ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2005. Серия 2. Том 12, № 1, 55–73

УДК 519.87

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕДЕЛИМОГО РЕСУРСА*)

Э. О. Рапопорт

Изучается динамическая экономическая система, состояния которой в каждый момент времени задаются целыми неотрицательными точками плоскости. Имеются два различных вида производства, в каждом из которых состояние системы изменяется на некоторый случайный вектор с целыми компонентами. Под управлением понимается выбор в каждый момент времени одного из имеющихся видов производства. Цель управления — минимизация вероятности выхода из первого квадранта. Получены двусторонние оценки для этой вероятности.

Введение

Одна из стандартных задач динамического управления экономикой — распределение в каждый момент времени ограниченного ресурса между конкурирующими производствами. Когда ресурс можно дробить, возникает задача оптимального управления, определяющая распределение ресурса в каждый момент времени. Другой класс задач возникает, если ресурс неделим, т. е. если имеющийся ресурс необходимо целиком отдавать только одному производству. Ясно, что отсутствие ресурса в тех производствах, для которых ресурс не выделяется, ведет к ухудшению состояния, характеризующего результаты этого производства, в то время как выделение ресурса – к улучшению состояния. Такие задачи обычно решаются методами целочисленного программирования, методами динамического программирования и т. п. Наличие стохастических факторов, влияющих на выпуск продукции в каждом из производств, существенно усложняет задачу.

При изучении динамики экономической системы, функционирующей в случайной среде, одним из основных направлений является исследование существования магистралей, т. е. некоторых кривых, около которых

*)Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00877) и гранта президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–80.2003.6).

сосредоточена траектория при оптимальном управлении. Такие результаты получены в случае, когда целевой функционал всей системы является суммой функционалов в каждый момент времени (см., например, [6, 7]). Ситуация осложняется, когда этот функционал не аддитивен. В этом случае возможен подход, связанный с выбором магистралей (при условии, что магистраль существует) из некоторого класса. При этом полезно исследовать управления, "насильно"подводящие траекторию к этой магистрали (выбор магистрали можно рассматривать как стратегическое управление).

Интересный класс задач был изучен Р. Раднером и М. Ротшильдом в [8, 9]. В рассматриваемых авторами моделях необходимо распределить единичный неделимый ресурс между различными производствами, каждое из которых производит n видов продуктов. Выделение ресурса какому-либо производству приводит к увеличению запаса одних продуктов и уменьшению запаса других (увеличение и уменьшение зависят от случайных факторов).

Считается, что система функционирует (живет) до тех пор, пока количество каждого продукта неотрицательно и хотя бы для одного строго положительно. При этом ищется управление, которое максимизирует вероятность выживания, т. е. минимизирует вероятность выхода из положительного ортанта.

В [9] было введено понятие "пожарного"("putting out fires") управления и показано, что для существования управления, при котором вероятность выживания положительна, необходимо и достаточно, чтобы некоторая константа, порожденная "пожарным"управлением и зависящая только от математических ожиданий входящих в модель случайных величин, была положительна. Однако построить управление, оптимальное в каком-либо классе, авторам не удалось.

В [2, 3] был предложен простой класс управлений, обобщающий понятие "пожарного"управления, и изучались модели, в которых (при разных предположениях о природе стохастических объектов) удалось найти оптимальное в этом классе управление.

В настоящей статье изучаются некоторые свойства марковских цепей, возникающих в задачах такого типа. Получены двусторонние оценки целевого функционала.

1. Основная модель

Имеются два продукта и два способа производства. Состояние системы отождествляется с целочисленными точками неотрицательного квадранта плоскости. В каждый дискретный момент времени инвестор может

вкладывать неделимый единичный ресурс в одно из двух производств.

