ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2005. Серия 2. Том 12, № 1, 37–54

УДК 621.391.15

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ВЕРШИН ГРАФА $G(Z^2)$ В ТРИ ЦВЕТА*)

С. А. Пузынина

Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если цветовой состав окружения каждой его вершины однозначно определяется цветом этой вершины. Параметры совершенной раскраски в n цветов задаются квадратной матрицей порядка n. Матрица называется *допустимой*, если существует совершенная раскраска графа $G(Z^2)$ с такой матрицей. Перечислены все допустимые матрицы совершенных раскрасок в три цвета (число таких матриц равно 21), приведены соответствующие примеры раскрасок.

Введение

Зафиксируем множество цветов $N = \{1, 2, ..., n\}$ и рассмотрим произвольный граф G. Раскраска вершин графа G в цвета из N с квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ порядка n называется *совершенной*, если число вершин цвета j, смежных с вершиной цвета i, не зависит от выбора последней вершины и равно a_{ij}. Свойства совершенных раскрасок различных графов ранее изучались в [1–8].

В статье рассматриваются совершенные раскраски графа $G(Z^2)$ бесконечной прямоугольной плоской решетки. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *допустимой*, если существует совершенная раскраска графа $G(Z^2)$ в n цветов с матрицей A. В [3] было доказано, что для любой допустимой матрицы существует периодическая совершенная раскраска этого графа. Следствием этого результата является, в частности, то, что для любой совершенной раскраски бесконечной прямоугольной решетки существует совершенная раскраска с той же матрицей конечного тороидального графа.

В [6] была решена задача описания всех совершенных раскрасок в два цвета бесконечной прямоугольной плоской решетки. Оказалось, что имеется ровно 9 допустимых матриц совершенных раскрасок в два цвета;

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке программы образования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 8287).

для двух из них существует бесконечное число раскрасок, для остальных — одна или две раскраски. В настоящей статье рассматривается аналогичная задача для трех цветов.

1. Определения и обозначения

Рассматриваются совершенные раскраски графа $G(Z^2)$ — бесконечной прямоугольной плоской решетки. Этот граф является регулярным, степень любой его вершины равна 4. Каждой вершине такого графа ставится в соответствие пара целых чисел — координат: (x, y). Вершины смежны, если у них одна координата совпадает, а другая отличается на единицу.

Две матрицы совершенных раскрасок называются *эквивалентными*, если одна матрица может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов.

Для того чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, каждой матрице (a_{ij}) совершенной раскраски в три цвета поставим в соответсвие *характеристический вектор*, состоящий из ее элементов. В качестве характеристического вектора можно взять $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{21}, a_{31})$. По характеристическому вектору матрица совершенной раскраски полностью восстанавливается (утверждение 12).

Матрица с лексикографически минимальным характеристическим вектором в классе эквивалентных матриц называется *канонической* (или *имеющей канонический вид*).

2. Основная теорема

Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *Любая допустимая матрица совершенной раскраски в три цвета эквивалентна одной из следующих* 21 *матриц*:

$$1.\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\1&3&0\end{pmatrix}\quad 2.\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\2&2&0\end{pmatrix}\quad 3.\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\quad 4.\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&4\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$5.\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&3\\1&1&2\end{pmatrix}\quad 6.\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\1&1&2\end{pmatrix}\quad 7.\begin{pmatrix}0&2&2\\4&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\quad 8.\begin{pmatrix}0&3&1\\3&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$9.\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\quad 10.\begin{pmatrix}0&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\quad 11.\begin{pmatrix}0&4&0\\1&1&2\\0&2&2\end{pmatrix}\quad 12.\begin{pmatrix}0&2&2\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$13.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} 14.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} 15.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} 16.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$17.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} 18.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} 19.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$20.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} 21.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, укажем некоторые необходимые условия допустимости матриц (некоторые из них сформулированы и доказаны для произвольного числа цветов, некоторые — для трех, но они легко обобщаются на произвольное число цветов) и рассмотрим все канонические матрицы, удовлетворяющие этим условиям. Проще всего доказать допустимость матриц. Для этого достаточно построить примеры соответствующих раскрасок. Все раскраски получились периодическими. Поэтому мы приведем фрагменты, по которым вся раскраска легко восстанавливается. Для некоторых матриц найдена одна совершенная раскраска, для других — две, для одной матрицы — три совершенных раскраски и для одной — четыре. Пять матриц задают бесконечное число совершенных раскрасок (они описаны ниже). Для доказательства недопустимости матриц потребуются некоторые критерии недопустимости. Недопустимость нескольких матриц доказана перебором.

В дальнейшем иногда для удобства вместо графа $G(Z^2)$ рассматривается двойственный ему граф [4, с. 138–141], который изоморфен графу $G(Z^2)$, и вместо слова "вершина" употребляется слово "клетка". В частности, для наглядности на рисунках окрашены клетки (цвета обозначены цифрами).

