможно с некоторым индексом, в соответствии с тем, какому из множеств X, Y или Z она принадлежит. Этого правила мы будем придерживаться на протяжении всего доказательства леммы 12.

По второму утверждению леммы 5 и первому утверждению леммы 8 любая вершина из Y не смежна не более чем с одной вершиной как из X, так и из Z.

1. Допустим, что в Y есть вершина y такая, что имеются несмежные с ней вершины $x_y \in X$ и $z_y \in Z$. Тогда по второму утверждению леммы 5 вершины x_y и z_y смежны со всеми вершинами из $Y \setminus \{y\}$, а $y^\perp \supseteq$

$(X \setminus \{x_y\}) \cup (Z \setminus \{z_y\})$. Также заметим, что $x_y \sim z_y$, поскольку x_y, y, z_y лежат в окрестности вершины b.

1.1. Предположим, что $Y \setminus \{y\} \neq \varnothing$ и пусть $\overline{y} \in Y \setminus \{y\}$. Тогда, как отмечено в пункте 1 доказательства настоящей леммы, $\overline{y} \sim x_y$ и $\overline{y} \sim z_y$.

1.1.1. Пусть $\overline{y}$ смежна со всеми вершинами из объединения μ-подграфов $M(a,b)$ и $M(d,b)$. В таком случае можно утверждать, что $X = \{x_y\}$ и $Z = \{z_y\}$. Действительно, каждая вершина x из $X \setminus \{x_y\}$ смежна с вершинами y и $\overline{y}$. Поэтому, дважды применив лемму 11, получим $y^{\perp} \cap Z = x^{\perp} \cap Z = \overline{y}^{\perp} \cap Z$. С другой стороны, вершина z_y смежна с $\overline{y}$ и не смежна с y. Из полученного противоречия следует, что $X = \{x_y\}$. Аналогично, $Z = \{z_y\}$.

Таким образом, если $|Y| = 2$, то подграф $X \cup Y \cup Z$ — это подграф графа треугольной призмы, приведенный на рис. 1, *б*. Если же $|Y| \geqslant 3$, то любая вершина из $Y \setminus \{y\}$, в том числе $\overline{y}$, смежна с x_y, y и z_y. Поэтому подграф $X \cup Y \cup Z$ является кликовым расширением графа, изображённом на рис. 1, *б*. В этом графе вершина $\overline{y}$ заменена на клику не менее чем с двумя вершинами. Иными словами, $X \cup Y \cup Z$ — подграф из второго утверждения настоящей леммы.

1.1.2. Предположим, что в $\overline{y}^{\perp}$ не содержится объединение μ-подграфов $M(a,b)$ и $M(d,b)$. Без ограничения общности будем считать, что имеется такая вершина $x_{\overline{y}} \in X$, что $x_{\overline{y}} \not\sim \overline{y}$. Очевидно, что $x_{\overline{y}} \neq x_y$. По второму утверждению леммы 5 имеем $x_{\overline{y}} \sim y$. Применив лемму 11 к паре $x_{\overline{y}}$ и y, получаем $x_{\overline{y}} \not\sim z_y$. Отсюда следует, что $|Y| = 2$, поскольку в силу второго утверждения леммы 5 произвольная вершина из $Y \setminus \{y, \overline{y}\}$ смежна с $x_{\overline{y}}$ и z_y. Значит, по лемме 11 должны быть смежны $x_{\overline{y}}$ и z_y. Противоречие.

Теперь покажем, что $|X| = 2$. Допустим, что $|X| \geqslant 3$ и $x \in X \setminus \{x_y, x_{\overline{y}}\}$. Тогда по второму утверждению леммы 5 вершина x смежна со всеми вершинами из Y. Из леммы 11 следует, что x и все вершины из Y смежны с одними и теми же вершинами из Z. Это противоречит тому, что $y \not\sim z_y \sim \overline{y}$. Аналогично показывается, что $|Z| \leqslant 2$, причём если $|Z| = 2$, то вершина из Z, отличная от z_y, смежна с y. Поэтому в силу леммы 11 она не смежна с x_y и смежна с $x_{\overline{y}}$. Следовательно, по лемме 11 эта вершина не смежна с $\overline{y}$. Наконец, осталось заметить, что Z — клика по лемме 6. Подграф $X \cup Y \cup Z$ для случаев $|Z| = 1$ и $|Z| = 2$ — это подграф графа треугольной призмы, изображённой на рис. 1, *в* и 1, *а* соответственно.

