ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2005. Серия 1. Том 12, № 4, 60–80

УДК 519.1

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМЫХ АЛГОРИТМОМ ПОКООРДИНАТНОГО ПОДЪЁМА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. Б. Рамазанов

Найдены новые улучшенные априорные и апостериорные гарантированные оценки точности решений задач максимизации строго выпуклых функций дискретного аргумента на порядково-выпуклом множестве посредством градиентного алгоритма покоординатного подъема с использованием кривизны допустимой области. В эти оценки наряду с другими параметрами задачи входит кривизна допустимого множества. Кроме того, получены новые априорные и апостериорные гарантированные оценки на суперматроидах (в частности, однородных суперматроидах) и на пересечениях суперматроидов. Найдены новые достаточные условия, когда значения целевой функции рассматриваемой задачи в глобальном и градиентном экстремумах совпадают.

Введение

Класс задач дискретной оптимизации, в которых локальный (градиентный) экстремум совпадает с глобальным, не слишком велик [1–3, 5]. Поэтому исследование погрешности решений, получаемых градиентными алгоритмами, стало одним из основных ввиду невозможности точного и в то же время эффективного решения большинства задач дискретной оптимизации [3, 6, 8–10] (см. также [4]). Известно [3, 9], что гарантированная оценка погрешности решения некоторых задач дискретной оптимизации, получаемого градиентным алгоритмом, может быть выражена через кривизну допустимой области.

В статье найдены новые улучшенные априорные и апостериорные гарантированные оценки решения градиентным алгоритмом задач максимизации ρ-координатно-выпуклых функций с использованием кривизны допустимого множества. Найдены новые достаточные условия, когда значения целевой функции рассматриваемой задачи в глобальном и градиентном экстремуме совпадают. Как следствие из основных результатов получены новые гарантированные оценки на суперматроидах (в частности, на однородных суперматроидах) и на пересечениях суперматроидов. Отметим, что ранее в [8] гарантированные оценки решений задач максимизации ρ-координатно-выпуклой функции, получаемые градиентным алгоритмом, были установлены без учёта кривизны допустимой области. Эта статья является расширенным и обобщенным вариантом статьи [6].

§ 1. Постановка задачи

Пусть $H=(H,\prec)$ — линейное упорядоченное дискретное множество (цепь), на котором задано отношение порядка $\prec$. Множество элементов $x^0, x^1, \cdots, x^k$ из H, обладающих свойством $x = x^0 \prec x^1 \prec \cdots \prec x^k = y$, называется *цепью* между x и y. Число k называется *длиной* цепи. Длина цепи между x и y обозначается через $h(x,y)$. Минимальный элемент множества H будем обозначать через 0. Таким образом, $0 \prec x$ для любых $x \in H, x \neq 0$. Будем также пользоваться обозначением $h(x) = h(0,x)$. Тогда на координатной решетке $H^n = H \times \cdots \times H = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in H, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ задается отношение порядка $x \prec y \Leftrightarrow x_i \prec y_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Очевидно, что минимальным элементом множества H^n является n-мерный вектор $0=(0,\ldots,0)$. Для любого элемента $x_i \in H$ через x_i^+ будем обозначать такой элемент из H, что в H нет такого элемента x, что $x_i \prec x \prec x_i^+$.

Следуя [3, 8], для функции $f \mid H^n \to R$ (R — множество действительных чисел) введем понятия i-градиента

$$\Delta_i f(x) = f(\pi_i^+(x)) - f(x)$$

и (i,j)-градиента

$$\Delta_{ij} f(x) = \Delta_j f(\pi_i^+(x)) - \Delta_j f(x),$$

где $\pi_i^+(x) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^+,x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Пусть $P \subseteq H^n$. В дальнейшем будем считать, что множество P обладает свойствами:

(*i*) $|P| < +\infty$;

(*ii*) $0 \in P$;

(*iii*) $[0,x] = \{z \in H^n \mid 0 \prec z \prec x\} \subseteq P$ для любого $x \in P$.

Следуя [3, 8], множество P, обладающее свойствами (*i*)–(*iii*), будем называть *конечным порядково-выпуклым множеством с нулем.*

Введем следующие обозначения:

$$N(x,y)=\{i \mid x=(x_1,\cdots,x_n)\prec(y_1,\cdots,y_n)=y, x_i \prec y_i, x_i \neq y_i, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$h(x,y)=\sum_{i\in N(x,y)} h(x_i,y_i),\ h(x_i,y_i)=|\{z_i \mid x_i \prec z_i \prec y_i\}|-1,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$h(x)=h(0,x),\ h=h(P)=\max\{h(0,x) \mid x\in P\},$$
$$r=r(P)=\min\{h(x)-1 \mid x\in H^n\backslash P\},$$
$$\mathrm{fes}(x,P)=\{1\leqslant i\leqslant n \mid \pi_i^+(x)\in P, x\in P\}.$$

Пусть $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in R_+^n$, где R_+^n — множество n-мерных неотрицательных действительных векторов. Через $\Re_\rho(H^n)$ обозначим класс таких функций f, отображающих H^n в R, что для любого $x\in H^n$

$$\Delta_{ij}f(x)\leqslant 0, i\neq j,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,$$
$$\Delta_{ii}f(x)\leqslant -\rho_i, 1\leqslant i\leqslant n,$$

т. е. числа $-\rho_1,\cdots,-\rho_n$ являются верхними оценками диагональных элементов матрицы $\|\Delta_{ij}f(x)\|$, являющейся дискретным аналогом гессиана.

Функции из класса $\Re_\rho(H^n)$ называются *ρ-координатно-выпуклыми* на множестве H^n [8]. Очевидно, что если $\rho\leqslant\mu$, то $\Re_\mu(H^n)\subseteq\Re_\rho(H^n)$.

Если $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)=0=(0,\cdots,0)$, то класс $\Re_\rho(H^n)$ совпадает с классом координатно-выпуклых функций.

В случае, когда $\Omega(\rho)=\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i>0$, естественно говорить о классе строго координатно-выпуклых функций [8].

