ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2005. Серия 1. Том 12, № 4, 23–39

УДК 519.718

О (p,q)-РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

Пусть $0 \leqslant p \leqslant q$. Правильная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа называется (p,q)-раскраской, если для любого ребра модуль разности между цветами его инциденторов принадлежит интервалу $[p,q]$. Минимальное число цветов, необходимое для (p,q)-раскраски всех инциденторов мультиграфа G, называется (p,q)-хроматическим числом мультиграфа G и обозначается через $\chi(p,q,G)$. При $p \geqslant 1$ для однородных мультиграфов G степени Δ указываются точные значения $\chi(p,q,G)$ при всех $q \geqslant p$. Эти точные значения зависят только от Δ и не зависят от других структурных особенностей мультиграфов. Приводятся оценки (p,q)-хроматических чисел неоднородных мультиграфов.

Введение

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный неориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством рёбер E. Через $d(v)$ обозначается степень вершины v, через $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин мультиграфа. Если $\Delta(G) = \Delta$, то G называется *мультиграфом степени* Δ. Мы всегда будем считать, что $\Delta > 0$. Мультиграф называется *однородным,* если степени всех его вершин одинаковы.

Если ребро e инцидентно вершине v, то пара (v, e) называется *инцидентором* ребра e, примыкающим к вершине v. Таким образом, каждое ребро имеет два инцидентора, которые называются *сопряженными.* Два инцидентора, примыкающие к одной вершине, называются *смежными.*

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество цветов обозначается через $\mathbb{N}$. *Интервалом* $[a, b]$, где $a \leqslant b$, называется множество цветов c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$. Длиной интервала $[a, b]$ называется величина $b - a + 1$, т. е. длина интервала — это число точек (цветов), которое ему принадлежит.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173).

Раскраска некоторого множества инциденторов — это отображение этого множества в $\mathbb{N}$.

Раскраска инциденторов называется *правильной,* если смежные инциденторы окрашиваются различно. Пусть имеется некоторая правильная раскраска инциденторов; *скачком* $h(e)$ на ребре e при этой раскраске называется модуль разности между цветами сопряженных инциденторов ребра e. Правильная раскраска инциденторов мультиграфа называется *p-раскраской,* если для любого ребра e выполняется условие $h(e) \geqslant p$. Она называется *(p,q)-раскраской,* где $p \leqslant q$, если $p \leqslant h(e) \leqslant q$ для любого ребра e. Будем говорить, что ребро e является p-раскрашенным, если $h(e) \geqslant p$; ребро e называется (p,q)-раскрашенным, если $p \leqslant h(e) \leqslant q$. Говоря о (p,q)-раскраске, мы будем всегда считать, что $p \leqslant q$. Будем говорить, что мультиграф G (p,q)-раскрашен (p-раскрашен), если все его рёбра (p,q)-раскрашены (p-раскрашены). Через $\chi(p,G)$ будем обозначать наименьшее k, при котором существует p-раскраска мультиграфа G с использованием цветов из интервала $[1,k]$. Аналогично, через $\chi(p,q,G)$ обозначается наименьшее k, при котором существует (p,q)-раскраска мультиграфа G с использованием цветов из интервала $[1,k]$. Легко видеть, что если $q'' \geqslant q' \geqslant p$, то

$$\chi(p,G) \leqslant \chi(p,q'',G) \leqslant \chi(p,q',G) \leqslant \chi(p,p,G).$$

Число $\chi(p,q,G)$ называется *(p,q)-хроматическим числом* мультиграфа G.

Наименьшее q, при котором $\chi(p,q,G) = \chi(p,G)$, будем обозначать через $\lambda(p,G)$ и называть *критическим скачком* при p-раскраске мультиграфа G. Очевидно, что всегда $\lambda(p,G) \geqslant p$.

Понятие (p,q)-раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа было введено в [4]. Полученный там результат, касающийся критического скачка при 0-раскраске ориентированного мультиграфа, переносится на неориентированный случай с большими упрощениями; это изложено в разделе 2 настоящей статьи.

Раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа, которая исследуется в настоящей работе, начала изучаться в [5]. Там было установлено, что если G — мультиграф степени Δ, то

$$\chi(p,G) = \max\{\Delta, \lceil \Delta/2 \rceil + p\}. \tag{1}$$

В [3] изучалась (p,p)-раскраска инциденторов мультиграфа при $p \geqslant 1$, которая называлась *жёсткой раскраской.* Были доказаны следующие три утверждения.

Утверждение 1. *Пусть G — произвольный мультиграф степени Δ*

и $p \geqslant \Delta/2 > 0$. Тогда при любых p и q, $q \geqslant p$, справедливы равенства $\chi(p,q,G) = \chi(p,G) = \lceil \Delta/2 \rceil + p$.

Утверждение 2. *Если $\Delta = 2pr$, где $p \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$, то для произвольного мультиграфа G степени Δ при любых p и q, $q \geqslant p$, выполняются равенства $\chi(p,q,G) = \chi(p,G) = \Delta$.*

Таким образом, при условиях, указанных в утверждениях 1 и 2, справедливо равенство $\lambda(p,G) = p$.

Утверждение 3. *Пусть G — мультиграф степени $\Delta = 2pr + S$, где $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ и $1 \leqslant S \leqslant 2p-1$. Тогда при любых q и p, $q \geqslant p$, справедливо неравенство*

$$\chi(p,q,G) \leqslant \Delta + p - \lfloor S/2 \rfloor. \tag{2}$$

Если H — однородный мультиграф указанной степени Δ, то

$$\chi(p,p,H) = \Delta + p - \lfloor S/2 \rfloor. \tag{3}$$

Соотношения между p и Δ, указанные в утверждениях 1–3, являются исчерпывающими в том смысле, что при $p \geqslant 1$ одно из них обязательно имеет место.