Пусть задан набор целочисленных векторов (a_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant k$. Система переходит из точки (x, y) в точку $(x + a_i, y + b_i)$ с вероятностью p_i при вложении в первое производство и с вероятностью q_i при вложении во второе производство, $1 \leqslant i \leqslant k$. Некоторые вероятности могут быть равны нулю, $\sum\limits_i p_i = \sum\limits_i q_i = 1$. Через ξ будем обозначать двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей $\{p_i\}$, а через η — двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей $\{q_i\}$.

Естественно потребовать, чтобы первое управление (вложение ресурса в первое производство) было "лучше"для первого продукта, а второе управление — "лучше"для второго продукта. Формально это предположение можно записать так:

$$\begin{array}{lll} \sum\limits_i p_i b_i & < & 0, \quad \sum\limits_i p_i(a_i + b_i) \quad > \quad 0, \\ \sum\limits_i q_i a_i & < & 0, \quad \sum\limits_i q_i(a_i + b_i) \quad > \quad 0. \end{array} \tag{1}$$

Заметим, что из этих неравенств следует выполнение условия теоремы о существовании управления с ненулевой вероятностью выживания из [9], которое в принятых обозначениях сводится к неравенству

$$\sum_i p_i b_i \cdot \sum_i q_i a_i < \sum_i p_i a_i \cdot \sum_i q_i b_i. \tag{2}$$

Под вырождением системы будем понимать выход ее из первого квадранта.

Цель управления — минимизировать вероятность вырождения системы.

Зафиксируем в каждой точке (x, y) какое-либо управление $\alpha = \alpha(x, y)$ — функцию, принимающую значения 0 или 1. Тогда при управлении $\alpha(x, y)$ получаем марковский процесс $Z(t) = (X(t), Y(t))$, матрица переходов которого определяется следующим образом: из точки (x, y) можно попасть в точку $(x+a_i, y+b_i)$ с вероятностью $s_i = \alpha(x, y)p_i+(1-\alpha(x, y))q_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, т. е. выполняются рекуррентные соотношения

$$Z(t + 1) = Z(t) + \alpha(X(t), Y(t))\xi + (1 - \alpha(X(t), Y(t)))\eta,$$

причем $Z(0) = (x, y)$.

Оператор переходов этого марковского процесса обозначим через Φ. В этих обозначениях $Z(t + 1) = \Phi(Z(t))$.

Пусть Λ — множество всех управлений, $\varphi_\alpha(x, y)$ — вероятность вырождения системы, находящейся в начальный момент в точке (x, y), при некотором управлении $\alpha \in \Lambda$. Положим $\varphi(x, y) = \inf_{\alpha \in \Lambda}\{\varphi_\alpha(x, y)\}$. Функцию φ, определяемую этой формулой, будем называть *минимальной вероятностью вырождения.* Очевидно, что если для всех i точки $(x + a_i, y + b_i)$ принадлежат первому квадранту, то справедливо равенство

$$\varphi(x, y) = \min\left(\sum_i p_i\varphi(x + a_i, y + b_i), \sum_i q_i\varphi(x + a_i, y + b_i)\right).$$

Управление $\alpha^* = \{\alpha^*(x, y)\}$ естественно называть *оптимальным,* если $\varphi(x, y) = \alpha^*(x, y)$ в каждой точке (x, y). Вопрос о существовании такого управления остаётся открытым.

2. Ассоциированная система и ее свойства

Напомним, что функция f называется *регулярной* (*гармонической*) для марковского процесса, если $f(Z) = Mf(\Phi(Z))$, *супперрегулярной* (*супергармонической*), если $f(Z) \geqslant Mf(\Phi(Z))$, и *субрегулярной* (*субгармонической*), если $f(Z) \leqslant Mf(\Phi(Z))$.