Утверждение 1. *В допустимой матрице совершенной раскраски в n цветов сумма чисел в любой строке равна 4, т. е. $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}=4$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Справедливость утверждения следует из того, что общее число вершин, смежных с вершиной i, равно $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}$ и совпадает со степенью любой вершины в графе $G(Z^2)$, которая равна 4.

Утверждение 2. *Если в квадратной матрице A порядка n элементы $a_{ij}=0$ и $a_{ji}\neq 0$, то A недопустима.*

Доказательство. Неравенство $a_{ij}\neq 0$ означает, что каждая вершина цвета i смежна с вершинами цвета j, но это выполняется тогда и только тогда, когда каждая вершина цвета j смежна с вершинами цвета i, т. е. $a_{ji} \neq 0$. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Если в квадратной матрице A порядка 3 в какой-либо строке одновременно два недиагональных элемента равны нулю ($a_{ki} = 0$ и $a_{kj} = 0$; i, j и k попарно различны), то A недопустима.*

Действительно, если $a_{ki} = 0$ и $a_{kj} = 0$, то $a_{kk} = 4 - a_{ki} - a_{kj} = 4$. Следовательно, граф $G(Z^2)$ окрашивается в цвет k, а это не является совершенной раскраской в три цвета.

Утверждение 4. *Если в допустимой матрице совершенной раскраски в 3 цвета в каком-либо столбце два недиагональных элемента равны между собой ($a_{ik} = a_{jk}$, i, j, k попарно различны), то в результате замены цветов i и j одним цветом получается допустимая матрица* $\begin{pmatrix} a_{ii} + a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ki} + a_{kj} & a_{kk} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Рассмотрим совершенную раскраску, соответствующую матрице A. Вершина цвета k имеет a_{kk} смежных вершин цвета k и $a_{ki} + a_{kj}$ вершин, окрашенных в цвета i или j. Каждая вершина цвета i или j имеет $a_{ik} = a_{jk}$ смежных с ней вершин цвета k и $a_{ii} + a_{ij} = a_{ji} + a_{jj}$ вершин, окрашенных в цвета i или j.

Утверждение 5. *Если в матрице совершенной раскраски в n цветов существуют цвета i и j такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \min(a_{ik}, a_{jk}) < 2, \tag{1}$$

то в соответствующей совершенной раскраске не существует двух соседних по диагонали вершин различных цветов i и j.

Такие цвета i и j назовем *диагонально несовместимыми*.

Неравенство (1) означает, что вершины цвета i и j имеют менее двух общих смежных вершин, а соседние диагональные вершины имеют две общие смежные вершины.

Утверждение 6. *Если в квадратной матрице A порядка n цвета i и j диагонально несовместимы и существует цвет k (возможно, $k = j$ или $k = i$) такой, что $a_{ki} \neq 0$ и $a_{kj} \neq 0$, $a_{ki} + a_{kj} \geqslant 3$, то матрица A недопустима.*

Такую упорядоченную тройку цветов (k, i, j) назовем *противоречивой*. Заметим, что в противоречивой тройке, во-первых, порядок цветов i и j не имеет значения и, во-вторых, может быть, что $k = i$ или $k = j$.

Доказательство. Предположим, что совершенная раскраска существует. По утверждению 5 в совершенной раскраске не существует двух соседних по диагонали вершин различных цветов i и j. Условие $a_{ki} \neq 0$, $a_{kj} \neq 0$ и $a_{ki} + a_{kj} \geqslant 3$ означает, что вершина цвета k имеет по крайней мере три смежных вершины, окрашенных цветами i и j. Следовательно, соседние диагональные вершины цвета i будут окрашены цветом j. Противоречие с утверждением 5. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Матрица* $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *является недопустимой.*

Недопустимость этой матрицы следует из того, что тройка цветов (2,1,2) является противоречивой.

Утверждение 8. *Если квадратная матрица порядка* 3 *удовлетворяет условиям утверждения* 4 *и в результате замены двух цветов одним цветом получается матрица* $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, *то исходная матрица недопустима.*

Справедливость утверждения следует из утверждений 7 и 4.

Введем понятие частоты цвета в совершенной раскраске в n цветов. В [3] было доказано, что для любой допустимой матрицы существует периодическая совершенная раскраска этого графа. Следствием этого результата является, в частности, то, что для любой совершенной раскраски бесконечной прямоугольной решетки существует совершенная раскраска с той же матрицей конечного тороидального графа. Пусть матрица A допустима. Рассмотрим совершенную раскраску тороидального графа с такой же матрицей (если периодическая раскраска не единственна, то выберем какую-нибудь раскраску; ниже мы докажем, что частота зависит только от матрицы). Пусть N — общее число вершин в этом графе, а N_i — число вершин цвета i. *Частотой цвета* i в совершенной раскраске бесконечной прямоугольной решетки с матрицей A назовем величину $\nu_A(i) = \dfrac{N_i}{N}$.

Утверждение 9. *Если в допустимой квадратной матрице порядка* n $a_{ij} \neq 0$ *и* $a_{ji} \neq 0$, *то отношение частот цветов* i *и* j *равно* $\frac{\nu_A(i)}{\nu_A(j)} = \frac{a_{ji}}{a_{ij}}$.