Кривизной порядково-выпуклого множества $P\subseteq H^n$ называется число

$$\theta(P)=\min\left\{\frac{l(P\cap[0,x])}{h(P\cap[0,x])} \mid x\in H^n, x\neq 0\right\},$$

где $l(Q)=\min\{h(x) \mid x\in Q^{max}\}, Q^{max}$ — множество всех максимальных элементов частично упорядоченного множества $(Q,\prec)$, $Q\subseteq P, h(Q)=\max\{h(x) \mid x\in Q\}$ — высота множества Q.

Очевидно, что $0<\theta(P)\leqslant 1$. Если $\theta(P)=1$, то множество P называется *суперматроидом* [3].

Функцию f, отображающую H^n в R, будем называть *неубывающей,* если $x\prec y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$.

Рассмотрим задачу А дискретной оптимизации: найти

$$\max\{F(x) \mid x\in P\},$$

где $F(x)$ — неубывающая ρ-координатно-выпуклая функция, P — порядково-выпуклое множество в H^n.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — оптимальное решение задачи A, т. е.

$$F\left(x^*\right) = \max\{F(x) \mid x \in P\},$$

а $x^g = (x_1^g, \cdots, x_n^g)$ — градиентное решение задачи A, т. е. точка, полученная с помощью следующего градиентного алгоритма покоординатного подъема [1,3]:

$$\begin{aligned}
&x^{t+1} = \pi^+_{i(t)}(x^t),\ t = 0, 1, \cdots,\ \ x^0 = 0 = (0, \cdots, 0),\\
&i(t) = \arg\max_i\{\Delta_i F(x^t) \mid i \in \mathrm{fes}(x^t, P)\},
\end{aligned}$$

заканчивающего свою работу на шаге τ, если $\Delta_{i(\tau)} F(x^\tau) \leqslant 0$ или $\mathrm{fes}(x^\tau, P) = \varnothing$.

Под гарантированной оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи А обычно понимают такое число $\varepsilon \geqslant 0$, что

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \varepsilon$$

Известно (см. теорему 11.3 [3]), что гарантированная оценка погрешности решения задачи A градиентным алгоритмом в случае, когда $F(x) \in \Re_0(H^n)$, равна $1/(\theta(P) + 1)$.

В случае сепарабельной неубывающей координатно-выпуклой функции градиентное решение x^g задачи A удовлетворяет неравенству (теорема 11.4 [3])

$$F(x^g) \geqslant \theta(P)F(x^*) + (1 - \theta(P))F(0).$$

Отметим, что сначала результат подобного рода был получен в [9] для случая линейной целевой функции.

§ 2. Основные результаты и вспомогательные утверждения

Введём обозначения:

$$\delta_F = (\delta_1^F, \cdots, \delta_n^F),\ \delta_i^F = \Delta_i F(0),\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \Omega(\delta_F) = \sum_{i=1}^n \delta_i^F,$$

$$\omega_1(\rho, \delta_F) = 2\Omega(\delta_F) - \omega(\rho),\ \omega(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(\rho) = 0,\\ \left(\sum\limits_{i|\rho_i>0} \frac{1}{\rho_i}\right)^{-1}, & \text{если } \Omega(\rho) > 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n) \in R^n_+$, $F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ — неубывающая функция, $\omega_1(\rho, \delta_F) > 0$ и $P \subseteq H^n$ — порядково-выпуклое множество.*

Тогда справедлива следующая гарантированная оценка погрешности решения градиентным алгоритмом в задачах максимизации функции $F(x)$ *на множестве* $P \subseteq H^n$:

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1+\theta(P)}(1 - \theta(P)B(\rho, r, h, \delta_F)), \tag{1}$$

где $\theta(P)$ — *кривизна множества* P *и*

$$B(\rho, r, h, \delta_F) = \frac{(h-r)^2\omega(\rho)}{h^2\omega_1(\rho, \delta_F)}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n) \in R^n_+$, $F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ — *неубывающая функция,* $\gamma(\rho, r) > 0$ *и* $P \subseteq H^n$ — *порядково-выпуклое множество. Тогда справедлива следующая гарантированная оценка погрешности решения градиентным алгоритмом в задачах максимизации функции* $F(x)$ *на множестве* P :

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{(1+\theta(P))\gamma(\rho, r)}(h\omega_1(\rho, \delta_F)/2 - \theta(P)(h-r)^2\omega(\rho)/2h), \tag{3}$$

где $\theta(P)$ — *кривизна множества* P, $\gamma(\rho, r) = \sum\limits_{s=0}^{r-1} \rho_{i(s)}$, *индексы* $i(0), i(1), \ldots, i(r-1)$ *определены в градиентном алгоритме для функции* $F(x)$ *на* P, *а остальные параметры имеют тот же смысл, что и в теореме 1.*

Теорема 3. *Пусть* $F(x) \in \Re_\rho(H^n), \rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n) \in R^n_+$, $P \subseteq H^n$ — *порядково-выпуклое множество и фиксированный вектор* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in R^n_+$ *такой, что при любых* $x \in P$ *и* $i \in \mathrm{fes}(x, P)$ *выполнено неравенство* $\Delta_i F(x) + \mu_i \geqslant 0$. *Тогда глобальный максимум* x^* *и градиентный максимум* x^g *функции* $F(x)$ *на множестве* P *связаны соотношением*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1+\theta(P)}\left(1 + B_1(r, h, \rho, \mu) - \theta(P)B_2(\tau, h, \rho, \mu, \delta_F)\right), \tag{4}$$

где $B_1(r, h, \rho, \mu) = \dfrac{h\Omega(\mu)}{\gamma_1(\rho, r) - h\Omega(\mu)}$, $\gamma_1(\rho, r) = \sum\limits_{s=0}^{r-1} \rho_{i_1(s)}$, $B_2(\tau, h, \rho, \mu, \delta_F) = \dfrac{(h-\tau)^2(2\omega(\mu) + \omega(\rho))}{h^2(2\Omega(\delta_F + \mu) - \omega(\rho) - 2\omega(\mu))}$, τ — *число шагов гради-*

ентного алгоритма, индексы $i_1(0), i_1(1), \ldots, i_1(r-1)$ *определены с помощью описанного выше градиентного алгоритма, применённого к* $F(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, x_i)$.

