ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2005. Серия 1. Том 12, № 4, 51–59

УДК 519.172

О СПЕЦИАЛЬНЫХ СОВЕРШЕННЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЯХ В БУЛЕВОМ КУБЕ*)

А. Л. Пережогин

Для $n = 4$ и $n > 5$ предложена конструкция такого совершенного паросочетания M в n-мерном булевом кубе E^n, что множество рёбер, находящихся в пересечении M с любой гранью размерности k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, куба E^n, не является совершенным паросочетанием в этой грани. Показано, что при $n = 5$ таких паросочетаний нет.

Введение

Для ряда комбинаторных задач [1, 2, 5] представляется интересным изучение структуры произвольных совершенных паросочетаний в булевом кубе размерности n [4]. Особый интерес вызывают паросочетания, в которых есть рёбра всех направлений и они расположены по булевому кубу равномерно.

Известно [6], что совершенное паросочетание в булевом кубе размерности n (n-кубе), не индуцирующее совершенное паросочетание во всех гранях размерности 2, существует при любом $n \geqslant 4$ (для построения такого паросочетания достаточно использовать рёбра четырех направлений). Иными словами, такие паросочетания не содержат близких рёбер одного направления. В [3, 7] при всех $n = 2^k$, $k \geqslant 2$, построены совершенные паросочетания в булевом n-кубе, у которых рёбра одного направления максимально удалены друг от друга, т. е. все рёбра паросочетания, попадающие в любую грань размерности 3, имеют разные направления. Такие паросочетания соответствуют совершенным троичным равновесным кодам с расстоянием 3 [3]. Но эти паросочетания могут индуцировать совершенные паросочетания уже в гранях размерности 4.

В настоящей статье предлагается индуктивная конструкция совершенных паросочетаний в булевом n-кубе, $n \geqslant 4$, $n \neq 5$, не индуцирующих совершенные паросочетания ни в какой грани размерности k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00364) и проекта Университеты России (ур.04.01.199).

В § 2 приведена база индукции для чётных n и доказывается, что в пятимерном булевом кубе таких паросочетаний нет. В § 3 приводится конструкция и база индукции для нечётных n.

§ 1. Предварительные сведения

Через E^n обозначим n-мерный булев куб, т. е. неориентированный граф с 2^n вершинами, которые помечены двоичными наборами длины n. В этом графе две вершины смежны тогда и только тогда, когда сопоставленные им наборы отличаются только в одной позиции. Расстоянием Хемминга между произвольными вершинами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из E^n называется величина

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

где $\oplus$ – сложение по модулю 2.

Словом $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{0, 1, *\}$ обозначим подмножество вершин графа E^n

$$(a_1, \ldots, a_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E^n |\text{ если } a_i \neq *, \text{ то } x_i = a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

которые образуют грань размерности k в кубе E^n (т. е. подграф, изоморфный графу E^k), где k – число звездочек в слове $\mathbf{a}$. Если в $\mathbf{a}$ нет звездочек, то $\mathbf{a}$ является вершиной в E^n, если в $\mathbf{a}$ есть ровно одна звездочка, то $\mathbf{a}$ образует ребро, причём если звездочка стоит в i-ой позиции, то будем говорить, что соответствующее ребро имеет направление i. Заметим, что символ $*$ можно трактовать как множество $\{0, 1\}$.

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – грани куба E^n и $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$, то говорим, что $\mathbf{a}$ является подгранью грани $\mathbf{b}$. Заметим, что пересечение двух граней либо пусто, либо является гранью.

Произвольное подмножество попарно несмежных рёбер булева куба E^n называется паросочетанием в E^n. Паросочетание, покрывающее все вершины E^n, называется совершенным. Число рёбер в паросочетании называется размером паросочетания. Заметим, что паросочетание в E^n является совершенным тогда и только тогда, когда его размер равен 2^{n-1}.

Пусть M – совершенное паросочетание в E^n и $\mathbf{a}$ – грань. Пересечением $M \cap \mathbf{a}$ обозначим множество рёбер из M, принадлежащих грани $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a}$ имеет размерность k, то $M \cap \mathbf{a}$ является совершенным паросочетанием в $\mathbf{a}$, если $|M \cap \mathbf{a}| = 2^{k-1}$.

Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ – грань в E^n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$, то через $\mathbf{a}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ обозначим грань $(a_1, \ldots, a_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ в булевом кубе E^{n+k}. Для совершенного паросочетания M в E^n определим

$$M(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \{\mathbf{e}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) | \mathbf{e} \in M\}.$$

Совершенное паросочетание M в E^n назовём *специальным,* если для любой грани $\mathbf{a}$ размерности $k,\ 2 \leqslant k \leqslant n-1$, в E^n

$$|M \cap \mathbf{a}| \neq 2^{k-1},$$

т. е. $M \cap \mathbf{a}$ не является совершенным паросочетанием в $\mathbf{a}$.

Назовём *правильной восьмеркой* следующий набор объектов $(M^n_{00},\ M^n_{01},\ M^n_{11},\ M^n_{10},\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4)$, где

a) $M^n_{\alpha_1\alpha_2}$ – специальное паросочетание в E^n при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,\ 1\}$;

b) если $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (\beta_1,\ \beta_2)$, то $M^n_{\alpha_1\alpha_2} \cap M^n_{\beta_1\beta_2} = \varnothing$;

c) существуют такие $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2} \in \{0,\ 1\}$, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ 0,\ *) \in M^n_{00},\\
\mathbf{e}_2 &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ *,\ 1) \in M^n_{01},\\
\mathbf{e}_3 &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ 1,\ *) \in M^n_{11},\\
\mathbf{e}_4 &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ *,\ 0) \in M^n_{10}.
\end{aligned}$$

Заметим, что рёбра $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4$ образуют цикл в E^n.

§ 2. Специальные паросочетания в малых размерностях куба

Очевидна следующая

Лемма 1. *С точностью до автоморфизма куба в E^3 существуют ровно два совершенных паросочетания*

$$M^3_1 = \{(0,\,0,\,*),\ (0,\,1,\,*),\ (1,\,0,\,*),\ (1,\,1,\,*)\}$$

и

$$M^3_2 = \{(0,\,0,\,*),\ (0,\,1,\,*),\ (1,\,*,\,0),\ (1,\,*,\,1)\},$$

причём оба паросочетания не являются специальными.

Лемма 2. *В E^4 существует правильная восьмерка.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что совершенные паросочетания

$$
\begin{array}{llll}
M^4_{00} = \{(0,\,0,\,0,\,*), & M^4_{01} = \{(1,\,0,\,0,\,*), & M^4_{11} = \{(0,\,0,\,1,\,*), & M^4_{10} = \{(0,\,1,\,0,\,*),\\
\quad (1,\,0,\,*,\,0), & \quad (0,\,0,\,*,\,1), & \quad (0,\,1,\,*,\,0), & \quad (0,\,0,\,*,\,0),\\
\quad (0,\,*,\,1,\,0), & \quad (0,\,*,\,0,\,0), & \quad (0,\,*,\,0,\,1), & \quad (1,\,*,\,0,\,0),\\
\quad (*,\,1,\,0,\,0), & \quad (*,\,0,\,1,\,0), & \quad (*,\,0,\,0,\,0), & \quad (*,\,0,\,0,\,1),\\
\quad (1,\,1,\,1,\,*), & \quad (0,\,1,\,1,\,*), & \quad (1,\,1,\,0,\,*), & \quad (1,\,0,\,1,\,*),\\
\quad (0,\,1,\,*,\,1), & \quad (1,\,1,\,*,\,0), & \quad (1,\,0,\,*,\,1), & \quad (1,\,1,\,*,\,1),\\
\quad (1,\,*,\,0,\,1), & \quad (1,\,*,\,1,\,1), & \quad (1,\,*,\,1,\,0), & \quad (0,\,*,\,1,\,1),\\
\quad (*,\,0,\,1,\,1)\} & \quad (*,\,1,\,0,\,1)\} & \quad (*,\,1,\,1,\,1)\} & \quad (*,\,1,\,1,\,0)\}
\end{array}
$$

являются специальным и вместе с рёбрами

$$\mathbf{e}_1 = (0,\,0,\,0,\,*),\quad \mathbf{e}_2 = (0,\,0,\,*,\,1),\quad \mathbf{e}_3 = (0,\,0,\,1,\,*),\quad \mathbf{e}_4 = (0,\,0,\,*,\,0)$$