В настоящей статье мы будем, главным образом, изучать случай, когда $1 \leqslant p < \Delta/2$ и G имеет тот же вид, что и в утверждении 3. Оказывается, что тогда для любых двух однородных мультиграфов G и H степени Δ выполняется равенство $\chi(p,q,G) = \chi(p,q,H)$. Для однородного мультиграфа G степени Δ мы находим точное значение критического сдвига $\lambda(p,G)$ и доказываем, что при $p \leqslant q < \lambda(p,G)$ выполняется равенство $\chi(p,q,G) = \chi(p,p,G)$. Таким образом, при $p \geqslant 1$ решена задача точного определения критического сдвига и (p,q)-хроматического числа однородного мультиграфа. Для неоднородных мультиграфов в случаях, не охваченных утверждениями 1 и 2, приводятся верхние оценки этих величин. Не исключено, что задача точного отыскания (p,q)-хроматического числа и критического сдвига неоднородного мультиграфа NP-трудна.

1. Факторы мультиграфа

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые утверждения, относящиеся к факторам мультиграфа. Нам удобно будет немного отойти от принятой терминологии.

Мультиграф $F = (V, E')$ называется *фактором* мультиграфа $G = (V, E)$, если $E' \subseteq E$. Если $\Delta(F) \leqslant k$, то F называется *k-фактором.* Если при этом F является однородным мультиграфом степени k, то F называется *однородным k-фактором.*

Введём понятия чётных и нечётных инциденторов 2-фактора. Пусть F является 2-фактором (не обязательно однородным). Разобьём инциденторы фактора F на два таких равномощных класса, чтобы ни сопряжённые, ни смежные инциденторы не принадлежали одному классу. Это, очевидно, всегда можно сделать. Инциденторы одного класса (неважно какого) назовем чётными, инциденторы другого класса — нечётными. Понятия чётного и нечётного инциденторов будут использованы в разделах 2 и 3.

Известна теорема Петерсена [7], утверждающая, что любой однородный мультиграф положительной чётной степени имеет однородный 2-фактор. Из неё легко вытекают следующие утверждения.

Утверждение 4. *Пусть G — (однородный) мультиграф чётной степени $\Delta = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, где k_j — чётные натуральные числа $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Тогда G разбивается на (однородные) k_j-факторы F_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$.*

Утверждение 5. *Любой мультиграф нечётной степени Δ разбивается на $(\Delta + 1)/2$ 2-факторов.*

Будем говорить, что фактор F мультиграфа G *касается* вершины v мультиграфа, если степень вершины v в факторе F больше 0.

Будем называть *вилкой* связный 3-вершинный граф с двумя рёбрами. Каждая вилка имеет одну вершину степени 2, называемую *центром* вилки, и две вершины степени 1, называемые *концами* вилки. 2-фактор мультиграфа называется *вилочным,* если в нём каждая компонента связности является либо вилкой, либо ребром, либо изолированной вершиной. Если в вилочном факторе нет вилок, то его можно рассматривать как паросочетание. Понятие вилочного фактора было введено в статье [2]. Относительно вилочных факторов нам понадобится более сильное утверждение, чем утверждение из [2].

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени Δ. Тогда G имеет вилочный фактор F, касающийся всех вершин степени Δ и обладающий тем свойством, что никакие две вершины, принадлежащие различным вилкам, не смежны в G.*

Доказательство. Так как любой мультиграф добавлением рёбер и вершин всегда может быть превращен в однородный мультиграф той же степени, то лемму достаточно доказать только для однородных мультиграфов. Итак, пусть G — однородный мультиграф степени Δ. Утверждение очевидно, если $\Delta = 1$; поэтому будем предполагать, что $\Delta \geqslant 2$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Число Δ — чётное. Тогда по теореме Петерсена мультиграф G имеет однородный 2-фактор H. Будем строить требуемый вилочный фактор F следующим образом. Каждая компонента связности 2-фактора H представляет собой простой цикл. Каждый цикл с чётным числом вершин имеет паросочетание, касающееся всех вершин цикла; рёбра такого паросочетания будут рёбрами фактора F. Рассмотрим теперь нечётные циклы 2-фактора H (если таковые имеются). Если найдутся два различных нечётных цикла, соединённых рёбрами, то отнесём к фактору F паросочетание, образованное одним из соединяющих циклы рёбер и паросочетаний, составленных из рёбер циклов и касающихся всех вершин циклов, кроме концов соединяющего ребра. Повторяем эту процедуру насколько возможно для остальных нечётных циклов. В результате могут остаться нечётные циклы, обладающие тем свойством, что вершины различных циклов не смежны в G. В каждом таком цикле строим одну вилку и паросочетание, касающееся остальных вершин. Рёбра вилок и рёбра таких паросочетаний будут рёбрами фактора F. Осуществив указанные процедуры, мы получим вилочный фактор F, удовлетворяющий условиям леммы.

Случай 2. Число Δ — нечётное. Каждое ребро мультиграфа G заменим пучком из двух рёбер с теми же концевыми вершинами. Получится однородный мультиграф чётной степени 2Δ. По доказанному он имеет вилочный фактор, обладающий требуемыми свойствами. Рёбра этого фактора можно считать рёбрами мультиграфа G. Лемма 1 доказана.