Для доказательства теорем 1–3 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ *— неубывающая функция,* x^* *— глобальный максимум функции* $F(x)$ *на порядково-выпуклом множестве* $P \subseteq H^n$*, а последовательность* $x^0, x^1, \cdots, x^\tau$ *построена с помощью описанного выше градиентного алгоритма покоординатного подъема для функции* $F(x)$*. Тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{i \in N(x^t, x^*)} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right)\left(h\left(x_i^t, x_i^*\right) - 1\right) \geqslant \sum_{i \in N(x^t, x^*)} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right) \geqslant \frac{(h-t)^2 \omega(\alpha)}{h}, \ t = 0, 1, \cdots, \tau, \quad (5)$$

где τ *— число шагов градиентного алгоритма,* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R_+^n$, $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ *и* $x^t = (x_1^t, \cdots, x_n^t)$.

Доказательство. Так как функция $F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ неубывающая, а x^* — глобальный максимум функции $F(x)$ на $P \subseteq H^n$, то $x^t \prec x^*$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Тогда при любом $t = 0, 1, \ldots, \tau$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right)\left(h\left(x_i^t, x_i^*\right) - 1\right) \geqslant \sum_{i \in N(x^t, x^*)} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right)\left(h\left(x_i^t, x_i^*\right) - 1\right) \geqslant \sum_{i \in N(x^t, x^*)} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right).$$

Используем известное неравенство (см., например, [7, с. 216])

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i / a_i\right)^{-1},$$

справедливое при любых $a_i, b_i \in R_+^1,\ a_i, b_i > 0$.

При $a_i = \alpha_i$ и $b_i = h(x_i^t, x_i^*)$ имеем

$$\sum_{i \in N(x^t, x^*)} \alpha_i h\left(x_i^t, x_i^*\right) \geqslant \left(\sum_{i \in N(x^t, x^*)} h(x_i^t, x_i^*)\right)^2 \left(\sum_{i \in N(x^t, x^*)} h(x_i^t, x_i^*)/\alpha_i\right)^{-1},$$

где $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Пользуясь этим фактом, неравенствами

$$\left(\sum_{i\in N(x^t,x^*)} h(x_i^t,x_i^*)\right)^2 \geqslant (h-t)^2,$$

$$\sum_{i\in N(x^t,x^*)} h(x_i^t,x_i^*)/\alpha_i \leqslant \sum_{i\in N(x^t,x^*)} h(x_i^t,x_i^*)\sum_{i|\alpha_i>0} 1/\alpha_i \leqslant h\sum_{i|\alpha_i>0} 1/\alpha_i,$$

где $0\leqslant t\leqslant \tau$, из теоремы 1 и леммы 1, получаем неравенства (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (п. 2, теорема 6 [8]). *Если функция $F(x)\in\Re_\rho(H^n)$ неубывающая, то при любых $x,y\in H^n$ и $x\prec y$ справедливо неравенство*

$$F(y)-F(x) \leqslant \sum_{i\in N(x,y)} h(x_i,y_i)\triangle_i F(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i h(x_i,y_i)\left(h(x_i,y_i)-1\right). \quad (6)$$

Лемма 3 (Следствие 3 [8]). *Пусть $F\in\Re_\rho(H^n)$ — неубывающая функция. Тогда при любых $x\in H^n$ и $1\leqslant i\leqslant n$ справедливо неравенство*

$$\triangle_i F(x)\geqslant \rho_i. \quad (7)$$

Лемма 4. *Пусть $F(x)\in\Re_\rho(H^n)$ — неубывающая функция. Тогда*

$$F(0)+\sum_{s=0}^{r-1}\rho_{i(s)} \leqslant F(x^*)\leqslant F(0)+h\Omega(\delta_F)-h\omega(\rho)/2\ , \quad (8)$$

где индексы $i(0),i(1),\cdots,i(r-1)$ определены градиентным алгоритмом, $h=h(P)$ и $r=r(P)$.

Доказательство. Полагая $y=x^*$, $x=x^0{=}0$, из неравенства (6) получим

$$F(x^*)-F(0)\leqslant \sum_{i\in N(0,x^*)}\Delta_i F(0)h(0,x_i^*)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i h(0,x_i^*)(h(0,x_i^*)-1).$$

Отсюда с учётом неравенств

$$\sum_{i\in N(0,x^*)}\Delta_i F(0)h(0,x_i^*)\leqslant h\sum_{i\in N(0,x^*)}\Delta_i F(0)\leqslant h\sum_{i=1}^{n}\Delta_i F(0)=h\Omega(\delta_F),$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i h\left(0,x_i^*\right)\left(h\left(0,x_i^*\right)-1\right)\geqslant h\omega(\rho)$ (вытекает из леммы 1 при $\alpha=\rho$, $t=0$), доказываем правую часть неравенства (8).

Очевидно, что

$$F(x^*)-F(0)\geqslant F(x^g)-F(0)=\sum_{s=0}^{r-1}\Delta_{i(s)}F(x^s).$$

В силу леммы 3 при любом $s=0,1,\ldots,r-1$ имеем $\Delta_{i(s)}F(x^s)\geqslant\rho_{i(s)}$, $i(s)\in\operatorname{fes}(x^s,P)$. Поэтому $F(x^*)\geqslant F(0)+\sum\limits_{s=0}^{r-1}\rho_{i(s)}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $F(x)$ — неубывающая на порядково-выпуклом множестве $P\subseteq H^n$ $\rho-$координатно-выпуклая функция. Тогда*

$$\sum_{i\in N(x^g,x^*)}h(x_i^g,x_i^*)\Delta_iF(x^g)\leqslant\frac{F(x^g)-F(0)}{\theta(P)},\tag{9}$$

где $\theta(P)$ — кривизна множества P.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству теоремы 11.3 из [3, с. 112].