образуют правильную восьмерку в E^4. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *В E^5 нет специальных паросочетаний.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что M — специальное паросочетание в E^5. Поскольку $|M| = 16$ и в M имеется чётное ненулевое число рёбер каждого направления, то в E^5 существуют такие два направления, что в M имеется ровно по два рёбра этих направлений. Без ограничения общности положим

$$M_1 = \{(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5) \in M | x_1 = *\} = \{(*,\,a^i_2,\,a^i_3,\,a^i_4,\,a^i_5) | i = 1,\,2\},$$

$$M_2 = \{(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4,\,x_5) \in M | x_2 = *\} = \{(b^i_1,\,*,\,b^i_3,\,b^i_4,\,b^i_5) | i = 1,\,2\}.$$

Так как M – специальное паросочетание, то при любых $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \{0,\,1\}$ существуют единственные $i,\,j \in \{1,\,2\}$ такие, что $a^i_2 = \sigma_2$ и $b^j_1 = \sigma_1$, т. е. грань $(\sigma_1,\,\sigma_2,\,*,\,*,\,*)$ имеет ровно 2 вершины, инцидентные рёбрам из $M_1 \cup M_2$.

Пусть $i,\,j \in \{1,\,2\}$. Так как M совершенное, то

$$d((a^i_3,\,a^i_4,\,a^i_5),(b^j_3,\,b^j_4,\,b^j_5)) = k_{ij}$$

нечётно. Если $k_{ij} = 1$, то по лемме 1 в грани $(b^j_1,\,a^i_2,\,*,\,*,\,*)$ существует подгрань размерности 2, содержащая два рёбра из M. Противоречие со специальностью M. Следовательно, $k_{ij} = 3$ при любых $i,\,j \in \{1,\,2\}$. Но тогда

$$a^1_m = a^2_m, \quad m \in \{3,\,4,\,5\}.$$

Значит, $M \cap (*,\,*,\,a^1_3,\,a^1_4,\,a^1_5) = M_1$, что противоречит специальности паросочетания M. Теорема 1 доказана.

§ 3. Конструкция специальных паросочетаний

Пусть $(M_{00}^n,\ M_{01}^n,\ M_{11}^n,\ M_{10}^n,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4)$ – правильная восьмерка, где $\mathbf{e}_1 = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ 0,\ *)$. Пусть $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \{0,\ 1\}$. Положим

$$M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2} = M_{00}^n(\sigma_1\sigma_2) \cup M_{01}^n(\sigma_1\overline{\sigma}_2) \cup M_{11}^n(\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2) \cup M_{10}^n(\overline{\sigma}_1\sigma_2) \cup \{\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2} | 1 \leqslant i \leqslant 4\} \backslash \{\mathbf{e}_i(\sigma_1\sigma_2) | 1 \leqslant i \leqslant 4\},$$

где

$$\mathbf{v}_1^{\sigma_1\sigma_2} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ \sigma_1,\ \overline{\sigma}_2,\ 0,\ *),$$
$$\mathbf{v}_2^{\sigma_1\sigma_2} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ \overline{\sigma}_1,\ \overline{\sigma}_2,\ *,\ 1),$$
$$\mathbf{v}_3^{\sigma_1\sigma_2} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ \overline{\sigma}_1,\ \sigma_2,\ 1,\ *),$$
$$\mathbf{v}_4^{\sigma_1\sigma_2} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ *,\ 0).$$

Лемма 3. *Паросочетание $M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}$ является совершенным в E^{n+2}.*

Доказательство. Очевидно, что при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1\}$ паросочетание $M_{\alpha_1\alpha_2}^n(\sigma_1\sigma_2)$ является совершенным в грани $(*,\ \ldots,\ *,\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ булева куба E^{n+2}. Следовательно,

$$M_{00}^n(\sigma_1\sigma_2) \cup M_{01}^n(\sigma_1\overline{\sigma}_2) \cup M_{11}^n(\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2) \cup M_{10}^n(\overline{\sigma}_1\sigma_2)$$

является совершенным паросочетанием в E^{n+2}. Множество рёбер $\{\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2},\ \mathbf{e}_i(\sigma_1\sigma_2) | 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ образует чередующийся цикл. Но тогда по построению паросочетание $M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}$ является совершенным в E^{n+2}. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Множество* $(M_{00}^{n+2},\ M_{01}^{n+2},\ M_{11}^{n+2},\ M_{10}^{n+2},\ \mathbf{v}_1^{00},\ \mathbf{v}_2^{01},\ \mathbf{v}_3^{11},\ \mathbf{v}_4^{10})$ *является правильной восьмеркой в E^{n+2}.*