2. (p,q)-раскраска при $p = 0$

Доказательство следующей теоремы является непосредственным следствием аналогичной теоремы [4], доказанной для ориентированных мультиграфов. Однако в неориентированном случае существенно проще доказательство.

Теорема 1. *Пусть G — мультиграф степени Δ. Тогда $\chi(0,1,G) = \Delta$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Число Δ — чётное. Разобьём G на 2-факторы $F_1, \ldots, F_{\Delta/2}$. Затем нечётные инциденторы каждого фактора F_j $(j = 1, \ldots, \Delta/2)$ окрасим в цвет $2j-1$, а чётные — в цвет $2j$. Получим (0, 1)-раскраску всех инциденторов мультиграфа G в цвета из интервала $[1, \Delta]$.

Случай 2. Число Δ — нечётное. Пусть $\Delta = 2k-1$, где $k \geqslant 1$. Без ограничения общности будем считать, что G — однородный мультиграф степени Δ. При $k = 1$ утверждение очевидно. При $k \geqslant 2$ разобьём G на 2-факторы $F_1, F_2, \ldots, F_k$, что возможно по утверждению 5. Так как G —

однородный мультиграф степени Δ, то для каждой вершины мультиграфа G выполняется условие: её степень в $k-1$ факторе из множества $F_1, F_2, \ldots, F_k$ равна 2, а в одном факторе из этого множества её степень равна 1. Будем последовательно, в порядке возрастания номеров 2-факторов, раскрашивать их инциденторы с помощью k-шагового алгоритма, j-й шаг которого $(1 \leqslant j \leqslant k)$ состоит в следующем: каждый нечётный инцидентор фактора F_j окрашиваем в цвет $2j-1$, а каждый чётный инцидентор — в наименьший цвет из $[1, \Delta]$, отсутствующий в вершине, к которой примыкает этот чётный инцидентор.

Ясно, что после того, как будет проделано k шагов, получится правильная раскраска всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, \Delta]$. Нужно только доказать, что все рёбра каждого фактора F_j окажутся раскрашенными со скачком, не превышающим 1.

Для этого индукцией по j докажем, что после осуществления j шагов и $(0,1)$-раскраски рёбер в факторах $F_1, \ldots, F_j$ в каждой вершине v мультиграфа G будет выполняться одно из условий:

1) если v имеет степень 2 в каждом из факторов $F_1, \ldots, F_j$, то в v присутствуют все цвета из $[1, 2j]$ и отсутствуют остальные цвета из $[1, \Delta]$;

2) если степень вершины v в одном из факторов $F_1, \ldots, F_j$ равна 1, то в v присутствуют все цвета из $[1, 2j-1]$ и отсутствуют остальные цвета из $[1, \Delta]$.

При $j = 1$ это так, потому что после $(0,1)$-раскраски всех рёбер фактора F_1 в каждой вершине степени 2 фактора F_1 будут использованы цвета 1 и 2, а в каждой вершине степени 1 фактора F_1 будет использован цвет 1. Пусть теперь $j = m$, где $2 \leqslant m \leqslant k$, и пусть уже произведена раскраска инциденторов факторов $F_1, \ldots, F_{m-1}$. Приступим к выполнению m-го шага, т. е. к раскраске инциденторов фактора F_m. Рассмотрим произвольную вершину v' степени 1 фактора F_m. Степень вершины v' в каждом из факторов $F_1, \ldots, F_{m-1}$ равна 2 и по предположению индукции после (0, 1)-раскраски факторов $F_1, \ldots, F_{m-1}$ в вершине v' присутствуют все цвета из $[1, 2m-2]$. Поэтому на m-м шаге единственный примыкающий к v' инцидентор фактора F_m окрашивается в цвет $2m-1$ независимо от того, чётный или нечётный F_m; после этого в v' будут присутствовать все цвета из $[1, 2m-1]$. Теперь рассмотрим произвольную вершину v'' степени 2 фактора F_m. Примыкающий к ней нечётный инцидентор окрашивается в цвет $2m-1$. Далее, если после совершения $m-1$ шага в v'' присутствуют все цвета из $[1, 2m-2]$, то примыкающий к v'' чётный инцидентор окрашивается в цвет $2m$, и в v'' оказываются использованными все цвета из $[1, 2m]$. Если после совершения $m-1$ шага

в v'' присутствуют все цвета из $[1, 2m - 3]$, но отсутствовал цвет $2m - 2$, то примыкающий к v'' чётный инцидентор окрашивается в цвет $2m - 2$; после этого в v'' будут присутствовать только все цвета из $[1, 2m - 1]$. Таким образом, после раскраски всех инциденторов фактора F_m мы получим требуемую раскраску всех инциденторов факторов $F_1, F_2, \ldots, F_m$, а после раскраски инциденторов фактора F_k получится (0,1)-раскраска всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, \Delta]$. Теорема 1 доказана.

Очевидно, что $(0, 0)$-раскраска инциденторов совпадает с правильной раскраской рёбер. Известно [8], что при $\Delta \geqslant 2$ для правильной раскраски рёбер мультиграфа степени Δ может потребоваться не более $\lfloor (3/2)\Delta \rfloor$ цветов. При этом для любых m и Δ, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant \Delta \leqslant m \leqslant \lfloor (3/2)\Delta \rfloor$, можно построить однородный мультиграф G степени Δ, у которого $\chi(0, 0, G) = m$. Как мы увидим ниже (p, q)-хроматическое число однородного мультиграфа при $p \geqslant 1$ в зависимости от q может принимать не более двух значений.