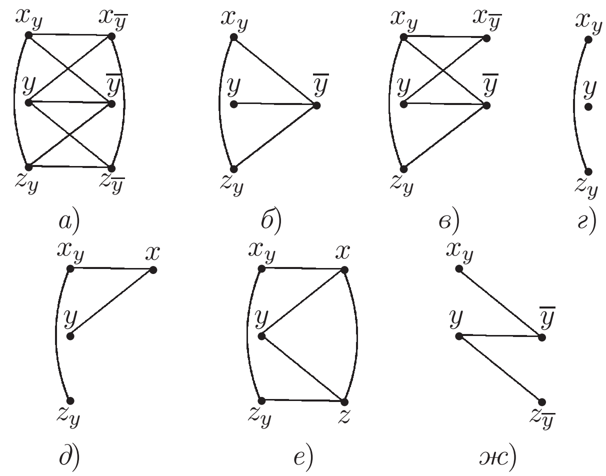

Рис. 1

1.2. Рассмотрим случай $|Y| = 1$. Согласно второму утверждению леммы 5, лемме 6 и первому утверждению леммы 8 любая вершина из $X \setminus \{x_y\}$ в своей замкнутой окрестности содержит μ-подграф $M(a, b)$, а любая вершина из $Z \setminus \{z_y\}$ — μ-подграф $M(d, b)$. Кроме того, по лемме 11 каждая вершина из $X \setminus \{x_y\}$ смежна со всеми вершинами из $Z \setminus \{z_y\}$ и $x_y \not\approx Z \setminus \{z_y\}$ и $X \setminus \{x_y\} \not\approx z_y$. Теперь легко видеть, что $x^\perp \cap (X \cup Y \cup Z) = X \cup Y \cup (Z \setminus \{z_y\})$ для любой вершины $x \in X \setminus \{x_y\}$. Докажем, что $|X \setminus \{x_y\}| \leqslant 1$. Допустим противное, т. е. $\widehat{x}$ и $\overline{x}$ — различные вершины из $X \setminus \{x_y\}$. Так как граф Γ редуцирован, то согласно лемме 4 из различия вершин $\widehat{x}$ и $\overline{x}$ следует различие их окрестностей в Δ. Из определения множества X, лемм 1, 6, 9 и того, что $\overline{x}^\perp \cap (X \cup Y \cup Z) = \widehat{x}^\perp \cap (X \cup Y \cup Z)$, следует, что в Δ окрестности вершин $\widehat{x}$ и $\overline{x}$ могут различаться лишь в $M(b, c)$. Так как $\widehat{x}, \overline{x}, z_y \in [b]$ и $\{\widehat{x}, \overline{x}\} \not\approx z_y$, то $M(b, c) \setminus [z_y] \subseteq [\widehat{x}] \cap [\overline{x}]$. Более того, $[z_y] \cap [\widehat{x}] \cap M(b, c) = [z_y] \cap [\overline{x}] \cap M(b, c) = \varnothing$, поскольку $M(b, c) \subset [c]$ и вершины в тройках $\widehat{x}, z_y, c$ и $\overline{x}, z_y, c$ попарно несмежны. Следовательно, $[\widehat{x}] \cap M(b, c) = [\overline{x}] \cap M(b, c)$, и, значит, $\widehat{x} = \overline{x}$. Противоречие. Аналогично доказывается, что $|Z \setminus \{z_y\}| \leqslant 1$. Заметим, что ситуации $|X| = 2$, $|Z| = 1$ и $|X| = 1$, $|Z| = 2$ аналогичны. Поэтому получаем три различных подграфа графа треугольной призмы — это подграфы, изображённые на рис. 1, *г*, 1, *д* и 1, *е*. Они соответствуют следующим случаям: 1) $|X| = 1$ и $|Z| = 1$; 2) $|X| = 2$ и $|Z| = 1$; 3) $|X| = 2$ и $|Z| = 2$.

2. Теперь рассмотрим случай, когда каждая вершина из Y смежна со всеми вершинами из $X \cup Z$ за исключением быть может одной вершины. Тогда, очевидно, имеются различные вершины $y, \overline{y} \in Y$ такие, что существуют $x_y \in (X \cap [\overline{y}]) \setminus [y]$ и $z_{\overline{y}} \in (Z \cap [y]) \setminus [\overline{y}]$. Пользуясь леммой 11, как и при доказательстве в первом случае, можно показать, что $X \cup Y \cup Z$

состоит из только что перечисленных вершин, $x_y \not\sim z_{\overline{y}}$ и $y \sim \overline{y}$. Соответствующий подграф графа треугольной призмы изображён на рисунке 1, *ж*. Лемма 12 доказана.

Следующее утверждение непосредственно следует из леммы 12.

Следствие. *Если μ-подграф вершин a и b содержит треугольник, то крайней мере две его вершины лежат в Y_1.*

Лемма 13.

(1) *Любые две вершины x_1, $\overline{x_1}$ из X_1 не имеют общих смежных вершин из $M(b,c)$.*

(2) *Любые две вершины y_1 и $\overline{y_1}$ из Y_1 такие, что в замкнутой окрестности по крайней мере одной вершины не содержится множество $M(a,b) \cup M(d,b)$, не имеют общих смежных вершин из $M(b,c)$.*

Доказательство.(1) В случае, когда $|X_1| \geqslant 2$, из леммы 12 следует, что $|X_1| = 2$ и в Z_1 имеется вершина z_1 такая, что $|z_1^{\perp} \cap X_1| = 1$. Без ограничения общности можно считать, что в $z_1^{\perp}$ имеется вершина x_1. В этом случае $x_1^{\perp} \cap M(b,c) = z_1^{\perp} \cap M(b,c)$, поскольку a смежна с x_1 и не смежна с z_1 и ни с одной вершиной из $M(b,c)$). Аналогично, d смежна с z_1 и $d^{\perp} \cap M(b,c) = \varnothing$. Для завершения доказательства первого утверждения леммы осталось заметить, что $\overline{x_1}^{\perp}$ и $z_1^{\perp}$ не пересекаются в $M(b,c)$, так как $\overline{x_1}$ и z_1 не смежны между собой и с вершиной c.