Доказательство. По построению выполнены условия a) и b). Пусть $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \{0,\ 1\}$. Остается показать, что паросочетание $M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}$ является специальным. Пусть это не так. По лемме 3 паросочетание $M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}$ является совершенным. Следовательно, при некотором k, $2 \leqslant k \leqslant n+1$, существует такая грань $\mathbf{a}^k = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+2})$ размерности k, что $\mathbf{a}^k \cap M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}$ – совершенное паросочетание в $\mathbf{a}^k$. Иными словами,

$$|\mathbf{a}^k \cap M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2}| = 2^{k-1}. \tag{1}$$

Возможны два случая.

I. Символ * не принадлежит множеству $\{a_{n+1},\ a_{n+2}\}$.

Если $k = n$, то $\mathbf{a}^k = (*,\ \ldots,\ *,\ a_{n+1},\ a_{n+2})$ и по построению

$$\mathbf{a}^k \cap M_{\sigma_1\sigma_2}^{n+2} = M_{\sigma_1\oplus a_{n+1}\ \sigma_2\oplus a_{n+2}}^n(a_{n+1},\ a_{n+2}) \backslash \mathbf{e}_i(\sigma_1,\ \sigma_2)$$

для некоторого $i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4$. Следовательно, $|\mathbf{a}^k \cap M^{n+2}_{\sigma_1\sigma_2}| = 2^{k-1} - 1$. Противоречие с (1).

Если $k < n$, то по построению имеем

$$2^{k-1} = |\mathbf{a}^k \cap M^{n+2}_{\sigma_1\sigma_2}| = |(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \cap M^n_{\sigma_1 \oplus a_{n+1}\ \sigma_2 \oplus a_{n+2}}|.$$

Противоречие со специальностью паросочетания $M^n_{\sigma_1 \oplus a_{n+1}\ \sigma_2 \oplus a_{n+2}}$.

II. Символ * принадлежит множеству $\{a_{n+1},\ a_{n+2}\}$.

Если при любом $i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4$, ребро $\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ не принадлежит грани $\mathbf{a}^k$, то при некоторых $\pi_1,\ \pi_2 \in \{0,\ 1\}$ грань

$$\mathbf{a}^k \cap (*,\ \ldots,\ *,\ \pi_1,\ \pi_2) = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \pi_1,\ \pi_2)$$

имеет размерность m, причём $0 \leqslant m \leqslant k-1$. Но случаи $m = 0$ и $m = 1$ противоречат (1). Следовательно, паросочетание

$$M^{n+2}_{\sigma_1\sigma_2} \cap (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \pi_1,\ \pi_2)$$

является совершенным в грани $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \pi_1,\ \pi_2)$ размерности $m, 2 \leqslant m \leqslant k-1$. Но тогда по построению $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ является гранью размерности m в E^n и паросочетание

$$M^n_{\sigma_1 \oplus \pi_1\ \sigma_2 \oplus \pi_2} \cap (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$$

является совершенным в грани $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Противоречие со специальностью паросочетания $M^n_{\sigma_1 \oplus \pi_1\ \sigma_2 \oplus \pi_2}$.

Если при некотором $i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4$, ребро $\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ принадлежит грани $\mathbf{a}^k$, то согласно (1) ребро $\mathbf{v}_j^{\sigma_1\sigma_2}$ также принадлежит грани $\mathbf{a}^k$, где $|i-j| = 2$. Следовательно, по построению имеем

$$a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = *. \tag{2}$$

Но тогда паросочетание

$$(M^n_{00}(\sigma_1\sigma_2) \cup M^n_{01}(\sigma_1\overline{\sigma}_2) \cup M^n_{11}(\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2) \cup M^n_{10}(\overline{\sigma}_1\sigma_2)) \cap \mathbf{a}^k$$

также является совершенным в $\mathbf{a}^k$. Следовательно, $M^n_{00} \cap (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ – совершенное паросочетание в грани $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ размерности $k-2$. Используя (2), имеем $2 \leqslant k-2 \leqslant n-1$. Противоречие со специальностью M^n_{00}. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *В E^7 существует правильная восьмерка.*