Отметим, что задача определения того, когда для произвольного мультиграфа G степени выполняется равенство $\chi(0, 0, G) = \Delta$, является NP-трудной [6].

3. Стандартная раскраска инциденторов

Понятие стандартной p-раскраски инциденторов вводится только для мультиграфов чётной степени при $p \geqslant 1$. Итак, пусть G — мультиграф чётной степени $\Delta \geqslant 2p \geqslant 2$. Тогда Δ можно представить в виде $\Delta = 2pr + 2a$, где $r \geqslant 1$ и $0 \leqslant 2a \leqslant 2p - 2$. Представив $2a$ в виде $2a = 2sr + 2t$, где $s \geqslant 0$ и $0 \leqslant 2t \leqslant 2r - 2$, получим

$$\Delta = 2(p + s)r + 2t, \tag{4}$$

где

$$p \geqslant 1, \quad r \geqslant 1, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant r - 1, \quad 0 \leqslant sr + t \leqslant p - 1. \tag{5}$$

Перепишем формулу (4) в виде

$$\Delta = 2(p + s + 1)t + 2(p + s)(r - t). \tag{6}$$

Разобьём интервал $[1, \Delta]$ на r интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_r, b_r]$, где $a_1 = 1$; $a_{j+1} = b_j + 1$ $(j = 1, 2, \ldots, r - 1)$; $b_j = a_j + 2(p + s) - 1$ при $t + 1 \leqslant j \leqslant r$; $b_j = a_j + 2(p + s + 1) - 1$ при остальных j из интервала $[1, r]$. Эти r интервалов будем называть *зонами*; длина интервала $[a_i, b_i]$ называется шириной i-й зоны $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Первые t зон называются

широкими; ширина каждой из них равна $2(p+s+1)$. Остальные $r-t$ зон называются узкими; ширина каждой из них равна $2(p+s)$. Таким образом, зоны пронумерованы в порядке невозрастания ширины. Последняя r-я зона всегда является узкой; первая же зона является узкой только в том случае, когда $t=0$.

Каждая зона подразделяется на нижнюю и верхнюю части. Нижняя часть — это интервал, образованный половиной меньших точек зоны, верхняя часть — это интервал, образованный половиной больших точек. Нижняя и верхняя части зоны имеют одну и туже ширину, равную половине ширины зоны.

Определим понятие стандартной p-раскраски инциденторов мультиграфа G. В силу утверждения 4 и формулы (6) мультиграф G разбивается на r факторов H_j $(j=1,\dots,r)$ таких, что при $j\leqslant t$ факторы H_j являются $2(p+s+1)$-факторами, а при $j=t+1,\dots,r$ факторы H_j являются $2(p+s)$-факторами. Инциденторы факторов H_j будем красить цветами из j-й зоны следующим образом. Каждый фактор H_j $(1\leqslant j\leqslant r)$ разбивается на 2-факторы $F_{j,1},F_{j,2}\dots,F_{j,h}$, число которых равно ширине нижней (или верхней, что то же самое) части j-й зоны. Каждый нечётный инцидентор фактора $F_{j,k}$ $(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant k\leqslant h)$ окрасим в k-й снизу цвет нижней части j-й зоны, а каждый чётный инцидентор — в k-й снизу цвет верхней части j-й зоны. При $j\leqslant t$ получим $(p+s+1,p+s+1)$-раскраску всех рёбер фактора H_j в цвета из j-й зоны, а при $t+1\leqslant j\leqslant r$ получим $(p+s,p+s)$-раскраску всех рёбер фактора H_j цветами из j-й зоны. В итоге получается p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1,\Delta]$, при которой максимальный скачок равен $p+s$, если $t=0$, и равен $p+s+1$, если $t\geqslant 1$. Такая p-раскраска инциденторов называется *стандартной.*

Таким образом, при стандартной раскраске инциденторов мультиграфа G чётной степени Δ, удовлетворяющей условиям (4), (5), выполняются неравенства $\lambda(p,G)\leqslant p+s$ при $t=0$ и $\lambda(p,G)\leqslant p+s+1$ при $t\geqslant 1$. В более компактной форме полученный результат сформулируем в следующем виде.

Лемма 2. *Пусть G — мультиграф чётной степени Δ, удовлетворяющей условиям* (4) *и* (5). *Тогда*

$$\lambda(p,G)\leqslant p+s+\lceil t/(t+1)\rceil. \tag{7}$$

Существует стандартная p-раскраска мультиграфа G цветами из $[1,\Delta]$, при которой максимальный скачок на ребре равен $p+s+\lceil t/(t+1)\rceil$.

4. (p,q)-раскраска мультиграфов чётной степени

Ответ на вопрос о (p,q)-раскраске мультиграфа G степени $\Delta = 2pr$, где $p \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$, даёт утверждение 2. Поэтому мы будем считать, что $\Delta \neq 2pr$. Так как при $p = 1$ и чётном Δ это невозможно, то пусть

$$\Delta = 2(p+s)r + 2t, \tag{8}$$

где

$$p \geqslant 2, \quad r \geqslant 1, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant r-1, \quad 1 \leqslant sr + t \leqslant p-1. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть G — мультиграф чётной степени , удовлетворяющей условиям (8) и (9). Тогда при любом $q \geqslant p$ выполняется неравенство*

$$\chi(p,q,G) \leqslant \Delta + p - sr - t. \tag{10}$$

Если G — однородный мультиграф указанной степени Δ, то

$$\chi(p,p,G) = \Delta + p - sr - t. \tag{11}$$

Доказательство. Положим $S = 2sr + 2t$ и применим формулы (2) и (3). Лемма 3 доказана.