Лемма 6. *Пусть $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in R_+^n,$ $F(x)\in\Re_\rho(H^n)$ и $P\subseteq H^n$. Если $\Delta_iF(x)+\mu_i\geqslant0$ для любых $i\in\operatorname{fes}(x,P)$ и $x\in P$, то*

$$F(x^*)-F(0)\geqslant\gamma_1(\rho,r)-h\Omega(\mu),\tag{10}$$

$$F(x^*)-F(0)\leqslant h(\Omega(\delta_F+\mu)-\omega(\rho)/2-\omega(\mu)),\tag{11}$$

$$\sum_{i\in N(x^g,x^*)}(\Delta_iF(x^g)+\mu_i)h(x_i^g,x_i^*)\leqslant\frac{F(x^g)-F(0)+h\Omega(\mu)}{\theta(P)},\tag{12}$$

где $\gamma_1(\rho,r)=\sum\limits_{s=0}^{r-1}\rho_{i_1(s)}$, индексы $i_1(0),i_1(1),\cdots,i_1(r-1)$ определяются в градиентном алгоритме, применённом к функции $F(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_ih(0,x_i)$, заданной на P.

Доказательство. Пусть x^* — глобальный, а x^g — градиентный максимумы функции $F(x)$ на P и $\overline{x}=(\overline{x}_1^*,\cdots,\overline{x}_n^*)$ — глобальный максимум функции $\varphi(x)=F(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_ih(0,x_i)$ на P. Тогда имеем

$$F(x^*)+\sum_{i=1}^{n}\mu_ih(0,\overline{x}_i^*)\geqslant F(\overline{x}^*)+\sum_{i=1}^{n}\mu_ih(0,\overline{x}_i^*)=\varphi(\overline{x}^*).\tag{13}$$

Пользуясь (9), леммой 3 и тем, что $\varphi(x) \in \Re_\rho(H^n)$ является неубывающей функцией, имеем

$$\varphi(\overline{x}^*) - \varphi(0) \geqslant \sum_{s=0}^{r-1} \Delta_{i_1(s)}\varphi(x^s) \geqslant \sum_{s=0}^{r-1} \rho_{i_1(s)} = \gamma_1(\rho, r). \tag{14}$$

Учитывая (14) в (13) и имея в виду, что

$$F(0) = \varphi(0), \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, \overline{x}_i^*) \leqslant h\Omega(\mu),$$

получаем неравенство (10).

Неравенство (11) вытекает из следующего соотношения с использованием лемм 1, 2 и 4:

$$\varphi(x^*) - \varphi(0) = F(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, x_i^*) - F(0) \leqslant F(\overline{x}^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, \overline{x}_i^*) - F(0)$$

$$= \varphi(\overline{x}^*) - \varphi(0) \leqslant \sum_{i|\, 0 \prec x_i^*} \Delta_i\varphi(0) h(0, \overline{x}_i^*) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i h(0, \overline{x}_i^*)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i F(0) + \mu_i) h(0, \overline{x}_i^*) - h\omega(\rho)/2 \leqslant h\Omega(\delta_F + \mu) - h\omega(\rho)/2,$$

$$F(x^*) - F(0) \leqslant h\Omega(\delta_F + \mu) - h\omega(\rho)/2 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, x_i^*) \leqslant$$

$$h\Omega(\delta_F + \mu) - h\omega(\rho)/2 - h\omega(\mu)\ .$$

Используя схему получения оценки для величины

$$\sum_{i \in N(x^g, x^*)} h(x_i^g, x_i^*)(\Delta_i F(x^g) + \mu_i),$$

аналогичную схеме из доказательства теоремы 11.3 из [3, с. 112], получаем

$$\sum_{i \in N(x^g, x^*)} h(x_i^g, x_i^*)(\Delta_i F(x^g) + \mu_i)$$

$$\leqslant \frac{F(x^g) + \sum\limits_{i|\, 0 \prec x_i^*} \mu_i h(0, x_i^*) - F(0)}{\theta(P)} \leqslant \frac{F(x^g) - F(0) + h\Omega(\mu)}{\theta(P)},$$

т. е. неравенство (12) справедливо. Лемма 6 доказана.

Замечание 1. Величину $\gamma_1(\rho, r)$ в лемме 6 можно заменить величиной $\rho_* r$, где $\rho_* = \min\{\rho_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Тем самым можно освободиться от дополнительной информации о множестве $\{i_1(0), i_1(1), \cdots, i_1(r-1)\}$.

§ 3. Доказательство основных утверждений

Доказательство теоремы 1. Из леммы 2 при $y = x^*$ и $x = x^g$ имеем

$$F(x^*)-F(x^g) \leqslant \sum_{i\in N(x^g,x^*)} \Delta_i F(x^g) h(x_i^g, x_i^*) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i h(x_i^g, x_i^*)(h(x_i^g, x_i^*)-1)/2.$$

Отсюда с учетом неравенств (5) (при $\alpha = \rho$) и (9) следует, что

$$F(x^*) - F(x^g) \leqslant \frac{F(x^g) - F(0)}{\theta(P)} - \frac{(h-r)^2 \omega(\rho)}{2h}.$$

Поэтому

$$(F(x^*) - F(x^g))(1 + \frac{1}{\theta(P)}) \leqslant \frac{1}{\theta(P)}(F(x^*) - F(0)) - \frac{(h-r)^2 \omega(\rho)}{2h}.$$

Пользуясь этим фактом и леммой 4, получаем

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1+\theta(P)} - \frac{(h-r)^2 \omega(\rho) \theta(P)}{2h(1+\theta(P))(F(x^*) - F(0))}$$
$$\leqslant \frac{1}{(1+\theta(P))} \left(1 - \theta(P) \frac{(h-r)^2 \omega(\rho)}{h^2 \omega_1(\rho, \delta_F)}\right).$$

Отсюда и из (2) следует (1). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Проведя преобразования, аналогичные преобразованиям из доказательства теоремы 1, имеем

$$(F(x^*) - F(x^g))(1 + \frac{1}{\theta(P)}) \leqslant \frac{1}{\theta(P)}(F(x^*) - F(0)) - \frac{(h-r)^2 \omega(\rho)}{2h}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{F(x^*) - F(0) - ((h-r)^2 \omega(\rho) \theta(P)/2h)}{(1+\theta(P))(F(x^*) - F(0))}.$$