Доказательство. Каждое из четырех специальных паросочетаний

$M^7_{\sigma_1\sigma_2}$, $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \{0, 1\}$ в кубе размерности 7, входящих в правильную восьмерку, будем строить по следующей схеме. Рассмотрим последовательность граней куба E^7

$$\mathbf{a}_0 = (0, 0, 0, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_3 = (0, 1, 0, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_4 = (0, 1, 1, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_5 = (1, 1, 1, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_6 = (1, 0, 1, *, *, *, *),$$
$$\mathbf{a}_7 = (0, 0, 1, *, *, *, *).$$

В каждой грани $\mathbf{a}_i$, $0 \leqslant i \leqslant 7$, построим совершенное паросочетание $M_i^{\sigma_1\sigma_2}$, являющееся одним из специальных паросочетаний в E^4, построенных при доказательстве леммы 2. В грани $\mathbf{a}_i$ выделим ребро $\mathbf{u}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ из $M_i^{\sigma_1\sigma_2}$ (для простоты записи $M_i^{\sigma_1\sigma_2}$ и $\mathbf{u}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ будем представлять четырехмерными, опуская первые три позиции, задаваемые соответствующей гранью $\mathbf{a}_i$). Тогда

$$M^7_{\sigma_1\sigma_2} = \bigcup_{i=0}^{7} (M_i^{\sigma_1\sigma_2} \cup \{\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2}\} \backslash \{\mathbf{u}_i^{\sigma_1\sigma_2}\},$$

где $\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ – ребро куба E^7, смежное одновременно с рёбрами $\mathbf{u}_i^{\sigma_1\sigma_2}$ и $\mathbf{u}^{\sigma_1\sigma_2}_{i+1(\bmod 7)}$.

Согласно этой схеме паросочетания и рёбра

$$\begin{array}{lll}
M_0^{00} = M_4^{00} = M^4_{00}, & \mathbf{u}_0^{00} = (1, 1, 1, *), & \mathbf{u}_4^{00} = (0, 0, 0, *),\\
M_1^{00} = M_5^{00} = M^4_{01}, & \mathbf{u}_1^{00} = (1, *, 1, 1), & \mathbf{u}_5^{00} = (0, *, 0, 0),\\
M_2^{00} = M_6^{00} = M^4_{11}, & \mathbf{u}_2^{00} = (1, 0, *, 1), & \mathbf{u}_6^{00} = (0, 1, *, 0),\\
M_3^{00} = M_7^{00} = M^4_{10}, & \mathbf{u}_3^{00} = (*, 0, 0, 1), & \mathbf{u}_7^{00} = (*, 1, 1, 0)
\end{array}$$

порождают паросочетание M^7_{00}. Аналогично, паросочетания и рёбра

$$\begin{array}{lll}
M_0^{01} = M_4^{01} = M^4_{01}, & \mathbf{u}_0^{01} = (1, 1, *, 0), & \mathbf{u}_4^{01} = (0, 0, *, 1),\\
M_1^{01} = M_5^{01} = M^4_{11}, & \mathbf{u}_1^{01} = (1, *, 1, 0), & \mathbf{u}_5^{01} = (0, *, 0, 1),\\
M_2^{01} = M_6^{01} = M^4_{10}, & \mathbf{u}_2^{01} = (1, 0, 1, *), & \mathbf{u}_6^{01} = (0, 1, 0, *),\\
M_3^{01} = M_7^{01} = M^4_{00}, & \mathbf{u}_3^{01} = (*, 0, 1, 1), & \mathbf{u}_7^{01} = (*, 1, 0, 0),
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
M_0^{11} = M_4^{11} = M_{11}^4, & \mathbf{u}_0^{11} = (1, 1, 0, *), & \mathbf{u}_4^{11} = (0, 0, 1, *),\\
M_1^{11} = M_5^{11} = M_{10}^4, & \mathbf{u}_1^{11} = (1, *, 0, 0), & \mathbf{u}_5^{11} = (0, *, 1, 1),\\
M_2^{11} = M_6^{11} = M_{00}^4, & \mathbf{u}_2^{11} = (1, 0, *, 0), & \mathbf{u}_6^{11} = (0, 1, *, 1),\\
M_3^{11} = M_7^{11} = M_{01}^4, & \mathbf{u}_3^{11} = (*, 0, 1, 0), & \mathbf{u}_7^{11} = (*, 1, 0, 1),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
M_0^{10} = M_4^{10} = M_{10}^4, & \mathbf{u}_0^{10} = (1, 1, *, 1), & \mathbf{u}_4^{10} = (0, 0, *, 0),\\
M_1^{10} = M_5^{10} = M_{00}^4, & \mathbf{u}_1^{10} = (1, *, 0, 1), & \mathbf{u}_5^{10} = (0, *, 1, 0),\\
M_2^{10} = M_6^{10} = M_{01}^4, & \mathbf{u}_2^{10} = (1, 0, 0, *), & \mathbf{u}_6^{10} = (0, 1, 1, *),\\
M_3^{10} = M_7^{10} = M_{11}^4, & \mathbf{u}_3^{10} = (*, 0, 0, 0), & \mathbf{u}_7^{10} = (*, 1, 1, 1)
\end{array}
$$