Перед формулировкой теоремы 2 заметим, что при условиях (9) имеет место неравенство $p + s + \lceil t/(t+1) \rceil > p$.

Теорема 2. *Пусть $G = (V,E)$ — однородный мультиграф чётной степени Δ, удовлетворяющей условиям (8) и (9). Тогда при условии*

$$q \geqslant p + s + \lceil t/(t+1) \rceil \tag{12}$$

выполняется равенство

$$\chi(p,q,G) = \Delta, \tag{13}$$

а при условии

$$p \leqslant q < p + s + \lceil t/(t+1) \rceil \tag{14}$$

выполняются равенства

$$\chi(p,q,G) = \chi(p,p,G) = \Delta + p - sr - t. \tag{15}$$

Доказательство. Так как $\chi(p, G) = \Delta$ по формуле (1), то справедливость равенства (13) при условии (12) вытекает из (7). Пусть теперь q удовлетворяет неравенствам (14). Покажем, что тогда

$$\chi(p, q, G) \geqslant \Delta + p - sr - t. \tag{16}$$

Предположим противное: пусть при условии (14) существует (p, q)-раскраска мультиграфа G с использованием цветов из $[1, \Delta + p - sr - t - 1]$. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию. Обозначим для краткости $k = \Delta + p - sr - t - 1 = p(2r+1) + sr + t - 1$. Рассмотрим семейство R, состоящее из $r+1$ интервала вида $[1 + (p + q)(j-1), (p+q)(j-1) + p]$ $(j = 1, \ldots, r+1)$. Очевидно, что R является семейством непересекающихся интервалов длины p. Так как $(p+q)r+p \leqslant (p+p+s+t/(t+1)-1)r+p = k+t/(t+1)r-r-t+1 \leqslant k$ при $t \geqslant 0$, то каждый интервал семейства R вложен в интервал $[1, k]$.

Теперь заметим, что модуль разности между любыми двумя точками, которые принадлежат различным интервалам семейства R, не меньше $q+1$. Поэтому при (p, q)-раскраске мультиграфа G по меньшей мере один инцидентор каждого ребра окрашен в цвет, не принадлежащий интервалам семейства R. Но число цветов из $[1, k]$, не принадлежащих интервалам семейства R, равно $k - p(r+1) = pr + sr + t - 1$. Так как (p, q)-раскраска инцидентов является правильной, то в каждый цвет из $[1, k]$ окрашено не более n инцидентов мультиграфа G, где n — число вершин мультиграфа G. Поэтому число рёбер мультиграфа G не может быть больше $(pr+sr+t-1)n$. На самом же деле, так как G — однородный n-вершинный мультиграф, то из (8) следует, что $|E| = (pr+sr+t)n > (pr+sr+t-1)n$. Полученное противоречие доказывает (16). Из (16) и (10) следует (15). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть G — однородный мультиграф чётной степени Δ, удовлетворяющей условиям (4) и (5). Тогда $\lambda(p, G) = p + s + \lceil t/(t+1) \rceil$.*

Следствие 2. *Если G — мультиграф чётной степени Δ, то при $p \geqslant 1$ выполняется равенство $\chi(p, 2p-1, G) = \chi(p, G)$.*

Доказательство. Нужно убедиться в справедливости неравенства $\lambda(p, G) \leqslant 2p - 1$. При $p \geqslant \Delta/2$ в силу утверждения 1 имеем $\lambda(p, G) = p \leqslant 2p - 1$. Если же $p < \Delta/2$, то воспользуемся неравенством (7). Так как $r \geqslant 1$ и $sr + t \leqslant p - 1$ по условиям (5), то $s \leqslant p - 1$ при $t = 0$ и $s \leqslant p - 2$ при $t \geqslant 1$. В обоих случаях $s + \lceil t/(t+1) \rceil \leqslant p - 1$ и требуемое неравенство $\lambda(p, G) \leqslant 2p - 1$ вытекает из (7). Следствие 2 доказано.

Для следующего раздела нам потребуется

Лемма 4. *Пусть $H = (V, E)$ — мультиграф чётной степени Δ, удовлетворяющей условиям (4), (5), и пусть $V' \subset V$ — подмножество попарно несмежных вершин, степень каждой из которых равна $\Delta - 1$. Тогда существует такая p-раскраска g мультиграфа H цветами из $[1, \Delta]$, при которой*

(i) *максимальный скачок для всех рёбер мультиграфа H не более $p + s + 1$;*

(ii) *каждое ребро, один из инциденторов которого окрашен в цвет из интервала $[\Delta - p - s + 1, \Delta]$, раскрашено со скачком $p + s$;*

(iii) *в каждой вершине множества V' отсутствует цвет из интервала $[\Delta - 2p - 2s + 1, \Delta]$.*

Доказательство. Построим стандартную p-раскраску f всех инциденторов мультиграфа H с помощью Δ цветов, что возможно по лемме 2. Цвета из $[1, \Delta]$ разобьются на зоны. В частности, интервал $[\Delta - 2p - 2s + 1, \Delta]$ будет r-й зоной ширины $2(p + s)$, а интервал $[\Delta - p - s + 1, \Delta]$ — верхней частью r-й зоны, причем условия (i), (ii) при раскраске f выполняются. Обозначим через α_k и α'_k соответственно наименьший и наибольший цвета нижней части k-й зоны, а через β_k, β'_k — соответственно наименьший и наибольший цвета верхней части k -й зоны ($k = 1, \ldots, r$).