Поэтому, учитывая неравенство (8), из леммы 4 получаем оценку (3). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Согласно условию теоремы $\triangle_i F(x) + \mu_i \geqslant 0$ при любых $i \in \mathrm{fes}(x, P)$ и $x \in P$. Вместе с тем функция $\varphi(x) = F(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i h(0, x_i)$ является, очевидно, неубывающей и $\varphi(x) \in \Re_\rho(H^n)$. Поэтому при любых $x, y, \in H^n$ и $x \prec y$ из леммы 2 имеем

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant \sum_{i \in N(x,y)} h(x_i, y_i) \Delta_i \varphi(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i h(x_i, y_i) \left(h(x_i, y_i) - 1\right).$$

Пользуясь этим фактом и тем, что

$$\begin{aligned} &\Delta_i \varphi(x) = \Delta_i F(x) + \mu_i && \text{при любых } i \in \mathrm{fes}(x, P) \text{ и } x \in P, \\ &h(0, y_i) - h(0, x_i) = h(x_i, y_i) && \text{при любых } x \prec y, 1 \leqslant i \leqslant n, \end{aligned}$$

убеждаемся в том, что при любых $x, y, \in H^n$ и $x \prec y$

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \varphi(y) - \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, y_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(0, x_i) \\ &= \varphi(y) - \varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(h(0, y_i) - h(0, x_i)\right) \\ &\leqslant \sum_{i \in N(x,y)} h(x_i, y_i) \left(\Delta_i F(x) + \mu_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(x_i, y_i) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i h(x_i, y_i) \left(h(x_i, y_i) - 1\right). \end{aligned}$$

Поэтому при $y = x^*$ и $x = x^g$ имеем

$$\begin{aligned} F(x^*) - F(x^g) \leqslant &\sum_{i \in N(x^g, x^*)} (\Delta_i F(x^g) + \mu_i) h(x_i^g, x_i^*) \\ &- \sum_{i=1}^{n} \mu_i h(x_i^g, x_i^*) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i h(x_i^g, x_i^*)(h(x_i^g, x_i^*) - 1). \end{aligned}$$

Отсюда с использованием неравенства (12) из лемм 6 и 1 (применённых к величинам $\sum\limits_{i \in N(x^g, x^*)} \mu_i h(x_i^g, x_i^*)$ и $\sum\limits_{i \in N(x^g, x^*)} \rho_i h(x_i^g, x_i^*)(h(x_i^g, x_i^*) - 1)$ соответственно при $\alpha = \mu$, $t = \tau$, $x^t = x^g$ и $\alpha = \rho$, $t = \tau$, $x^t = x^g$), получаем

$$F(x^*) - F(x^g) \leqslant \frac{F(x^g) - F(0) + h\Omega(\mu)}{\theta(P)} - \frac{(h - \tau)^2 \omega(\mu)}{h} - \frac{(h - \tau)^2 \omega(\rho)}{2h}.$$

Поэтому

$$(F(x^*) - F(x^g))\left(1 + \frac{1}{\theta(P)}\right) \leqslant \frac{1}{\theta(P)}(F(x^*) - F(0)) + \frac{h\Omega(\mu)}{\theta(P)} - \frac{(h-\tau)^2\omega(\mu)}{h} - \frac{(h-\tau)^2\omega(\rho)}{2h}.$$

Следовательно,

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1+\theta(P)} - \frac{(h-\tau)^2(\omega(\rho) + 2\omega(\mu))\,\theta(P)}{2h(1+\theta(P))(F(x^*) - F(0))} + \frac{h\Omega(\mu)}{(1+\theta(P))(F(x^*) - F(0))}.$$

Учитывая в правой части этого неравенства соотношения (10), (11) и условия теорем 1 и 3, получаем оценку (4). Теорема 3 доказана.

§ 4. Следствия и связь с известными результатами

Замечание 2. Если $\omega(\rho) = 0$ или $r = h$, то оценка (1) совпадает с соответствующей оценкой из [3, теорема 11.3].

Замечание 3. Учитывая неравенства

$$\Omega(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \geqslant \left(\sum_{i|\rho_i>0} \frac{1}{\rho_i}\right)^{-1} = \omega(\rho)$$

и (7), получаем $\Omega(\delta_F) \geqslant \Omega(\rho) \geqslant \omega(\rho)$. Поэтому

$$\omega_1(\rho, \delta_F) = 2\Omega(\delta_F) - \omega(\rho) \geqslant 2\Omega(\rho) - \omega(\rho) \geqslant \omega(\rho). \tag{15}$$

Следовательно,

$$0 \leqslant B(\rho, r, h, \delta_F) = \frac{(h-r)^2\omega(\rho)}{h^2\omega_1(\rho, \delta_F)} \leqslant \frac{(h-r)^2\omega(\rho)}{h^2(2\Omega(\rho) - \omega(\rho))} \leqslant \left(1 - \frac{r}{h}\right)^2 \leqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что оценка (1) при $\omega(\rho) > 0$ и $r \neq h$ лучше, чем ранее известные оценки (см., например, [3, теорема 11.3]).

Покажем, что верхняя оценка для величины $B(\rho, r, h, \delta_F)$ достижима. Для этого построим подходящие функции из класса $\Re_\rho(H^n)$.

Пусть $F(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\rho_2 h(0,x_1) - \frac{1}{2}\rho_2 h^2(0,x_2) + \rho_2 h(0,x_2)$, где $\rho_2 \in R^1_+, \rho_2 > 0$. Тогда

$$\Delta_1 F(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\rho_2\left(h\left(0,\pi_1^+(x_1)\right) - h(0,x_1)\right) = \frac{1}{2}\rho_2,$$
$$\Delta_2 F(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}\rho_2 h^2\left(0,\pi_2^+(x_2)\right) + \rho_2 h(0,\pi_2^+(x_2)) + \frac{1}{2}\rho_2 h^2(0,x_2)$$
$$- \rho_2 h(0,x_2) = -\frac{1}{2}\rho_2\left(h(0,x_2)+1\right)^2 + \rho_2\left(h(0,x_2)+1\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\rho_2 h^2(0,x_2) - \rho_2 h(0,x_2) = \rho_2 h(0,x_2) + \frac{1}{2}\rho_2.$$

Поэтому

$$\Delta_{12}F(x_1,x_2) = \Delta_{21}F(x_1,x_2) = 0,$$
$$\Delta_{11}F(x_1,x_2) = 0, \quad \Delta_{22}F(x_1,x_2) = -\rho_2,$$