Известно (см., например, [4], с. 398), что крайние точки множества неотрицательных гармонических функций для случайного блуждания, порожденного целочисленными векторами a_i, b_i и вероятностями p_i, имеют вид

$$f(x, y) = \lambda^x\mu^y,$$

где λ и μ — положительные решения уравнения

$$\sum_i p_i\lambda^{a_i}\mu^{b_i} = 1.$$

Можно показать, что для рассматриваемого марковского процесса крайние точки множества неотрицательных гармонических функций можно отождествить с множеством пар (μ, λ), являющихся положительным решением системы

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sum_i p_i\lambda^{a_i}\mu^{b_i} & = & 1 \\ \sum_i q_i\lambda^{a_i}\mu^{b_i} & = & 1. \end{array}\right. \tag{3}$$

Эту систему будем называть системой, ассоциированной с рассматриваемой марковской цепью, или просто ассоциированной системой. Очевидно, что пара $(1, 1)$ является решением этой системы.

Рассмотрим множества Ω_p и Ω_q, определяемые по формулам

$$\Omega_p = \{(\mu,\lambda)\varepsilon R_+^2 | \sum_i p_i \lambda^{a_i}\mu^{b_i} \leqslant 1\}, \quad \Omega_q = \{(\mu,\lambda)\varepsilon R_+^2 | \sum_i q_i \lambda^{a_i}\mu^{b_i} \leqslant 1\}.$$

Лемма 1. *Если множества* Ω_p *и* Ω_q *выпуклые, то при выполнении условий* (1) *система* (3) *может иметь еще только такие положительные решения* (μ^*, λ^*), *что* $\lambda^* < 1$ *и* $\mu^* < 1$.

Доказательство. Действительно, в окрестности точки (1,1) уравнения системы (3) порождают функции $\lambda_p(\mu)$ и $\lambda_q(\mu)$, причем (как вытекает из условий (1))

$$\lambda'_p(1) = -\frac{\sum p_i b_i}{\sum p_i a_i} > 0\ , \lambda'_q(1) = -\frac{\sum q_i b_i}{\sum q_i a_i} > 0, \quad \lambda'_p(1)\ <\ \lambda'_q(1),$$

$$\lambda''_p(1) = \frac{-\sum p_i(a_i\lambda'_p(1)+b_i)^2 - \lambda'_p(1)\sum p_i(a_i+b_i)}{\sum p_i a_i} < 0,$$

$$\lambda''_q(1) = \frac{-\sum q_i(a_i\lambda'_q(1)+b_i)^2 - \lambda'_q(1)\sum q_i(a_i+b_i)}{\sum q_i a_i} > 0.$$

т. е. около точки (1,1) функция λ_p возрастающая и вогнутая, а функция λ_q возрастающая и выпуклая. Поэтому при $\mu > 1$, достаточно близких к единице, в силу условия (2) справедливо неравенство

$$\lambda_p(\mu) < \lambda_q(\mu).$$

Поскольку множества Ω_p и Ω_q выпуклые, обе координаты дополнительных точек пересечения (если они существуют) должны быть меньше единицы. Лемма 1 доказана.

Таких точек может быть несколько.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} 0,80\lambda + \dfrac{0,15}{\lambda} + \dfrac{0,05}{\mu} = 1, \\ \dfrac{0,05}{\lambda} + 0,80\mu + \dfrac{0,15}{\mu} = 1 \end{cases}$$

имеет четыре решения: $(1,1)$; $(0,25; 0,25)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{0,28}}{2,4}, \dfrac{1+\sqrt{0,28}}{2,4}\right)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{0,28}}{2,4}, \dfrac{1-\sqrt{0,28}}{2,4}\right)$.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} 0,7\dfrac{\lambda^2}{\mu} + 0,3\mu = 1, \\ 0,8\dfrac{\mu^2}{\lambda} + 0,2\lambda = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение — точку (1,1). Точка (0,0) принадлежит замыканию каждого из множеств Ω_p и Ω_q, но не является решением системы, так как входящие в систему функции в точке (0,0) не определены.

Всюду в дальнейшем будем считать, что справедливы следующие предположения.