Доказательство. Рассмотрим подграф тороидального графа, вершинами которого являются вершины цветов i и j, а ребрами — те ребра, которые инцидентны вершинам двух различных цветов i и j. Этот граф является двудольным, вершины каждой доли окрашены своим цветом. Подсчитаем число ребер в графе двумя способами. Пусть N_i и N_j — число вершин цвета i и j соответственно в этом графе. Тогда, с одной стороны, число ребер равно $N_i a_{ij}$, с другой стороны — $N_j a_{ji}$. Следовательно, $N_i a_{ij} = N_j a_{ji}$, $\dfrac{N_i}{N_j} = \dfrac{a_{ji}}{a_{ij}} = \dfrac{N_i}{N} : \dfrac{N_j}{N} = \dfrac{\nu_A(i)}{\nu_A(j)}$.

Пусть $a_{ij} = a_{ji} = 0$. Заметим, что по определению допустимой матрицы порядка n в совершенной раскраске должны быть использованы все n цветов. Рассмотрим две вершины цветов i и j. Выберем какой-нибудь кратчайший путь в графе, соединяющий эти вершины. Пусть его длина равна $l+1$, а вершины пути окрашены цветами $i, k_1, \ldots, k_l, j$. Тогда существует последовательность $a_{ik_1} \neq 0$, $a_{k_1k_2} \neq 0$, .., $a_{k_lj} \neq 0$ и отношение частот можно найти следующим образом:

$$\frac{\nu_A(i)}{\nu_A(j)} = \frac{N_i}{N_j} = \frac{N_i}{N_{k_1}} \cdot \frac{N_{k_1}}{N_{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{N_{k_l}}{N_j} = \frac{a_{k_1i}}{a_{ik_1}} \cdot \frac{a_{k_2k_1}}{a_{k_1k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{jk_1}}{a_{k_lj}},$$

а саму частоту по формуле

$$\nu_A(i) = \frac{N_i}{N} = \frac{N_i}{N_1 + \ldots N_n} = \frac{1}{\frac{N_1}{N_i} + \ldots \frac{N_n}{N_i}} = \frac{1}{\frac{\nu_A(1)}{\nu_A(i)} + \ldots \frac{\nu_A(n)}{\nu_A(i)}}.$$

Таким образом, частота цвета зависит только от матрицы и не зависит от выбора раскраски.

Из утверждения 9 вытекает следующее свойство допустимых матриц.

Утверждение 10. *Если в допустимой матрице совершенной раскраски в три цвета $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, то $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$.*

Утверждение 11. *Если для цвета i совершенной раскраски в n цветов выполняется неравенство $\nu_A(i) > 1/2$, то $a_{ii} \geqslant 2$.*

Доказательство. Возьмем тороидальный граф с четными периодами (вместо нечетных периодов можно рассматривать в два раза большие). Разобьем этот граф на квадраты 2×2. Так как частота больше $\frac{1}{2}$, то должен быть квадрат, в котором число вершин цвета i больше 2. Это возможно только в случае, когда $a_{ii} \geqslant 2$.

Утверждение 12. *Матрица совершенной раскраски восстанавливается по своему характеристическому вектору $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{21}, a_{31})$.*

Справедливость утверждения очевидна в силу того, что сумма чисел в любой строке должна быть равна 4.

Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим матрицы, у которых на диагонали нет цифры 3 (случай 3 на диагонали рассмотрим отдельно).

Назовем матрицу *непротиворечивой*, если она удовлетворяет следующим свойствам (необходимые условия допустимости матрицы, соответствующие утверждениям 1, 2, 3 и 10):

1) сумма чисел в любой строке равна 4, т. е. $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 4$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant 3$;

2) если $a_{ij} = 0$, то $a_{ji} = 0$ при $i \neq j$;

3) ни в какой строке нет двух недиагональных нулевых элементов (если $a_{ki} = 0$, то $a_{kj} \neq 0$, $i \neq k$, $j \neq k$, $i \neq j$);

4) если $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, то $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$.

Упорядочим лексикографически непротиворечивые канонические матрицы по возрастанию характеристического вектора. Такое упорядочение характеристических матриц назовем *лексикографическим.*

Выпишем возможные тройки диагональных элементов: 000, 001, 002, 011, 012, 022, 111, 112, 122, 222.

Рассмотрим для примера диагональ 000.

1. В лексикографически минимальной матрице $a_{12} = 0$. По утверждению 2 имеем $a_{21} = 0$. Минимальное значение, которое может принимать элемент a_{31} в этой матрице, равно 1 ($a_{31} \neq 0$, так как $a_{13} \neq 0$ по утверждению 2). Следовательно, $a_{32} = 4 - a_{31} - a_{33} = 3$, $a_{23} = 4 - a_{21} - a_{22} = 4$ и $a_{13} = 4 - a_{11} - a_{12} = 4$.