(2) Из леммы 12 вытекает, что в X_1 или в Z_1 существует вершина, смежная точно с одной вершиной из $\{y_1, \overline{y_1}\}$, например, вершиной x_1. Пусть x_1 смежна с y_1. В этом случае $y_1^{\perp} \cap M(b,c) \subseteq x_1^{\perp} \cap M(b,c)$, так как в $y_1^{\perp} \setminus x_1^{\perp}$ содержится вершина d. С другой стороны, вершины x_1 и $\overline{y_1}$ не смежны, а значит, в силу первого утверждения леммы 5 не имеют общих смежных в $M(b,c)$ вершин. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Если в Γ имеется вершина e, не смежная с вершинами a, b и c, то второй случай в лемме 12 невозможен.*

Доказательство. Допустим, что имеет место второй случай леммы 12. Тогда в подграфе Y_1, который является пересечением μ-подграфов $M(a,\ b)$ и $M(d,b)$, содержится не меньше трёх вершин. Более того, в этом подграфе найдутся две смежные вершины u и v, каждая из которых смежна со всеми вершинами из $M(a,b) \setminus \{u,v\}$. Пусть теперь f — произвольная вершина из $M(a,e)$ (существование такой вершины вытекает из леммы 2). Тогда $f \not\approx \{b,c\}$. Применив лемму 12 к $\Delta(a,b,c,f)$, получаем, что $|M(a,b) \cap M(f,b)| \geqslant 3$. Действительно, так как вершины u и v находятся в $M(a,b)$ и смежны со всеми другими вершинами этого подграфа, то, как видно из рисунков 1, a – 1, *ж*, для $M(a,b) \cup M(f,b)$ мо-

жет иметь место только второй случай леммы 12. Более того, согласно той же лемме 12 две смежные вершины из $M(a,b)$, смежные в $M(a,b)$ со всеми другими вершинами, находятся в $M(a,b) \cap M(f,b)$. Иными словами, в $M(a,b)$ есть две такие вершины u и v, смежные со всеми вершинами из $M(a,b)$, что для любой вершины f из $M(a,e)$ справедливо включение $\{u,v\} \subseteq a^{\perp} \cap f^{\perp} \cap b^{\perp}$ в соответствии с леммой 12.

По условию в μ-подграфе с вершинами a и e имеются две несмежные вершины f_1 и f_2. Так как граф с вершинами a, b и e является 3-кокликой, то по лемме 12 вершина b не смежна с вершинами f_1 и f_2. Тогда $\{u, f_1, f_2, b\}$ есть 3-лапа. Противоречие. Лемма 14 доказана.

Следствие. *Если пара несмежных вершин графа Γ лежит в 4-коклике, то μ-подграф этой пары является либо 4-циклом, либо порождённым 2-путём, либо парой несмежных вершин.*

Справедливость следствия непосредственно вытекает из лемм 12 и 14.

Известна структурная характеризация рёберных графов [7]. Л. Байнеке [5] нашёл все подграфы, которые не могут встречаться в рёберных графах. Для доказательства теоремы 1 воспользуемся этими результатами.

Теорема 3 [3, с. 95]. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *граф Γ является рёберным графом*;

(2) *ни один из девяти графов, изображённых на рис. 2, не является порождённым подграфом графа Γ.*

Первый граф, изображённый на рис. 2, — это 3-лапа, следующие графы обозначим через H_1 –H_8.

Лемма 15. *Пусть Δ — граф с некликовыми μ-подграфами, в котором нет подграфов, изоморфных графам H_1 и H_2. Тогда*

(1) *если в некотором μ-подграфе графа Δ две вершины смежны, то любая другая вершина этого μ-подграфа смежна точно с одной из этих вершин*;

(2) *в произвольном μ-подграфе графа Δ любое ребро содержится в порождённом подграфе P_3.*

Доказательство. Первое утверждение является непосредственно следует из условия леммы.

Пусть a и b — произвольные несмежные вершины графа Δ такие, что в $M(a,b)$ имеется ребро $\{v_1, v_2\}$. По условию $M(a,b)$ не является кликой. Поэтому в $M(a,b)$ есть по меньшей мере ещё одна вершина, например, вершина v_3. Тогда из первого утверждения леммы следует, что порождённый подграф с вершинами v_1, v_2, v_3 является 2-путём. Лемма

15 доказана.

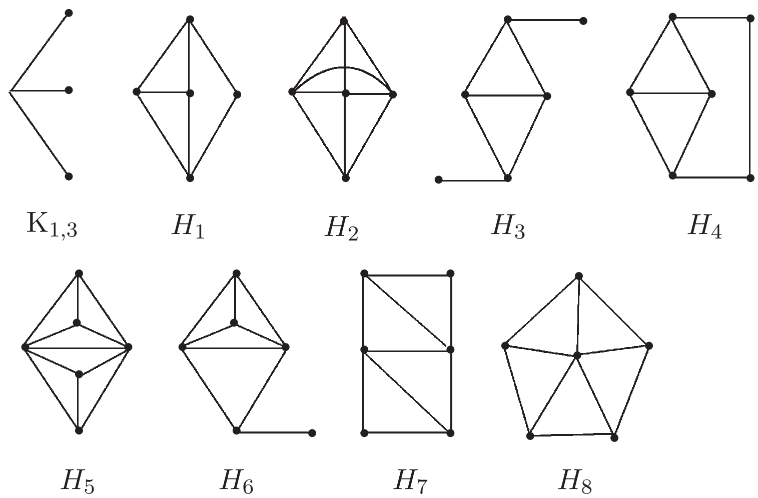

Рис. 2

В следующей лемме подграфом графа мы будем называть произвольный подграф, а не только порождённный.