порождают паросочетания M_{01}^7, M_{11}^7 и M_{10}^7 соответственно.

Пусть $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \{0, 1\}$. Так как $\bigcup\limits_{i=0}^{7} M_i^{\sigma_1\sigma_2}$ – совершенное паросочетание в E^7, а множество рёбер $\{\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2},\ \mathbf{u}_i^{\sigma_1\sigma_2} | 0 \leqslant i \leqslant 7\}$ образует чередующийся цикл, то $M_{\sigma_1\sigma_2}^7$ является совершенным паросочетанием в E^7.

Доказательство того, что $M_{\sigma_1\sigma_2}^7$ является специальным, аналогично доказательству леммы 4. Действительно, пусть при некотором k, $2 \leqslant k \leqslant 6$, существует такая грань $\mathbf{a}^k = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_7)$ размерности k, что $\mathbf{a}^k \cap M_{\sigma_1\sigma_2}^7$ является совершенным паросочетанием в $\mathbf{a}^k$. Тогда в силу леммы 2 грань $\mathbf{a}^k$ содержит по крайней мере одно ребро из множества $\{\mathbf{v}_i^{\sigma_1\sigma_2} | 0 \leqslant i \leqslant 7\}$. Но тогда по построению все рёбра этого множества лежат в $\mathbf{a}^k$, что возможно только в случае, когда $\mathbf{a}^k = E^7$. Это противоречит тому, что $k \leqslant 6$.

Также по построению $M_{\alpha_1\alpha_2}^7 \cap M_{\beta_1\beta_2}^7 = \varnothing$, если $(\alpha_1,\ \alpha_2) \neq (\beta_1,\ \beta_2)$. Таким образом, восьмерка $(M_{00}^7,\ M_{01}^7,\ M_{11}^7,\ M_{10}^7,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4)$, где

$$\mathbf{e}_1 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ *) \in M_{00}^7,$$

$$\mathbf{e}_2 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ *,\ 1) \in M_{01}^7,$$

$$\mathbf{e}_3 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ *) \in M_{11}^7,$$

$$\mathbf{e}_4 = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ *,\ 0) \in M_{10}^7,$$

является правильной. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *При любом n, $n \geqslant 4$ и $n \neq 5$, в булевом кубе E^n имеются специальные паросочетания.*

Доказательство. Индукция по n. Леммы 2 и 5 дают базу индукции, а леммы 3 и 4 — индукционный шаг. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глаголев В. В., Евдокимов А. А.** О минимальной раскраске одного бесконечного графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1970. С. 9–17.
2. **Евдокимов А. А.** Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Вып. 50. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 10–25.
3. **Кротов Д. С.** Индуктивные конструкции совершенных троичных равновесных кодов с расстоянием 3 // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37, вып. 1. С. 3–11.
4. **Пережогин А. Л.** Графы совершенных паросочетаний булева куба // Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций". Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня – 2 июля 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 80.
5. **Пережогин А. Л., Потапов В. Н.** О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 52–62.
6. **Hamburger P., Pippert R. E., Weakley W. D.** On a leverage problem in the hypercube // Networks. 1992. V. 22, N 5. P. 435–439.
7. **Svanström M.** Ternary codes with weight constraints // Ph. Dissertation, N 572. Linköping Univ., 1999.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.

Статья поступила
30 июля 2005 г.