Таким образом, лексикографически минимальной матрицей будет матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. В следующей по порядку матрице $a_{31} = 2$, значит, $a_{32} = 2$. Таким образом, матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. В следующей матрице $a_{31} = 3$, $a_{32} = 1$, но эта матрица не является канонической, так как она эквивалентна матрице $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, у которой меньше характеристический вектор. Значит, в третьей непротиворечивой матрице $a_{12} = 1$, $a_{13} = 3$. Минимальное значение, которое может принимать элемент a_{21} в этой матрице, равно 1. Значит, $a_{23} = 4 - a_{21} = 3$. По утверждению 10 элементы a_{31}, a_{32} могут принимать только значения $a_{31} = a_{32} = 2$. Таким образом, третья матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. В четвертой матрице $a_{12} = 1$, $a_{13} = 4 - a_{12} - a_{11} = 3$, следующее по порядку значение, которое может принимать a_{21}, равно 2. Значит, $a_{23} = 2$. По утверждению 10 имеем $a_{31} = 3$, $a_{32} = 1$. Таким образом,

получаем матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Следующее значение, которое может принимать a_{21}, равно 3. Тогда $a_{23} = 1$ и по утверждению 10 этот случай не реализуется.

Если $a_{23} = 4$, то получим матрицу, эквивалентную матрице 2.

Значит, в пятой матрице $a_{12} = 2$ и $a_{13} = 2$. Минимальное значение, которое может принимать a_{21}, равно 2. (Если $a_{21} < 2$, то матрица не является канонической, так как в ней после транспозиции цветов 1 и 2 уменьшается характеристический вектор.) По утверждению 10 получаем $a_{31} = a_{32} = 2$, т. е. пятая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Все остальные матрицы не являются каноническими, так как если $a_{12} \geqslant 3$, то $a_{13} \leqslant 1$, и перестановкой цветов 2 и 3 получим эквивалентную матрицу с меньшим характеристическим вектором. Аналогично, если $a_{21} \geqslant 3$, то матрица не является канонической.

Таким образом, мы получили все непротиворечивые канонические матрицы с диагональю 000.

Аналогичным образом перебираются все остальные диагонали и получается 42 непротиворечивые канонические матрицы без 3 на диагонали. Перебор остальных диагоналей приведен в приложении 1.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ L_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ L_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L_8 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_9 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ L_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ L_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ L_{19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ L_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{25} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ L_{26} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ L_{27} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ L_{28} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{29} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ L_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ L_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{35} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{36} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{37} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{38} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ L_{39} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{40} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ L_{42} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы L_1, L_2, L_5, L_{10}, L_{11}, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{20}, L_{21}, L_{27}, L_{31}, L_{32}, L_{33}, L_{34}, L_{35}, L_{37}, L_{41} и L_{42} являются допустимыми и соответствуют матрицам 1—19 в формулировке теоремы. На рис. 1 приведены фрагменты соответствующих совершенных раскрасок, по которым нетрудно восстановить всю совершенную раскраску.

Матрицы L_5, L_{11}, L_{14}, L_{15}, L_{27}, L_{32}, L_{33} и L_{34} допускают одну совершенную раскраску (с точностью до поворотов, сдвигов, зеркального отображения и допустимой замены цветов). Для матриц L_{13}, L_{20}, L_{31} и L_{41} найдено две совершенных раскраски, для матрицы L_{42} — три, для матрицы L_{37} — четыре. Матрицы L_1, L_2, L_{10}, L_{21} и L_{35} допускают бесконечное число совершенных раскрасок (так как при сдвигах бесконечных диагоналей из двух чередующихся цветов раскраска остается совершенной). Еще две матрицы будут рассмотрены ниже. Остальные матрицы являются недопустимыми.

2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	1	3	2	3	1	3	2	3
2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	2	3	1	3	2	3	1	3
2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	1	3	2	3	1	3	2	3

L_1

2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	1	3	1	3	1	3	1	3
2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	1	3	1	3	1	3	1	3
2	3	2	3	2	3	2	3	2
3	1	3	1	3	1	3	1	3

L_2

1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2

L_5

3	3	1	3	3	2	3	3	2
3	2	3	3	1	3	3	1	3
1	3	3	2	3	3	2	3	3
3	3	1	3	3	1	3	3	1
3	2	3	3	2	3	3	2	3
1	3	3	1	3	3	1	3	3

L_{10}

1	2	3	3	3	1	2	3	3
3	3	1	2	3	3	3	1	2
2	3	3	3	1	2	3	3	3
3	1	2	3	3	3	1	2	3
3	3	3	1	2	3	3	3	1
1	2	3	3	3	1	2	3	3

L_{11}

3	3	2	1	3	3	2	1	3
3	3	1	2	3	3	1	2	3
1	2	3	3	1	2	3	3	1
2	1	3	3	2	1	3	3	2
3	3	2	1	3	3	2	1	3
3	3	1	2	3	3	1	2	3