Лемма 16. *Пусть* Γ *не содержит порождённых подграфов, изоморфных графам* H_1 *и* H_2*, Тогда в* Γ *нет порождённых подграфов, изоморфных графам* H_3 *–* H_8.

Доказательство. Пусть H — порождённый подграф графа Γ.

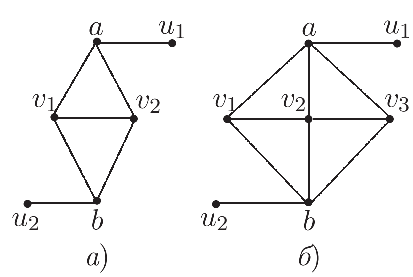

Рис. 3

1. Предположим, что граф H изоморфен графу H_3. Обозначим вершины графа H так, как показано на рис. 3, *а*. Из второго утверждения леммы 15 следует, что некоторая вершина v_3 графа Γ дополняет ребро $\{v_1, v_2\}$ до порождённого 2-пути в $M(a, b)$. Включив в рассмотрение вер-

шину v_3 и предположив без ограничения общности, что $v_3 \in [v_2] \setminus [v_1]$, получим граф, изображённый на рис. 3, *б*. В этом подграфе множества вершин $\{a, u_1, v_1, v_3\}$ и $\{b, u_2, v_1, v_3\}$ порождают 3-лапы. Так как $v_1 \not\sim v_3$, $u_1 \not\sim v_1$ и $u_2 \not\sim v_1$, то каждая из вершин u_1 и u_2 смежна с вершиной v_3. Поскольку $v_2 \not\sim u_1$ и $v_2 \not\sim u_2$, $\{v_3, v_2, u_1, u_2\}$ порождает 3-лапу. Противоречие.

2. Допустим, что граф H изоморфен графу H_4. Обозначим вершины графа H_4 так, как указано на рис. 4, *а*. Аналогично пункту 1 находим такую вершину v_3 из μ-подграфа с вершинами a и b, что без ограничения общности $v_3 \in [v_2] \setminus [v_1]$. Вершины u_1 и u_2 смежны с v_3. Получаем граф, изображённый на рис. 4, *б*, который, как нетрудно видеть, является порождённым подграфом графа Г. Чтобы воспользоваться вторым утверждением леммы 15 и ввести в рассмотрение вершину w_1 из μ-подграфа вершин v_2 и u_2, дополняющую ребро $\{b, v_3\}$ до порождённого 2-пути, необходимо рассмотреть два случая: $w_1 \in v_3^{\perp} \setminus b^{\perp}$ и $w_1 \in b^{\perp} \setminus v_3^{\perp}$. Возникающие графы изображены на рис. 4, *в* и рис. 4, *д* соответственно.

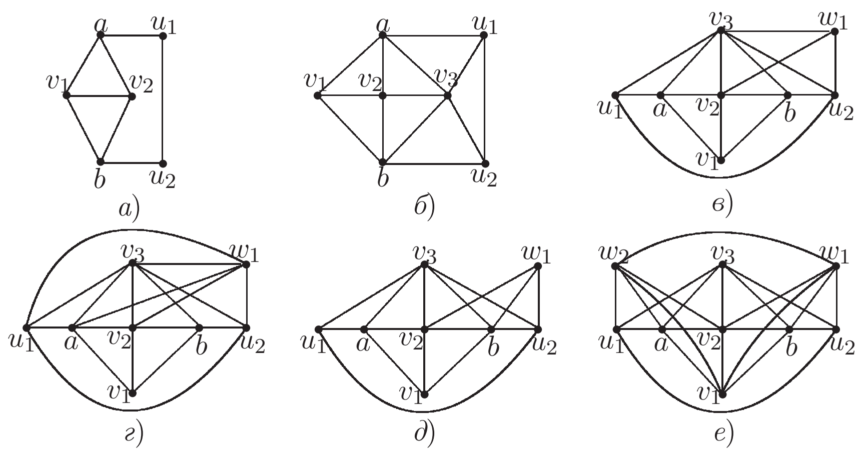

Рис. 4

2.1. В графе Г, изображённом на рис. 4, *в*, множества $\{v_2, a, b, w_1\}$ и $\{v_3, b, u_1, w_1\}$ порождают 3-лапы; поэтому в Г обязательно должны быть ребра $\{a, w_1\}$ и $\{w_1, u_1\}$. Подграф, полученный из графа рис. 4, *в* после добавления указанных рёбер, изображен на рис. 4, *г*. Из рис. 4, *г* легко видеть, что в $M(u_1, v_2)$ имеется треугольник с вершинами a, v_3, w_1, т. е. в Г имеется порождённый подграф, изоморфный графу H_2. Противоречие.