т. е. $F(x_1,x_2) \in \Re_{(0,\rho_2)}(H^n)$. Очевидно, что

$$\Omega(\delta_F) = \Delta_1 F(0,0) + \Delta_2 F(0,0) = \rho_2,$$
$$w(\rho) = \rho_2, w_1(\rho,\delta_F) = 2\Omega(\delta_F) - \omega(\rho) = \rho_2, \ \rho = (0,\rho_2).$$

Поэтому

$$B(\rho,r,h,\delta_F) = \frac{(h-r)^2\omega(\rho)}{h^2 w_1(\rho,\delta_F)} = \left(1 - \frac{r}{h}\right)^2.$$

В связи с нахождением верхней оценки для величины $B(\rho,r,h,\delta_F)$ возникает вопрос, когда $B(\rho,r,h,\delta_F) = 1$, так как в этом случае оценка (1) наилучшая.

Пусть $P^1 = \{x \in H^n \mid h(0,x) = 1\} \cup \{0\}$ и $P = P^1 \setminus \left\{\pi_k^+(0)\right\}, 1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $h = h(P) = 1, r = r(P) = h\left(\pi_k^+(0)\right) - 1 = 0$. Поэтому $B(\rho,r,h,\delta_F) = 1$. Таким образом, замечание 3 позволяет сделать заключение о том, что для величины $B(\rho,r,h,\delta_F)$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant B(\rho,r,h,\delta_F) \leqslant 1,$$

причём верхняя и нижняя границы достижимы.

Замечание 4. Если $w(\rho) > 0$, то из (15) следует, что $w_1(\rho,\delta_F) > 0$. Однако из условия $w_1(\rho,\delta_F) > 0$ не вытекает, что $w(\rho) > 0$.

Действительно, пусть

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n c_i h(0,x_i), \ c = (c_1,\ldots,c_n) \in R^n_+, \ \Omega(c) > 0.$$

Тогда ясно, что $F \in \Re_\rho(H^n)$, где $\rho = (0,\dots,0)$, т. е. $w(\rho) = 0$. Вместе с тем легко видеть, что

$$w_1(\rho,\delta_F) = 2\Omega(\delta_F) - w(\rho) = 2\Omega(c) - w(\rho) = 2\Omega(c) > 0.$$

Поэтому предположение $w(\rho) = 0$ в замечании 2 не противоречит условию теоремы 1 (т. е. неравенству $w_1(\rho,\delta_F) > 0$).

Проведём сравнение полученных оценок в теоремах 1 и 2. Убедимся в том, что в некоторых случаях оценка из теоремы 2 более точна.

Пусть $\rho = (0,...,0,\rho_k,0,...,0)$, $\rho_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega_1(\rho,\delta_F) = \omega(\rho) = \rho_k$ (пример из замечания 3 показывает, что этот случай имеет место) и $\rho_{i(0)} = \rho_{i(1)} = ... = \rho_{i(r-1)} = \rho_k$, т. е. $\gamma(\rho,r) = r\rho_k$. Тогда из теорем 1 и 2 соответственно имеем

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1+\theta(P)}\left(1 - \theta(P)\left(1 - \frac{r}{h}\right)^2\right), \tag{16}$$

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{2(1+\theta(P))r}\left(h - \frac{\theta(P)(h-r)^2}{h}\right). \tag{17}$$

Отсюда при $h = r$ получаем, что оценка (17) более точна, чем оценка (16). Если же $h = 2r$, то оценки (16) и (17) совпадают. Если $h = 3r$ и $\theta(P) = 1$, то оценка (16) более точна. Таким образом, этот пример показывает, что при некоторых значениях параметров оценка из теоремы 2 точнее оценки из теоремы 1 и наоборот. С учётом этого из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *При выполнении условий теорем* 1 *и* 2 *справедливо неравенство*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \min\left\{\frac{1}{1+\theta(P)}(1 - \theta(P)B(\rho,r,h,\delta_F)),\right.$$
$$\left.\frac{1}{(1+\theta(P))\gamma(\rho,r)}(h\omega_1(\rho,\delta_F)/2 - \theta(P)(h-r)^2/2h)\right\}.$$

Замечание 5. Если в теореме 3 $\Omega(\mu) = 0$, то при $\tau = r$ оценка (4) совпадает с оценкой (1).

Поэтому далее будем считать, что $\Omega(\mu) > 0$. Кроме того, в силу выбора вектора $\mu = (\mu_1,...,\mu_n)$ из R^n_+ всегда можно предполагать, что $\Omega(\mu) \geqslant \Omega(\rho)$. Поэтому

$$\gamma_1(\rho,r) \leqslant r\max\{\rho_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant h\Omega(\rho) \leqslant h\Omega(\mu),$$
$$\gamma_1(\rho,r) - h\Omega(\mu) \leqslant h\Omega(\rho) - h\Omega(\mu) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$B_1(r,h,\rho,\mu)=\frac{h\Omega(\mu)}{\gamma_1(\rho,r)-h\Omega(\mu)}\geqslant\frac{h\Omega(\mu)}{h(\Omega(\rho)-\Omega(\mu))}=-1-\frac{\Omega(\rho)}{\Omega(\mu)-\Omega(\rho)},$$

$$\begin{aligned}B_1(r,h,\rho,\mu)=\frac{h\Omega(\mu)}{\gamma_1(\rho,r)-h\Omega(\mu)}&=\frac{h\Omega(\mu)-\gamma_1(\rho,r)+\gamma_1(\rho,r)}{\gamma_1(\rho,r)-h\Omega(\mu)}\\&=-1+\frac{\gamma_1(\rho,r)}{\gamma_1(\rho,r)-h\Omega(\mu)}\leqslant-1\end{aligned}$$

т. е.

$$-1-\frac{\Omega(\rho)}{\Omega(\mu)-\Omega(\rho)}\leqslant B_1(r,h,\rho,\mu)\leqslant-1. \tag{18}$$