L_{13}

3	2	3	1	3	1	3	2	3
3	1	3	2	3	2	3	1	3
3	2	3	1	3	1	3	2	3
3	1	3	2	3	2	3	1	3
3	2	3	1	3	1	3	2	3
3	1	3	2	3	2	3	1	3

L_{13}

1	2	1	3	3	1	2	1	3
2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	3	3	1	2	1	3	3	1
3	3	1	2	1	3	3	1	2
3	1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1	3

L_{14}

3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2

L_{15}

3	2	3	2	1	3	2	3	2
2	1	3	2	3	2	1	3	2
2	3	2	1	3	2	3	2	1
1	3	2	3	2	1	3	2	3
3	2	1	3	2	3	2	1	3
3	2	3	2	1	3	2	3	2

L_{20}

2	1	2	3	3	2	1	2	3
3	3	2	1	2	3	3	2	1
1	2	3	3	2	1	2	3	3
3	2	1	2	3	3	2	1	2
2	3	3	2	1	2	3	3	2
2	1	2	3	3	2	1	2	3

L_{20}

1	3	2	1	2	3	1	3	3
2	3	1	3	2	1	2	2	1
2	1	2	3	1	3	3	1	3
1	3	2	1	2	2	1	2	2
2	3	1	3	3	1	3	3	1
2	1	2	2	1	2	2	1	2

L_{21}

2	2	1	2	2	1	2	2	1
3	3	2	3	3	2	3	3	2
3	3	2	3	3	2	3	3	2
2	2	1	2	2	1	2	2	1
3	3	2	3	3	2	3	3	2
3	3	2	3	3	2	3	3	2

L_{27}

2	2	3	3	1	3	3	2	2
3	1	3	3	2	2	1	2	2
3	2	2	1	2	2	3	3	1
1	2	2	3	3	1	3	3	2
3	3	1	3	3	2	2	1	2
3	3	2	2	1	2	2	3	3

L_{31}

2	2	2	1	3	3	3	3	1
3	1	2	2	2	2	1	3	3
3	3	3	3	1	2	2	2	2
2	2	1	3	3	3	3	1	2
1	2	2	2	2	1	3	3	3
3	3	3	1	2	2	2	2	1

L_{31}

1	2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2	1
2	1	3	3	1	2	2	1	3
1	3	3	1	2	2	1	3	3
3	3	1	2	2	1	3	3	1
3	1	2	2	1	3	3	1	2

L_{32}

1	1	3	3	1	1	3	3	1
2	2	3	3	2	2	3	3	2
3	3	2	2	3	3	2	2	3
1	1	3	3	1	1	3	3	1
3	3	2	2	3	3	2	2	3
2	2	3	3	2	2	3	3	2

L_{33}

1	1	3	3	3	2	2	3	3
3	3	2	2	3	3	3	1	1
2	3	3	3	1	1	3	3	3
3	1	1	3	3	3	2	2	3
3	3	3	2	2	3	3	3	1
2	2	3	3	3	1	1	3	3

L_{34}

1	1	3	3	1	1	3	3	1
2	3	3	2	2	3	3	2	2
3	3	1	1	3	3	1	1	3
3	2	2	3	3	2	2	3	3
1	1	3	3	1	1	3	3	1
2	3	3	2	2	3	3	2	2

L_{35}

3	2	2	3	1	1	3	2	2
3	1	1	3	2	2	3	1	1
3	2	2	3	1	1	3	2	2
3	1	1	3	2	2	3	1	1
3	2	2	3	1	1	3	2	2
3	1	1	3	2	2	3	1	1

L_{37}

3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2	1

L_{37}

3	3	2	1	3	3	2	1	3
3	3	2	1	3	3	2	1	3
2	1	1	2	2	1	1	2	2
1	2	3	3	1	2	3	3	1
1	2	3	3	1	2	3	3	1
2	1	1	2	2	1	1	2	2

L_{37}

3	3	1	2	3	3	1	2	3
3	3	2	1	3	3	2	1	3
2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	3	3	2	1	3	3	2
1	2	3	3	1	2	3	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1

L_{37}

1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3

L_{41}

1	1	3	3	1	1	3	3	1
1	1	3	3	1	1	3	3	1
3	3	2	2	3	3	2	2	3
3	3	2	2	3	3	2	2	3
1	1	3	3	1	1	3	3	1
1	1	3	3	1	1	3	3	1

L_{41}

2	2	1	1	2	2	1	1	2
2	2	1	1	2	2	1	1	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	1	2	2	1	1	2	2	1
1	1	2	2	1	1	2	2	1
3	3	3	3	3	3	3	3	3

L_{42}

1	3	2	3	1	3	2	3	1
1	3	2	3	1	3	2	3	1
1	3	2	3	1	3	2	3	1
1	3	2	3	1	3	2	3	1
1	3	2	3	1	3	2	3	1
1	3	2	3	1	3	2	3	1

L_{42}

1	1	3	3	2	2	1	1	3
1	1	3	3	2	2	1	1	3
3	2	2	1	1	3	3	2	2
3	2	2	1	1	3	3	2	2
1	1	3	3	2	2	1	1	3
1	1	3	3	2	2	1	1	3

L_{42}

Рис. 1

Из утверждения 8 следует недопустимость матриц L_3 (1, 2), L_4 (1, 3), L_6 (1, 2), L_{19} (2, 3) и L_{22} (2, 3). Здесь в скобках после каждой матрицы указаны цвета, объединением которых в один цвет получается недопустимая матрица порядка 2.