2.2. Из рис. 4, *д* видно, что вершины w_1 и v_1 смежны, иначе в графе Г подграф с вершинами v_2, v_3, v_1, w_1 является 3-лапой. Заметим, что $a \not\sim w_1$, поскольку в противном случае в μ-подграфе с вершинами a и

b будет треугольник с вершинами v_1, v_2 и w_1, т. е. Γ будет содержать H_2. Также отметим, что $u_1 \not\sim w_1$, поскольку иначе в $M(a, w_1)$ имеется ребро $\{v_1, v_2\}$ и вершина u_1, не смежная с вершинами этого ребра, т. е. в графе Γ имеется подграф, изоморфный графу H_1. Отсюда следует, что в μ-подграфе с вершинами u_1 и v_2 должна быть вершина w_2, которой нет на рис. 4, *д*. Как в случае 2.1 для w_1 и b показывается, что w_2 смежна с a, а значит, аналогично вершине w_1, вершина w_2 смежна с v_1 и не смежна с b и u_2. Вместе с тем вершины w_1 и w_2 смежны, иначе вершины v_2, v_3, w_1, w_2 порождают 3-лапу. Порождённый подграф изображён на рис. 4, *е*. Поскольку подграф, порождённый множеством $\{b, w_2, v_1, v_2, w_1\}$, изоморфен графу H_2, получаем противоречие.

3. Допустим, что граф H изоморфен графу H_5. Вершины графа H обозначим так, как указано на рис. 5, *а*. Рассмотрим, как выше, вершину v_3 из $M(a, b)$ (см. рис. 5, *б*). В графе, изображённом на рис. 5, *б*, индуцированный подграф с вершинами v_2, v_3, u_1, u_2 является 3-лапой. Поэтому вершина v_3 должна быть смежна с одной из вершин u_1, u_2. Пусть без ограничения общности $v_3 \sim u_1$ (см. рис. 5, *в*). Рассмотрев подграф, порождённый множеством $\{v_1, v_2, v_3, a, u_1\}$, получаем противоречие с тем, что в графе Γ нет порождённых подграфов, изоморфных графу H_2.

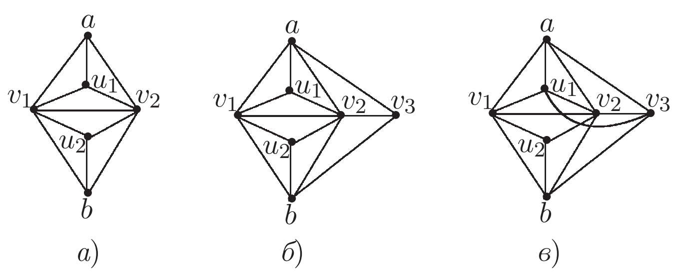

Рис. 5

4. Допустим, что граф H изоморфен графу H_6. Вершины графа H обозначим так, как указано на рис. 6, *а*. Пользуясь симметрией вершин v_1 и v_2, как и выше, введем в рассмотрение вершину v_3 из $M(a, b)$. Если v_3 не смежна с u_2, то порождённый подграф графа Γ с вершинами b, v_1, v_3, u_2 является 3-лапой. Поэтому $v_3 \sim u_2$; это отображено на рис. 5, *б*. Вершины u_1 и v_3 не смежны, так как в противном случае вершины a, u_1, v_1, v_2 и v_3 порождали бы подграф, изоморфный подграфу H_2. Применив второе утверждение леммы 15 к ребру $\{b, v_3\}$ и μ-подграфу с вершинами v_2 и u_2, получим, что в $M(v_2, u_2)$ имеется вершина w, которой нет в графе, изображённом на рис. 5, *б*, дополняющая $\{b, v_3\}$ до порождённого 3-пути в $M(v_2, u_2)$. Возможны два случая: $w \in b^\perp \setminus v_3^\perp$ и $w \in v_3^\perp \setminus b^\perp$.

4.1. Пусть $w \in b^{\perp} \setminus v_3^{\perp}$. Тогда в Γ есть ребро $\{w, u_1\}$ (иначе порождённый подграф с вершинами v_2, v_3, u_1, w являлся бы 3-лапой) и ребро $\{w, v_1\}$ (иначе порождённый подграф с вершинами b, v_3, v_1, w являлся бы 3-лапой) (см. рис. 6, *в*). Из этого рисунка видно, что подграф с вершинами b, v_1, v_2, u_1, w изоморфен графу H_2. Противоречие.

4.2. Пусть $w \in v_3^{\perp} \setminus b^{\perp}$. Тогда в Γ есть ребро $\{w, u_1\}$ (иначе порождённый граф с вершинами v_2, b, u_1, w являлся бы 3-лапой) и ребро $\{w, a\}$ (иначе порождённый граф с вершинами v_2, a, b, w являлся бы 3-лапой) (см. рис. 6, *г*). Остаётся заметить, что подграф с вершинами a, u_1, v_2, v_3 и w порождает подграф, изоморфный графу H_2.