Пусть $\varphi(x)=F(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i h(0,x_i)$. Тогда $\varphi(x)\in\Re_\rho(H^n)$ и функция $\varphi(x)$ неубывающая. Поэтому из леммы 3 следует, что при любом i, $1\leqslant i\leqslant n$, и любом $x\in P$

$$\Delta_i\varphi(x)=\Delta_iF(x)+\mu_i\geqslant\rho_i,$$

т. е. $\Omega(\delta_F+\mu)\geqslant\Omega(\rho)\geqslant 0$. Учитывая это неравенство и неравенства $\Omega(\mu)\geqslant\Omega(\rho)\geqslant\omega(\rho)$, $\Omega(\mu)\geqslant\omega(\mu)$, имеем

$$\begin{aligned}B_2(\tau,h,\rho,\mu)&=\frac{(h-\tau)^2(2\omega(\mu)+\omega(\rho))}{h^2(2\Omega(\delta_F+\mu)-\omega(\rho)-2\omega(\mu))}\\&\geqslant\frac{(h-\tau)^2(-2\Omega(\delta_F+\mu)+2\omega(\mu)+\omega(\rho))}{h^2(2\Omega(\delta_F+\mu)-\omega(\rho)-2\omega(\mu))}=-\Big(1-\frac{\tau}{h}\Big)^2\geqslant-1. \end{aligned}\tag{19}$$

Очевидно, что

$$2\Omega(\delta_F+\mu)-\omega(\rho)-2\omega(\mu)\geqslant2\Omega(\rho)-\Omega(\rho)-2\Omega(\mu)=\Omega(\rho)-2\Omega(\mu),$$

$$\omega(\rho)+2\omega(\mu)\leqslant\Omega(\rho)+2\Omega(\mu).$$

Поэтому

$$B_2(\tau,h,\rho,\mu)\leqslant\frac{(h-\tau)^2(2\Omega(\mu)+\Omega(\rho))}{h^2(\Omega(\rho)-2\Omega(\mu))}.$$

Отсюда с учётом (19) и неравенства $\Omega(\mu)\geqslant\Omega(\rho)$ имеем

$$0\geqslant\frac{(h-\tau)^2(2\Omega(\mu)+\Omega(\rho))}{h^2(\Omega(\rho)-2\Omega(\mu))}\geqslant B_2(\tau,h,\rho,\mu)\geqslant-\Big(1-\frac{\tau}{h}\Big)^2\geqslant-1, \tag{20}$$

причём если $\Omega(\rho) = 0$, то $B_2(\tau, h, \rho, \mu) = -(1 - \frac{\tau}{h})^2$.

Таким образом, неравенства (18) и (20) позволяют указать диапазоны изменения параметров $B_1(r, h, \rho, \mu)$ и $B_2(\tau, h, \rho, \mu)$.

С учётом (18) и (20) из теоремы 3 получаем

Следствие 2. *Пусть $\Omega(\mu) > 0$ и выполняются условия теоремы 3. Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{\theta(P)}{1 + \theta(P)}.$$

Из теорем 1 и 3 вытекают важные соотношения при оценке погрешности градиентного алгоритма

Следствие 3. *Пусть $B(\rho, r, h, \delta_F) = \theta(P) = 1$ и выполняются условия теоремы 1. Тогда $F(x^*) = F(x^g)$. Кроме того, если $F(x)$ — строго неубывающая функция и $B(\rho, r, h, \delta_F) = \theta(P) = 1$, то $x^* = x^g$.*

Следствие 4. *Если $F(x)$ — неубывающая функция из класса $\Re_\rho(H^n)$, а P — суперматроид в H^n, то*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1 - B(\rho, r, h, \delta_F)}{2}.$$

В частности, если P — однородный суперматроид в H^n $(h(P) = r(P))$, то

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следствие 5. *Пусть $B(\rho, r, h, \delta_F) = 1$ и выполняются условия теоремы 1. Тогда справедлива следующая гарантированная оценка*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant 1 - \frac{2\theta(P)}{1 + \theta(P)}.$$

Из теоремы 3 с учётом следствия 2 вытекает

Следствие 6. *Пусть $\Omega(\mu) > 0$, P — суперматроид в H^n и выполняются условия теоремы 3. Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. *Пусть $m \geqslant 2$, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ из H^n — порядково-выпуклые множества, $P = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_m$ и $\omega_1(\rho, \delta_F) > 0$. Тогда глобальный максимум x^* и градиентный максимум x^g неубывающей функции*

$F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ на множестве P связаны соотношением

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{K+1}(1 - KB(\rho, r, h, \delta_F)),$$

где $K = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\theta(P_i)}\right)^{-1}$, *$\theta(P_i)$ — кривизна множества P_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Справедливость теоремы 4 вытекает из следующего утверждения и из теоремы 1.

Теорема 5 ([3, теорема 5.4, с. 51]). *Пусть $m \geqslant 2$ и $P_1, P_2, \ldots, P_m$ из H^n — порядково-выпуклые множества. Тогда*

$$\theta(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\theta(P_i)}\right)^{-1},$$

где $\theta(P_i)$ — кривизна множества P_i , $1 \leqslant i \leqslant m$.

Приведём гарантированные оценки на пересечениях суперматроидов.

Теорема 6. *Пусть $m \geqslant 2$, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ из H^n — суперматроиды, $P = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_m$ и $\omega_1(\rho, \delta_F) > 0$. Тогда глобальный максимум x^* и градиентный максимум x^g неубывающей функции $F(x) \in \Re_\rho(H^n)$ на множестве P связаны соотношением*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{m}{m+1}(1 - B(\rho, r, h, \delta_F)/m).$$

Утверждение теоремы 6 вытекает из теоремы 4 с учётом определения суперматроида.