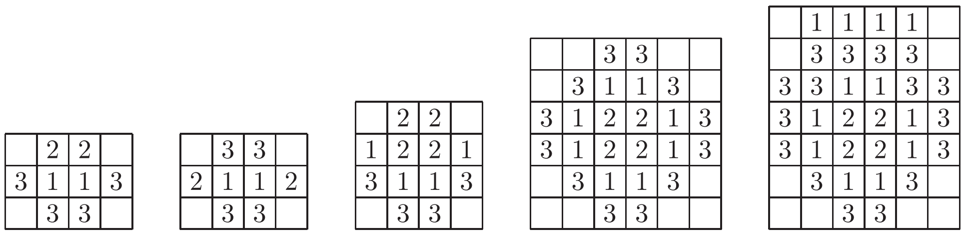
Из утверждения 6 следует недопустимость матриц L_7 (3, 1, 3), L_8 (3, 1, 3), L_9 (3, 1, 3), L_{16} (3, 1, 3), L_{18} (2, 1, 3), L_{24} (2, 1, 2), L_{25} (2, 1, 2), L_{26} (2, 1, 2), L_{28} (2, 1, 2) и L_{30} (2, 1, 2). Здесь в скобках после каждой матрицы указана противоречивая тройка цветов для этой матрицы.

Из утверждения 11 следует недопустимость матриц L_6, L_{17} и L_{18}, частота цвета 3 больше $\frac{1}{2}$.

Недопустимость матриц L_{12}, L_{23}, L_{29}, L_{36}, L_{38}, L_{39} и L_{40} доказывается перебором.

Для примера докажем недопустимость матрицы $L_{40}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим произвольную вершину, окрашенную цветом 1. Для ее окрестности возможны два случая; в обоих случаях однозначно восстанавливаются цвета еще трех вершин (см. рис. 2.1*а*, 2.1*б*). Случай 2.1*б* не реализуется, так как вершина цвета 2 имеет ровно две смежные вершины цвета 2. Поэтому вершина цвета 3 неизбежно будет смежна с вершиной цвета 2. В случае 2.1*а* однозначно восстанавливаются вершины четырех вершин сверху (см. рис. 2.2). Теперь цвета четырех еще не окрашенных вершин, смежных с вершинами цвета 2, могут быть окрашены только цветом 1. Вершины, смежные с вершинами цвета 1, которые еще не окрашены, должны иметь цвет 3 (см. рис. 2.3). Однозначно восстанавливается цвет 3 еще четырех вершин, затем цвет 1 их соседей и приходим к противоречию: число вершин цвета 1, смежных с вершиной цвета 1, равно одному, а на рис. 2.4 получилось две.

Доказательство недопустимости остальных матриц аналогично доказательству для матрицы L_{40} и приведено в приложении 2.



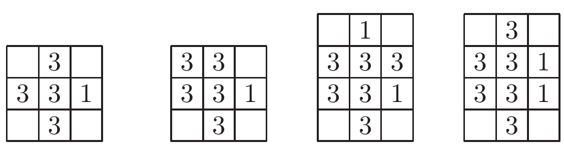
1*а* 1*б* 2 3 4

Рис. 2

Таким образом, найдены все допустимые матрицы, в которых нет 3 на диагонали. Найдем теперь все совершенные раскраски, в матрице которых хотя бы один из диагональных элементов равен 3. Тогда в каноническом виде матрицы $a_{33} = 3$. Рассмотрим произвольную вершину цвета 3. Без ограничения общности можем считать, что ее окрестность выглядит как на рис. 3.1.

Рассмотрим левую вершину цвета 3. Так как имеется еще две смежные вершины цвета 3, то по крайней мере одна из верхней и нижней смежных с ней вершин будет окрашена цветом 3. Следовательно, без ограничения общности будем полагать, что это верхняя вершина (см. рис. 3.2).

Рассмотрим правую верхнюю вершину цвета 3. Возникает два случая (см. рис. 3.3*а*, 3.3*б*).



1 2 3*а* 3*б*

Рис. 3

В случае 3.3*а* очевидным образом получаем, что еще несколько вершин должны быть окрашены цветом 3 (см. рис. 4.1 и 4.2). Так как рассматривается раскраска в три цвета и $a_{32} = 0$, то $a_{23} = 0$ по утверждению

2 и $a_{21} \neq 0$ по утверждению 3. Следовательно, возникает два случая (см. рис. 4.3*а* и 4.3*б*). В обоих случаях получается, что вершина цвета 3 смежна с вершиной цвета 2; получаем противоречие с тем, что $a_{32} = 0$. Таким образом, случай 3.3*а* не реализуется.