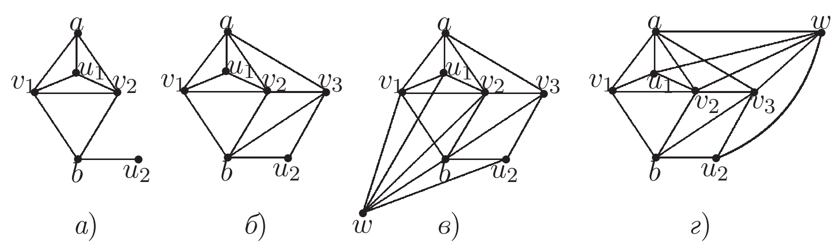

Рис. 6

5. Допустим, что граф H изоморфен графу H_7. Вершины графа H обозначим так, как указано на рис. 7, *а*. К вершинам этого графа добавим вершину v_3 из μ-подграфа с вершинами a и b, используя симметрию. Предположим, что $v_3 \in [v_2] \setminus [v_1]$. Получим граф, изображённый на рис. 7, *б*. Порождённый подграф с вершинами v_2, v_1, v_3, u_1 не будет 3-лапой, если $v_3 \sim u_1$. Допустим, что это так. Но теперь вершины $a, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2$ не будут порождать подграф H_6, если $v_3 \sim u_2$. Установив эту смежность, приходим к графу, изображённому на рис. 7, *в*. Нетрудно проверить, что $\{a, v_1, v_2, v_3, u_2\}$ порождает H_1. Противоречие.

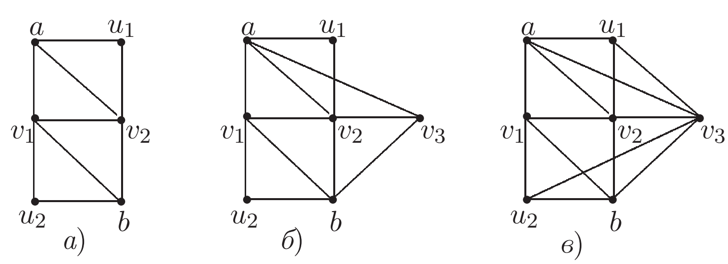

Рис. 7

6. Предположим, что граф H изоморфен графу H_8, являющемуся последним в списке запрещённых подграфов из второго условия теоремы 2. Введём в рассмотрение вершину v_3 из $M(a, b)$. Сначала предполо-

жив, что $v_3 \in [v_2] \setminus [v_1]$, получим граф, изображённый на рис. 8, *б*. На этом рисунке множество $\{b, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2\}$ порождает граф, изоморфный графу H_7(см. рис. 7, *a*). Отсюда следует, что $\{u_1, u_2\} \cap v_3^{\perp} \neq \varnothing$. Если предположить, что v_3 смежна только с одной из вершин u_1 или u_2, то $\{b, v_1, v_2, v_3, u_1\}$, либо $\{a, v_1, v_2, v_3, u_2\}$ будет порождать H_1 в Γ. Значит, $\{u_1, u_2\} \subset v_3^{\perp}$ и $\{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2\}$ порождает в Γ подграф, изоморфный графу H_1. Противоречие. Если же $v_3 \in [v_1] \setminus [v_2]$, то v_3 смежна с вершинами u_1 и u_2, а $\{a, v_1, v_3, u_1, u_2\}$ порождает в Γ подграф, изоморфный графу H_2. Лемма 16 доказана.

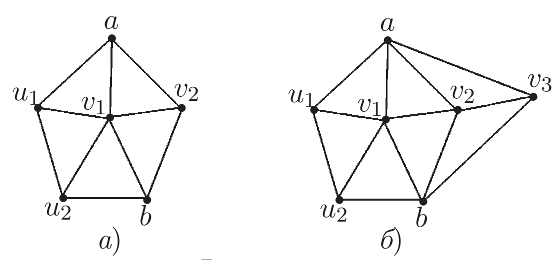

Рис. 8

3. Доказательство теоремы 1

Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условию теоремы 1. Как следует из леммы 16 достаточно доказать, что в Γ нет подграфов, изоморфных графам H_1 и H_2.

Согласно условию теоремы 1 в Γ есть 4-коклика; её вершины обозначим через a, b, c, d.

1. Обозначим вершины графа H_1 так, как указано на рис. 9. Из второго утверждения леммы 5 следует, что никакая 3-коклика в графе Γ не содержит обе вершины f и e. Учитывая, что в Γ нет 3-лап, без ограничения общности полагаем, что $\{a, b\} \subseteq [f] \setminus e^{\perp}$ и $\{c, d\} \subseteq [e] \setminus f^{\perp}$. Поскольку в Γ нет 3-лап, каждая из вершин v_1, v_2 и w смежна только с одной из вершин a, b и только с одной из вершин c, d. Пусть без ограничения общности $\{a, c\} \subseteq v_1^{\perp}$. Тогда $w \not\sim a$ и $w \not\sim c$. В самом деле, если $w \sim a$, то $\{f, b, v_1, w\}$ порождает 3-лапу; если $w \sim c$, то $\{e, d, v_1, w\}$ также порождает 3-лапу. Аналогично показывается, что $\{a, c\} \subseteq v_2^{\perp}$. Рассмотрим теперь подграф $\Delta(e, a, b, d)$. По построению $\{v_1, v_2\} \subseteq M(e, a) \setminus M(d, a)$ и $f \in M(a, b)$. Тогда к $\Delta(e, a, b, d)$ можно применить первое утверждение леммы 13. В результате получаем, что вершины v_1 и v_2 не могут быть смежны с f. Противоречие.

2. Вершины графа H_2 обозначим так, как указано на рис. 10. Из леммы 14 следует, что никакой 4-коклике графа Γ не принадлежат вершины

f и e. Поэтому вне $f^{\perp} \cup e^{\perp}$ имеется не более одной вершины из $\{a, b, c, d\}$.