Для получения раскраски g будем перекрашивать только инциденторы, примыкающие к вершинам множества V'. Так как эти вершины попарно не смежны, то перекрашивая инциденторы, примыкающие к одной из них, мы не меняем скачки при раскраске рёбер, инцидентных другим вершинам из V'. Перекраска инциденторов осуществляется следующим образом.

Пусть v — произвольная вершина из V'. Так как $d(v) = \Delta - 1$, то при раскраске f в вершине v отсутствует один цвет $\gamma \in [1, \Delta]$. Если γ принадлежит r-й зоне, то перекраска примыкающих к v инциденторов не производится. Предположим, что γ принадлежит j-й зоне, где $1 \leqslant j \leqslant r - 1$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. j-я зона является узкой и цвет γ принадлежит её верхней части. Тогда все зоны, номера которых не меньше j, имеют ширину $2(p+s)$. Увеличим на 1 цвета тех примыкающих к v инциденторов, которые при раскраске f принадлежали верхней части j-й зоны и были меньше γ. Рёбра, содержащие эти инциденторы, окажутся раскрашенными со скачком $p + s + 1$, а в вершине v не будет цвета β_j. Далее поступаем следующим образом. Пусть E' — множество инцидентных вершине v рёбер, у которых при раскраске f примыкающие к v инциденторы имеют цвета β_m, а сопряженные инциденторы — цвета α_m соответственно ($m =$

$j+1, \ldots, r$). Каждый инцидентор цвета β_m перекрасим в цвет β_{m-1}. Так как $\beta_m - \beta_{m-1} = p + s$, то после перекраски все рёбра из E' окажутся раскрашенными со скачком $p+s$, а в вершине v не будет цвета β_r из r-й зоны. Так как при перекраске инциденторов рёбер из множества $E \setminus E'$ цвета не изменялись, то полученная раскраска удовлетворяет условиям (i) и (iii); при этом в вершине v отсутствует цвет из r-й зоны.

Случай 2. j-я зона является широкой и цвет γ принадлежит её верхней части. Уменьшим на 1 цвета тех примыкающих к v инциденторов, которые при раскраске f принадлежали верхней части j-й зоны и были больше γ. Рёбра, содержащие эти инциденторы, окажутся раскрашенными со скачком $p + s$, а в вершине v не будет цвета β'_j. Затем каждый примыкающий к v инцидентор цвета β'_m перекрасим в цвет β'_{m-1}, $m = j+1, \ldots, r$. Так как $p+s \leqslant \alpha'_m - \beta'_{m-1} \leqslant p+s+1$, то после перекраски получится p-раскраска мультиграфа H, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), при которой в вершине v отсутствует цвет $\beta'_r = \Delta$ из r-й зоны.

Случай 3. j-я зона является узкой и цвет γ принадлежит её нижней части. Тогда ширину $p + s$ имеют все части зон, номера которых не меньше j. Рассмотрим примыкающие к v инциденторы, которые при f окрашены в цвета, принадлежащие нижней части j-й зоны и большие γ. Уменьшим на 1 цвета всех таких инциденторов. Рёбра, содержащие эти инциденторы, окажутся раскрашенными со скачком $p+s+1$, а в вершине v не будет цвета α'_j. Рассмотрим примыкающий к v инцидентор, окрашенный в цвет β_{j+1}; сопряженный ему инцидентор окрашен в цвет α_{j+1}. Перекрасим в цвет α'_j примыкающий к v инцидентор цвета α_{j+1}. Ребро, содержащее этот инцидентор, станет окрашенным со скачком $p + s + 1$, так как $\alpha_{j+1} - \alpha'_j = p + s + 1$. После перекраски в вершине v будет отсутствовать цвет β_{j+1}. Совершив далее перекраску примыкающих к v инциденторов так же, как и в случае 1, мы получим p-раскраску мультиграфа H, удовлетворяющую условиям (i) и (ii), при которой в вершине v отсутствует цвет β_r из r-й зоны.

Случай 4. j-я зона является широкой и цвет γ принадлежит ее нижней части. Рассмотрим примыкающие к v инциденторы, которые окрашены в цвета нижней части j-й зоны, меньшие γ. Увеличим на 1 цвета всех таких инциденторов. Рёбра, содержащие эти инциденторы, окажутся раскрашенными со скачком $p + s$, а в вершине v не будет цвета α_j. Так как j -я зона является широкой, то $\alpha'_j - \alpha_j = p + s$. Перекрасим в цвет α_j примыкающий к v инцидентор, который при раскраске f имел цвет β'_j. Ребро, содержащее этот инцидентор, станет раскрашенным со скачком $\alpha'_j - \alpha_j = p+s$, а в вершине v не будет цвета β'_j. Совершив далее

перекраску примыкающих к v инциденторов так же, как и в случае 2, мы получим p-раскраску мультиграфа H, удовлетворяющую условиям (i) и (ii), при которой в вершине v отсутствует цвет $\beta'_r = \Delta$ из r-й зоны. После описанной перекраски инциденторов, примыкающих к каждой вершине степени $\Delta - 1$, мы получим требуемую p-раскраску g мультиграфа H. Лемма 4 доказана.

5. Мультиграфы нечётной степени

Если G — мультиграф нечётной степени $\Delta > 2p$, то чётное число $\Delta - 1$ может быть представлено в виде (4) с соблюдением условий (5). Поэтому имеем

$$\Delta = 2(p + s)r + 2t + 1, \tag{17}$$

где

$$p \geqslant 1, \quad r \geqslant 1, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant r - 1, \quad 0 \leqslant sr + t \leqslant p - 1. \tag{18}$$

Из формулы (1) следует, что при этих условиях $\chi(p, G) = \Delta$.