1

	1	3	
3	3	3	3
3	3	1	
	3		

2

		3	
	1	3	3
3	3	3	3
3	3	1	
	3		

3*а*

		3	
	1	3	3
3	3	3	3
3	3	1	2
	3		

3*б*

		3	
	1	3	3
3	3	3	3
3	3	1	
	3	2	

Рис. 4

Значит, вершины цвета 3 расположены двойными столбцами (см. рис. 5.1). Так как вершина цвета 1 смежна с вершиной цвета 2, то получаем следующий слой (см. рис. 5.2). Далее возможны два случая (см. рис. 5.3*а* и 5.3*б*). В обоих случаях далее однозначно восстанавливаются совершенные раскраски (см.рис. 5.4*а* и 5.4*б*) с соответствующими матрицами: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Эти матрицы соответствуют матрицам 20, 21 в формулировке теоремы.

1

1	3	3	1
1	3	3	1
1	3	3	1
1	3	3	1
1	3	3	1
1	3	3	1

2

2	1	3	3	1	2
2	1	3	3	1	2
2	1	3	3	1	2
2	1	3	3	1	2
2	1	3	3	1	2
2	1	3	3	1	2

3*а*

1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1
1	2	1	3	3	1	2	1

3*б*

2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2
2	2	1	3	3	1	2	2

4*а*

1	2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	2	1	3	3	1	2	1	3	3
1	2	1	3	3	1	2	1	3	3

4*б*

2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
2	2	1	3	3	1	2	2	1	3
2	2	1	3	3	1	2	2	1	3

Рис. 5.

Таким образом, любая допустимая матрица с цифрой 3 на диагонали эквивалентна одной из двух матриц 20 или 21.

Цифры 4 на диагонали в допустимой матрице не может быть по утверждению 3. Следовательно, описаны все допустимые матрицы. Теорема доказана.

Приложение 1

В этом приложении приводится перебор характеристических векторов с целью получить все канонические непротиворечивые матрицы. Матрицы с диагональю 000 рассмотрены в тексте статьи, для остальных диагоналей выпишем в лексикографическом порядке все характеристические векторы и укажем, какие из них соответствуют непротиворечивым матрицам, какие недопустимым и в силу каких утверждений. Для краткости характеристические векторы записаны без скобок и запятых, символ * означает любое число. В таблице напротив каждого вектора стоит либо номер утверждения, из которого следует недопустимость матрицы (например, 2), либо номер соответствующей непротиворечивой матрицы или эквивалентной ей канонической матрицы (например, L_1 и $\sim L_1$ соответственно). Для диагоналей 001, 002 и 112 рассматриваем только векторы со свойством $a_{12} \leqslant a_{21}$, так как в противном случае матрица не является канонической. Аналогично для диагоналей 111 и 222 должно выполняться $a_{12} \leqslant a_{ij}$, для диагоналей 011, 022 и 122 должно быть $a_{12} \leqslant a_{13}$, т. е. $a_{12} \leqslant 2$ для диагоналей 011 и 022, а для диагонали 122 должно быть $a_{12} \leqslant 1$.

001

001000	2	001121	10	001220	2	001243	L_8
001001	L_6	001122	10	001221	10	001330	2
001002	$\sim L_6$	001123	2	001222	10	001331	10
001003	2	001130	2	001223	2	001332	10
00101*	2	001131	10	001230	2	001333	2
00102*	2	001132	10	001231	10	001340	2
00103*	2	001133	2	001232	10	001341	2
001110	2	001140	2	001233	2	001342	2
001112	10	001141	2	001240	2	001343	L_9
001113	10	001142	2	001241	2	00144*	2.
001120	2	001143	L_7	001242	2		

002:

002000	2	002112	2	002142	L_{12}	002242	L_{14}
002001	L_{10}	002120	2	002220	2	002330	2

002002	2	002121	10	002221	L_{13}	002331	L_{15}
00201*	2	002122	2	002222	2	002332	2
00202*	2	002130	2	002230	2	002340	2
00203*	2	002131	10	002231	10	002341	2
00204*	2	002132	2	002232	2	002342	L_{16}
002110	2	002140	2	002240	2	00244*	3.
002111	L_{11}	002141	2	002241	2		

011

011000	2	011111	10	011132	2	011222	L_{21}
011001	L_{17}	011112	10	011133	L_{19}	011223	2
011002	L_{18}	011113	2	01120*	2	011230	2
011003	2	011120	2	011210	2	011231	2
01101*	2	011121	10	011211	L_{20}	011232	2
01102*	2	011122	10	011212	10	011233	L_{22}.
01103*	2	011123	2	011213	2		
01110*	2	011130	2	011220	2		
011110	2	011131	2	011221	10		

012

012000	2	012121	10	012222	2	012330	2
012001	L_{23}	012122	2	012230	2	012331	2
012002	2	012130	2	012231	2	012332	L_{26}
01201*	2	012131	2	012232	L_{25}	01240*	2
01202*	2	012132	L_{24}	01230*	2	012410	L_{27}
01203*	2	01220*	2	012310	2	012411	2
01210*	2	012210	2	012311	10	012412	2
012110	2	012211	10	012312	2	012420	L_{28}
012111	10	012212	2	012320	2	012421	2
012112	2	012220	2	012321	10	012422	2
012120	2	012221	10	012322	2	01243*	3.