Следовательно, возможны следующие случаи:

2.1. $|\{f, e\} \cap \{a, b, c, d\}| = 1$;

2.2. $|\{f, e\} \cap \{a, b, c, d\}| = 0$:

2.2.1. $|M(f, e) \cap \{a, b, c, d\}| = 2$,

2.2.2. $|M(f, e) \cap \{a, b, c, d\}| = 1$,

2.2.3. $|M(f, e) \cap \{a, b, c, d\}| = 0$.

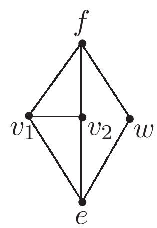

Рис. 9

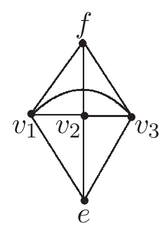

Рис. 10

2.1. Этот случай сводится к случаю 2.2.3. Без ограничения общности предположим, что $a = f$ и $e \in M(c, d)$. Выберем в $M(a, b)$ пару несмежных вершин g и h. Тогда $\{c, d, g, h\}$ является 4-кокликой, и для вершин f, e и указанной 4-коклики имеет место случай 2.2.3.

2.2.1. В этом случае вершины f и e принадлежат 4-коклике $\{f, e\} \cup (\{a, b, c, d\} \setminus M(f, e))$.

2.2.2. Без ограничения общности предположим, что $f \in M(a, b)$ и $e \in M(a, c)$. Рассмотрим граф $\Delta(b, f, d, e)$. Применив к нему следствие из леммы 12, получим, что из вершин v_1, v_2 и v_3 по крайней мере две вершины смежны с b. Аналогично, среди вершин v_1, v_2 и v_3 имеется не менее двух вершин, смежных с вершиной c. Значит, по крайней мере одна из вершин v_1, v_2, v_3 лежит в $M(b, c)$. Отсюда следует, что $a \notin \{v_1, v_2, v_3\}$. Заметим, что каждая из вершин v_1, v_2 и v_3 смежна с a или b и a или c. Из сказанного следует, что справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений: 1) $\{v_1, v_2, v_3\} \subset M(b, c)$, 2) среди вершин v_1, v_2 и v_3 найдётся вершина v_i такая, что v_i смежна с a и не смежна с некоторой вершиной u из $\{b, c\}$, а две оставшиеся в $\{v_1, v_2, v_3\}$ вершины смежны с u.

Первое утверждение противоречит лемме 14. Значит, имеет место второе утверждение. Без ограничения общности предположим, что $v_i = v_1$ и $u = b$. Сначала отметим, что вершина v_1 смежна с вершиной c. Действительно, в противном случае $\{b, c, d, v_1\}$ является 4-кокликой, при этом треугольник $\{f, v_2, v_3\}$ содержится в $M(b, v_1)$, что в силу леммы 14 приводит к противоречию. Если вершина a не смежна ни с одной

из вершин v_2 и v_3, то в μ-подграфе $M(b, v_1)$ графа $\Delta(a, v_1, b, d)$ имеется треугольник с вершинами f, v_2, v_3, причём две его вершины не принадлежат окрестности вершины a. Это противоречит следствию из леммы 12. Если вершина a смежна с одной из вершин v_2 и v_3, для определенности с v_2, то v_2 не смежна с вершиной c. Тогда в подграфе $M(v_1, b)$ графа $\Delta(c, v_1, b, d)$ имеется треугольник с вершинами v_2, v_3, f; при этом две его вершины f и v_2 не принадлежат окрестности вершины c. Вновь противоречие со следствием из леммы 12.

2.2.3. Поскольку в $e^\perp \cup f^\perp$ имеются по крайней мере три вершины 4-коклики с вершинами a, b, c, d, имеются в точности две возможности для числа вершин в пересечении $\{a, b, c, d\} \cap (e^\perp \cup f^\perp)$.

2.2.3.1. Пусть $|\{a, b, c, d\} \cap (e^\perp \cup f^\perp)| = 3$. Не ограничивая общности, можно считать, что $[e] \cap \{a, b, c, d\} = \{a\}$ и $[f] \cap \{a, b, c, d\} = \{c, d\}$.

Пусть $\Delta = \Delta(a, e, c, d)$ и $N = \{v_1, v_2, v_3\}$. Заметим, что по леммам 12 и 14 в подграфах $M(a, c) \cup M(c, e)$ и $M(a, d) \cup M(d, e)$ нет треугольников, так как $\{a, b, c, d\}$ и $\{b, c, d, e\}$ являются 4-кокликами.

Из первого утверждения леммы 1 следует, что $M(f, e) \subset M(c, e) \cup M(d, e)$. Применяя лемму 9 к графу Δ, отсюда получаем, что либо $N \subseteq Y_1 \cup Y_2$, либо $N \subseteq Z_1 \cup Z_2$.

Предположим, что $N \subseteq Z_1 \cup Z_2$. Можно считать, что $|N \cap Z_1| = 2$. Тогда получаем противоречие с первым утверждением леммы 13, поскольку в Z_1 имеются две вершины, смежные в $M(c, d)$ с вершиной f.