Лемма 5. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф нечётной степени Δ, записанной в виде* (17) *с соблюдением условий* (18). *Тогда*

$$\lambda(p, G) \leqslant p + s + 1. \tag{19}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что G — однородный мультиграф степени Δ. По лемме 1 существует такой вилочный фактор F мультиграфа G, касающийся всех вершин мультиграфа, что вершины, принадлежащие разным вилкам фактора F, не смежны в мультиграфе G. Обозначим через V' множество, состоящее из центров вилок, через W множество рёбер фактора F, входящих в вилки, через M множество остальных рёбер фактора F, которое является паросочетанием. (Одно из множеств M и W может оказаться пустым; тогда рассуждения, касающиеся такого множества, можно проигнорировать). Удалим из G все рёбра фактора F. Получим мультиграф $H = (V, E')$ чётной степени $\Delta - 1$, в котором V' — подмножество попарно несмежных вершин степени $\Delta - 2$. Построим p-раскраску g мультиграфа H с использованием цветов из $[1, \Delta - 1]$, удовлетворяющую условиям леммы 4. При этой раскраске в каждой вершине множества V' будет отсутствовать один цвет из $[\Delta - 2p - 2s, \Delta - 1]$, а в каждой из остальных вершин будут присутствовать все цвета из $[1, \Delta - 1]$.

Теперь приступим к раскраске инциденторов фактора F. Раскрасим

инциденторы рёбер из W. Рассмотрим произвольную вилку; пусть она образована рёбрами $e_1 = (v_1, v_2)$ и $e_2 = (v_2, v_3)$, где v_2 — центр вилки. Сначала раскрасим инциденторы ребра e_1. Рассмотрим инциденторы, которые примыкают к v_1 и окрашены в цвета, принадлежащие интервалу $[\Delta - p - s, \Delta - 1]$. Увеличим на 1 цвета таких инциденторов. Инцидентор (v_1, e_1) окрасим в цвет $\Delta - p - s$, а инцидентор (v_2, e_1) — в цвет Δ. Ребро e_1 будет раскрашено со скачком $p + s$. Теперь раскрасим инциденторы ребра e_2. Предположим, что при раскраске g в вершине v_2 отсутствовал цвет μ , принадлежащий интервалу $[\Delta - 2p - 2s, \Delta - 1]$. Если $\mu \in [\Delta - 2p - 2s, \Delta - p - s - 1]$, то инцидентор (v_2, v_3) окрашиваем в цвет μ ; затем увеличиваем на 1 цвета тех примыкающих к v_3 инциденторов, которые при раскраске g были не меньше $\mu + p + s$, и окрашиваем инцидентор (v_3, e_2) в цвет $\mu + p + s$. Ребро e_2 будет раскрашено со скачком $p + s$. Если $\mu \in [\Delta - p - s, \Delta - 1]$, то увеличим на 1 цвета примыкающих к v_2 инциденторов, которые при раскраске g принадлежали интервалу $[\Delta - p - s, \Delta - 1]$ и были меньше μ, затем окрашиваем инцидентор (v_2, e_2) в цвет $\Delta - p - s$, а инцидентор (v_3, e_2) в цвет Δ. Ребро e_2 окажется раскрашенным со скачком $p + s$. Подобным образом раскрашиваем инциденторы всех рёбер множества W.

Приступим к раскраске инциденторов множества M. Пусть $e' = (v', v'')$ — произвольное ребро из M. Рассмотрим инциденторы, примыкающие к вершине v' и окрашенные в цвета́ из $[\Delta - p - s, \Delta - 1]$. Увеличим на 1 цвета́ таких инциденторов. Содержащие их рёбра станут раскрашенными со скачком $p + s + 1$, так как при раскраске g они были раскрашены со скачком $p + s$, а перекраска примыкающих к другим вершинам инциденторов с цветами из $[\Delta - p - s, \Delta - 1]$ не затронула раскраски этих рёбер. После указанного увеличения на 1 цветов примыкающих к v' инциденторов в вершине v' будет отсутствовать цвет $\Delta - p - s$. В этот цвет окрасим инцидентор (v', e'), а инцидентор (v'', e') окрасим в цвет Δ. Ребро e' будет раскрашено со скачком $p + s$. Подобным образом раскрашиваем все инциденторы рёбер множества M. В результате будет получена p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G с помощью цветов из $[1, \Delta]$, при которой максимальный скачок не превосходит $p + s + 1$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G — мультиграф нечётной степени Δ, удовлетворяющей условиям* (17) *и* (18). *Тогда при любом $q \geqslant p$ выполняются соотношения*

$$\lambda(p, q, G) \leqslant \Delta + p - sr - t. \tag{20}$$

Если G — однородный мультиграф указанной степени Δ, то

$$\lambda(p, p, G) = \Delta + p - sr - t. \tag{21}$$

Доказательство. Положим $S = 2sr + 2t + 1$ и применим формулы (2) и (3). Лемма 6 доказана.

Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть $G = (V, E)$ — однородный мультиграф нечётной степени Δ, удовлетворяющей условиям* (17) *и* (18). *Тогда при условии*

$$q \geqslant p + s + 1 \tag{22}$$

выполняется равенство

$$\lambda(p, q, G) = \Delta, \tag{23}$$

а при условии

$$p \leqslant q \leqslant p + s \tag{24}$$

выполняются равенства

$$\chi(p, q, G) = \chi(p, p, G) = \Delta + p - sr - t. \tag{25}$$

Доказательство. Так как $\lambda(p, G) = \Delta$ по формуле (1), то справедливость равенства (23) при условии (22) вытекает из неравенства (19). Пусть теперь q удовлетворяет неравенствам (24). Покажем, что в этом случае

$$\lambda(p, q, G) \geqslant \Delta + p - sr - t. \tag{26}$$

Предположим противное: пусть при условии (24) существует (p, q)-раскраска мультиграфа G с использованием цветов из $[1, \Delta + p - sr - t - 1]$. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию. Обозначим для краткости $k = \Delta + p - sr - t - 1 = p(2r + 1) + sr + t$. Рассмотрим семейство R, состоящее из $r + 1$ интервалов длины p вида $[1 + (p + q)(j - 1), (p + q)(j - 1) + p]$ $(j = 1, \ldots, r + 1)$. Покажем, что каждый интервал семейства R вложен в интервал $[1, k]$. Действительно, левый конец каждого интервала не меньше 1, а самый большой правый конец $(r + 1)$-го интервала не больше k, так как он равен $(p + q)r + p \leqslant (2p + s)r + p = p(2r + 1) + sr = k - t \leqslant k$.

Теперь заметим, что модуль разности между любыми двумя точками, принадлежащими различным интервалам семейства R, не меньше $q + 1$. Поэтому при (p, q)-раскраске мультиграфа G хотя бы один инцидентор каждого ребра окрашен в цвет, не принадлежащий интервалам семейства R. Но число цветов из $[1, k]$, не принадлежащих интервалам семейства R, равно $k - p(r + 1) = pr + sr + t$. Так как (p, q)-раскраска инциденторов является правильной, то в каждый цвет из $[1, k]$ окрашено не больше

n инциденторов мультиграфа G, где n — число вершин мультиграфа. Поэтому число рёбер $|E|$ мультиграфа G не может быть более $(pr + sr + t)n$. С другой стороны, из (17) следует, что

$$|E| = (pr + sr + t)n + n/2 > (pr + sr + t)n.$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (26). Из (26) и (20) следует (25). Теорема 3 доказана.

Так как $\Delta + p - sr - t > \Delta$ в силу условий (18), то теорема 3 показывает, что наименьшее q, при котором выполняется равенство (23), равно $p + s + 1$. Иными словами имеет место

Следствие 3. *Если G — однородный мультиграф нечётной степени Δ, удовлетворяющей условиям* (17) *и* (18), *то* $\lambda(p, G) = p + s + 1$.

Для произвольных (не обязательно однородных) мультиграфов справедливо

Следствие 4. *Если G — мультиграф нечётной степени Δ, то при $p \geqslant 1$ справедливо равенство $\chi(p, 2p, G) = \chi(p, G)$.*

Доказательство. Нужно убедиться в справедливости неравенства $\lambda(p, G) \leqslant 2p$. При $p \geqslant \Delta/2$ в силу утверждения 1 имеем $\lambda(p, G) = p \leqslant 2p$. Если же $p < \Delta/2$, то число Δ можно представить в виде (17) при соблюдении условий (18). По лемме 5 имеет место неравенство $\lambda(p, G) \leqslant p + s + 1$, а из (18) вытекает, что $s + 1 \leqslant p$. Поэтому $\lambda(p, G) \leqslant 2p$. Следствие 4 доказано.

Заключение

Утверждения 1, 2 и теоремы 2, 3 для однородного мультиграфа произвольной степени Δ позволяют точно определить значение (p, q)-хроматического числа при любых p и q, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant p \leqslant q$. При фиксированных p и q это значение зависит только от Δ и не зависит от других структурных особенностей мультиграфа, т. е. для любых двух однородных мультиграфов G и H степени Δ всегда имеет место равенство $\chi(p, q, G) = \chi(p, q, H)$. При $p \geqslant 1$ то же самое можно сказать и о критическом сдвиге при p-раскраске. Любопытно отметить, что (p, q)-хроматическое число однородного мультиграфа G степени Δ при $p \geqslant 1$ и $\Delta \geqslant 2p$ в зависимости от q может принимать только два значения: Δ и $\chi(p, p, G)$; эти два значения совпадают тогда и только тогда, когда $\Delta = 2pr$ $(r \geqslant 1)$. Как было показано в разделе 2, при $p = 0$ ситуация иная.

Что же касается неоднородных мультиграфов, то при условиях утверждений 1 и 2 (p, q)-хроматическое число и критический сдвиг таких мультиграфов определяются точно. Для остальных случаев в настоящей статье приведены верхние оценки этих характеристик. Более подробно этот вопрос не изучался.

В заключение отметим, что утверждения, аналогичные следствиям 2 и 4, не имеют места в случае ориентированных мультиграфов. Так, в [1] показано, что можно построить ориентированный мультиграф G произвольной степени $\Delta \geqslant 3$, для которого равенство $\chi(1, q, G) = \chi(1, G)$ выполняется только при $q \geqslant \Delta - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
2. **Визинг В. Г.** Факторная раскраска рёбер мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 2. С. 18–31.
3. **Визинг В. Г.** Жесткая раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 3–8.
4. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 20–37.
5. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
6. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 718–720.
7. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.
8. **Shannon C.** A theorem on coloring the lines of a network // J. Math. and Physics. 1949. V. 28. P. 148–151.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
15 июля 2005 г.