022

022000	2	02210*	2	022121	2	022212	2
022001	L_{29}	022110	2	022122	L_{30}	022220	2
022002	2	022111	10	02220*	2	022221	2
02201*	2	022112	2	022210	2	022222	L_{32}.
02202*	2	011120	2	022211	L_{31}		

111:

111000	2	11101*	2	111121	10	111131	2
111001	L_{33}	11102*	2	111122	10	111132	2
111002	$\sim L_{33}$	11103*	2	111123	2	111133	$\sim L_{33}$.
111003	2	111111	10	111130	2		

112

112000	2	112110	2	112130	2	112230	2
112001	L_{34}	112111	L_{35}	112131	2	112231	2
112002	2	112112	2	112132	L_{36}	112232	L_{38}
11201*	2	112120	2	112220	2	11233*	3.
11202*	2	112121	10	112221	L_{37}		
11203*	2	112122	2	112222	2		

122

122000	2	12201*	2	122110	2	122120	2
122001	L_{39}	12202*	2	122111	10	122121	2
122002	2	12210*	2	122112	2	122122	L_{40}.

222

222000	2	222002	2	222111	L_{42}	222122	$\sim L_{41}$
222001	L_{41}	22201*	2	222112	2	222222	2.

Приложение 2

В этом приложении приводится доказательство недопустимости матриц L_{12}, L_{23}, L_{29}, L_{36}, L_{38}, L_{39}. Доказательство аналогично доказательству для матрицы L_{40}, которое рассмотрено в тексте статьи; начиная с вершины некоторого цвета восстанавливем цвета в окрестности этой вершины и приходим к противоречию. Приведем лишь рисунки, по которым несложно восстановить доказательства. В случае, когда возможно два варианта окрашивания вершин, соответствующие рисунки помечены буквами *а* и *б*. Место, где получается противоречие, помечено кружком.

	1	
1	2	1
	1	

		3		
	3	1	3	
3	1	2	1	3
	3	1	3	
		3		

	3	3	3	
3	3	1	3	3
3	1	2	1	3
3	3	1	3	3
	3	3	3	

		1	1	1		
	1	3	3	3	1	
1	3	3	1	3	3	1
1	3	1	2	1	3	1
1	3	3	1	3	3	1
	1	3	3	3	1	
		1	1	1		

.

L_{12}. 1 2 3 4

	3	3	
3	2	2	3
	3	3	

	3	3	3
3	2	2	3
	3	3	

		3	
	3	1	3
	3	3	3
3	2	2	3
	3	3	

.

L_{23}. 1 2 3

	3	3
3	1	3
	3	

		1	
	3	3	2
3	1	3	
	3		

	3	1	3	
	3	3	2	2
3	1	3	2	
	3			

	3	1	3	
	3	3	2	2
3	1	3	2	3
	3	3	2	

.

L_{29}. 1 2 3 4

	1	1	
1	2	2	1
	1	1	

		3	3		
	3	1	1	3	
1	1	2	2	1	1
		1	1		

	1	1	1	1	
1	3	3	3	3	1
3	3	1	1	3	3
1	1	2	2	1	1
		1	1		

.

L_{36}. 1 2 3

	1	1	
1	2	2	1
	1	1	

	1	1	2
1	2	2	1
	1	1	

	1	1	1	
1	2	2	1	2
	1	1	3	

		3	2	
	3	3	1	1
	1	1	2	2
1	2	2	1	
	1	1		

	1	1	1	
1	2	2	1	2
	1	1	3	3
			3	

.

L_{38}. 1 2*a* 2*б* 3*a* 3*б*

	3	3	
3	1	1	3
	3	3	

	3	3	3
3	1	1	3
	3	3	

		2	2	
	3	3	3	1
3	1	1	3	
	3	3		

			2	
		2	2	3
	3	3	3	1
3	1	1	3	
	3	3		

	3	2	2	
1	3	2	2	3
2	3	3	3	1
3	1	1	3	
	3	3		

.

L_{39}. 1 2 3 4 5

Рис. 6.

Автор выражает благодарность С. В. Августиновичу и Д. С. Кротову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–16.
2. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
3. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 79–92.
4. **Харари Ф.** Теория графов. М: Мир, 1973.
5. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Киев: Наукова думка, 1984.
6. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268, N 1–3. P. 31–49.
7. **Camion P., Courteau B., Delsarte Ph.** On r-partition designs in Hamming spaces // Appl. Algebra in Engrg. Comm. Comput. 1992. V. 2. P. 147–162.
8. **Godsil C. D., Martin W. J.** Quotients of association schemes // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69, N 2. P. 185–199.

Адрес автора:

Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
27 мая 2004 г.

Переработанный вариант —
15 апреля 2005 г.