Теорема 7 [6]. *Пусть $F(x)$ — неубывающая функция из $\Re_\rho(H^n)$ и $\omega_1(\rho, \delta_F) > 0$. Тогда справедлива следующая гарантированная оценка погрешности решения градиентным алгоритмом покоординатного подъема в задаче максимизации функции $F(x)$ на пересечениях двух суперматроидов:*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{3}(2 - B(\rho, r, h, \delta_F)).$$

Следствие 7. *Пусть $B(\rho, r, h, \delta_F) = 1$ и выполняются условия теоремы 6. Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant 1 - \frac{2}{m+1}.$$

Следствие 8. *Пусть $h = r$ и выполняются условия теоремы* 6. *Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant 1 - \frac{1}{m+1}.$$

В частности, для пересечения двух суперматроидов справедливо следующее

Следствие 9. *Пусть $m{=}2$, $B(\rho, r, h, \delta_F) = 1$ и выполняются условия теоремы* 6. *Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Известно [3, с. 53], что существуют такие суперматроиды $P_1,\ P_2 \subseteq H^n$, что $\theta(P_1 \cap P_2) = 1/2$. Отсюда и из следствия 2 вытекает

Следствие 10. *Пусть $P_1,\ P_2 \subseteq H^n$ — суперматроиды, $P = P_1 \cap P_2$, $\theta(P_1 \cap P_2) = 1/2$ и выполняются условия следствия* 2. *Тогда*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{3}$$

(*ср. с оценкой из следствия* 9).

Пусть

$$\Re_\rho^c(H^n) = \{F \in \Re_\rho(H^n) \mid w_1(\rho, \delta_F) = \omega(\rho)\}.$$

В силу замечания 3 множество $\Re_\rho^c(H^n)$ не пусто.

Из теоремы 1 с учётом замечания 3 следует

Следствие 11. *Если функция $F(x) \in \Re_\rho^c(H^n)$ неубывающая, то справедлива следующая гарантированная оценка*:

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{1 + \theta(P)} \left(1 - \left(1 - \frac{r}{h}\right)^2 \theta(P)\right).$$

Следствие 12. *Если выполняются условия следствия* 11 *и $P \subseteq H^n$ является суперматроидом, то*

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{r}{h}\right)^2\right).$$

В частности, если $h = 2r$, то

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leqslant \frac{3}{8}.$$

Пользуясь следствием 11, нетрудно получить оценки, аналогичные оценкам из теорем 6 и 7, для функций из класса $\Re_\rho^c(H^n)$ на пересечениях m $(m \geqslant 2)$ суперматроидов. Для этого в следствии 11 достаточно использовать неравенство $\theta(P) \geqslant 1/m$.

Замечание 6. Оценки из следствий 9 и 10 являются более точными, чем ранее полученные оценки на пересечении двух суперматроидов (ср. [3, теорема 11.3, с. 112]).

Замечание 7. Из оценки теоремы 6 непосредственно вытекает, что если допустимая область соответствующей задачи является пересечением двух или более суперматроидов, то методика нахождения оценок точности, разработанная в [3, 8] и частично развитая в настоящей статье, позволяет сделать заключение о том, что наилучшая оценка точности решения получается в случае, когда допустимой областью является пересечение двух суперматроидов.

Однако следует отметить, что если известно точное значение кривизны пересечения m $(m \geqslant 2)$ суперматроидов, то в силу следствия 2 ранее известные оценки могут быть существенно улучшены; для $m = 2$ такая оценка приведена в следствии 10.

Замечание 8. Очевидно, что полученные результаты справедливы и для целочисленной решетки с соответствующей переформулировкой.

Для следующего примера оценки из теоремы 1 можно конкретизировать.

Пример. Пусть $D_1 = \{x \in Z_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b,\ (a_1, \ldots, a_n) \in R_+^n,$ $b \in R_+^1, b > 0\}$, где Z_+^n — множество n-мерных неотрицательных целочисленных векторов.

Известно [3, с. 51], что

$$\theta(D_1) \geqslant \left\lfloor \frac{b}{a^*} \right\rfloor \Big/ \left\lfloor \frac{b}{a_*} \right\rfloor = Q_0,$$

где $a^* = \max\{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},\ a_* = \min\{a_i \mid\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Пусть

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n),\ c = (c_1, \ldots, c_n) \in R_+^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in Z_+^n$ и $F(x)$ — неубывающая функция на D_1. Очевидно, что $F(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$.

Тогда справедлива следующая гарантированная оценка погрешности решения градиентным алгоритмом в задаче максимизации функции $F(x)$ на множестве D_1 (с учётом $F(0) = 0$):

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*)} \leqslant \frac{1}{1+Q_0}(1 - Q_0 B_3),$$

где $B_3 = \dfrac{(h_1 - h_2)^2 \omega(\rho)}{h_1^2(2\Omega(d) - \omega(\rho))}$, $h_1 = [b/a_*], h_2 = [b/a^*]$, $d = (d_1, \cdots, d_n)$, $d_i = c_i - \rho_i/2$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы. Сб. научн. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 52–59.
2. **Емеличев В. А., Овчинников В. Г.** К теории оптимизации на антицепях, обладающих свойством замены Штейница // Кибернетика. 1985. № 2. С. 55–58.
3. **Ковалев М. М.** Матроиды в дискретной оптимизации. Минск: Изд-во Университетское, 1987.
4. **Ковалев М. М.** Исследование по математической экономике в БГУ // Вестник БГУ. Сер. 1. 2001. № 3. С. 44–52.
5. **Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В., Солтан В. П.** Об условиях совпадения локального и глобального минимумов в задачах дискретной оптимизации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 2. С. 287–290.
6. **Рамазанов А. Б.** О гарантированной оценке точности градиентного алгоритма на пересечениях двух суперматроидов // Российская конф. “Дискретный анализ и исследование операций”. Материалы конференции (Новосибирск, 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 169.
7. **Саати Т.** Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М.: Мир, 1973.
8. **Emelichev V. A., Kovalev M. M., Ramazanov A. B.** Errors of gradient extrema of a strictly convex function of discrete argument // J. Discrete Math. and Appl. 1992. V. 2, N 2. P. 119–131.
9. **Korte B., Hausmann D.** An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Math. 1978. V. 2. P. 65–74.

10. **Nemhauser G. L., Wolsey L. A., Fisher M. L.** An analysis of approximation for maximizing submodular set functions // Math. Programming. 1978. V. 14, N 3. P. 265–294.

Адрес автора:

Бакинский государственный университет,
ул. З. Халилова, 23,
370145 Баку,
Республика Азербайджан.
E-mail: rab-unibak@rambler.ru

Статья поступила
1 июля 2004 г.

Переработанный вариант —
19 сентября 2005 г.