Пусть $N \subseteq Y_1 \cup Y_2$. Учитывая выше сказанное, можно считать, что $N \cap Y_1 = \{v_1, v_2\}$. Согласно второму утверждению леммы 8 множество Z_1 непусто. Поэтому предположение о том, что обе вершины v_1 и v_2 смежны со всеми остальными вершинами из $M(a, c) \cup M(c, e)$, приводит к противоречию с тем, что в $M(a, c) \cup M(c, e)$ нет треугольников. С другой стороны, если в замкнутой окрестности хотя бы одной из вершин v_1 или v_2 нет подграфа $M(a, c) \cup M(c, e)$, то в силу второго утверждения леммы 13 пересечение $[v_1] \cap [v_2] \cap M(c, d)$ пусто. Последнее противоречит тому, что вершины v_1 и v_2 смежны с вершиной f из $M(c, d)$.

2.2.3.2. Пусть $|\{a, b, c, d\} \cap (e^\perp \cup f^\perp)| = 4$. Без ограничения общности будем считать, что $\{a, b\} \subseteq [e]$ и $\{c, d\} \subseteq [f]$. Тогда из первого утверждения леммы 1 следует, что каждая из вершин v_1, v_2 и v_3 смежна точно с одной из вершин a или b и точно с одной из вершин c или d.

Покажем, что в $\{a, b, c, d\}$ имеются такие вершины u и v, что

$$|M(u, v) \cap \{v_1, v_2, v_3\}| \geqslant 2.$$

Можно считать, что вершина v_1 смежна с вершинами a и c. Тогда вершина v_3 смежна хотя бы с одной из вершин a и c, поскольку в про-

тивном случае множество вершин $\{v_1, a, c, v_3\}$ будет порождать 3-лапу. Без ограничения общности будем предполагать, что v_3 смежна с a. Если v_3 смежна и с вершиной c, то положим $(u, v) = (a, c)$. В противном случае v_3 смежна с d. Заметим, что если v_2 смежна с b, то либо $\{v_2, v_1, b, d\}$, либо $\{v_2, v_3, b, c\}$ порождает 3-лапу. Таким образом, вершина v_2 смежна либо с a и c, либо с a и d. В первом случае $(u, v) = (a, c)$, а во втором $(u, v) = (a, d)$.

Теперь без ограничения общности можно считать, что a и c смежны с вершинами v_1 и v_2. Тогда b не смежна с вершинами v_1 и v_2. Рассмотрим $\Delta(b, e, c, d)$. Ребро $\{v_1, v_2\}$ лежит в $([c] \cap [e]) \setminus [b]$, а инцидентные ему вершины смежны с вершиной f из $M(c, d)$. Это противоречит первому утверждению леммы 13, примененной к вершинам v_1 и v_2 подграфа $\Delta(b, e, c, d)$.

Таким образом, в графе Γ нет подграфов, изоморфных графам H_1 и H_2. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть Γ удовлетворяет условию теоремы 2. Обозначим через Δ связный граф такой, что $\Gamma = \mathcal{L}(\Delta)$. Докажем, что отношение $\not\sim$ на $V(\Delta)$ является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Проверим транзитивность: пусть u, v и w такие вершины в графе Δ, что v не смежна с u и w. Покажем, что предположение о смежности u и w приводит к противоречие. Заметим, что в этом случае любая вершина t графа Δ, смежная с v, не смежна с u и w. Действительно, в противном случае в Γ определен μ-подграф вершин, заданных ребрами $\{u, w\}$ и $\{v, t\}$. Так как вершина v не смежна с u и w, то этот μ-подграф состоит из рёбер, инцидентных вершине t, и потому смежных. Это противоречит условию (ii) о некликовости μ-подграфов в Γ. Поскольку Γ — связный граф без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, по лемме 2 граф Γ имеет диаметр два. Следовательно, если t — произвольная вершина в Δ, смежная с v, то из несмежности вершины v с вершинами u и w, следует, что t смежна с u или w. Как мы видели, это приводит к противоречию. Тем самым транзитивность отношения $\not\sim$ на $V(\Delta)$ доказана. Осталось заметить, что Δ является полным многодольным графом, долями которого являются классы эквивалентности отношения $\not\sim$ на $V(\Delta)$. Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за существенные замечания, позволившие исправить ошибки и улучшить первоначальную версию данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вакула И. А.** О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами // Алгебра и линейная оптимизация. Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова, 3-5 июня 2002 г. Екатеринбург, 2002. С. 66–80.
2. **Кабанов В. В.** Характеризация треугольных и решетчатых графов // Сиб. мат. ж. 1998. Т. 39, № 5. С. 1054–1059.
3. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
4. **Balinska K. T., Zwierzynski K. T., Kabanov V. V.** Algorithms for generating a class of subgraphs of Schlaffli graph // The Technical University of Poznan, 2002. CSC Report N 488.
5. **Beineke L. W.** On derived graphs and digraphs // Beiträge zur Graphentheorie, Internat. Colloq. (Manebach, 1967). Leipzig, 1968. P. 17–23.
6. **Brouwer A. E., Numata M.** A characterization of some graphs which do not contain 3-claws // Discrete Math. 1994. V. 124, N 3. P. 49–54.
7. **van Rooij A. C. N., Wilf H. S.** The interchange graph of a finite graph // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1965. V. 16, N 3–4. P. 263–269.

Адрес авторов:

Институт математики и
механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург,
Россия.
E-mail: vvk@imm.uran.ru

Статья поступила
27 сентября 2004 г.

Переработанный вариант —
12 апреля 2005 г.