Предположение 1. Множества Ω_p и Ω_q выпуклые и замкнутые.

Предположение 2. Система (3) помимо решения (1,1) имеет еще только одно решение (μ^*, λ^*) такое, что $\lambda^* > 0$ и $\mu^* > 0$.

Замечание 1. Если для каждого i либо $a_i b_i = 0$, либо $a_i b_i < 0$ и $a_i + b_i \geqslant 1$, то множества Ω_p и Ω_q выпуклые.

Для доказательства выпуклости Ω_p рассмотрим функцию

$$g(s) = \sum_i p_i (s\lambda + (1-s)\alpha)^{a_i} (s\mu + (1-s)\beta)^{b_i},$$

где $0 < s < 1$, а точки (λ, μ) и (α, β) принадлежат множеству Ω_p.

Вторая производная функции $g(s)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} g''(s) = {} & \sum_i p_i a_i (a_i - 1)(\lambda - \alpha)^2 (s\lambda + (1-s)\alpha)^{a_i - 2} (s\mu + (1-s)\beta)^{b_i} \\ & + \sum_i p_i b_i (b_i - 1)(\mu - \beta)^2 (s\lambda + (1-s)\alpha)^{a_i} (s\mu + (1-s)\beta)^{b_i - 2} \\ & + 2\sum_i p_i a_i b_i (\lambda - \alpha)(\beta - \mu)(s\lambda + (1-s)\alpha)^{a_i - 1} (s\mu + (1-s)\beta)^{b_i - 1} \end{aligned}$$

При $a_i b_i \leqslant 0$ и $a + b \geqslant 1$ неотрицательность $g''(s)$ следует из неотрицательной определенности квадратичных форм

$$\omega_i(x, y) = a_i(a_i - 1)x^2 + 2a_i b_i xy + b_i(b_i - 1)y^2,$$

поскольку параметры a_i и b_i целочисленные.

Так как $g''(s) \geqslant 0$, то $g(s) \leqslant \max(g(0), g(1)) \leqslant 1$. Поэтому точка $(s\lambda + (1-s)\alpha), s\mu + (1-s)\beta)$ принадлежит множеству Ω_p.

Замечание 2. Пусть λ_p и λ_q — функции, порождённые (по теореме о неявных функциях) уравнениями системы (3) в некоторой окрестности точки (μ, λ), в которой $\sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \neq 0$ и $\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \neq 0$. Тогда их производные в точке (μ, λ) задаются формулами

$$\lambda'_p = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i}}{\sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i}}, \quad \lambda'_q = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i}}{\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i}}. \tag{4}$$

Приведем достаточный признак существования единственного (кроме (1.1)) строго положительного решения системы (4) для важного частного случая, когда $a_i b_i = 0$ и $|a_i| + |b_i| = 1$.

В этом случае ассоциированная система имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_1\lambda + \dfrac{p_2}{\lambda} + p_3\mu + \dfrac{p_4}{\mu} & = & 1, \\ q_1\lambda + \dfrac{q_2}{\lambda} + q_3\mu + \dfrac{q_4}{\mu} & = & 1. \end{array} \right. \tag{5}$$

Условия (1) принимают вид

$$p_3 < p_4, \quad p_1 + p_3 > p_2 + p_4, \quad q_1 < q_2, \quad q_1 + q_3 > q_2 + q_4.$$

Рассмотрим первое уравнение ассоциированной системы и множество Ω_p, порождаемое этим уравнением.

Если рассматривать две функции $\mu(\lambda)$, порожденные этим уравнением (описывающие границу множества Ω_p), то их минимальное и максимальное значения достигаются в точке $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{p_2}{p_1}}$. Пусть $\mu_-(\lambda_0)$ — минимальное значение функции $\mu(\lambda)$ в точке λ_0.

Лемма 2. *Если выполняются условия* (1) *и* $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} < 1$, *то* $\mu_-(\lambda_0) > \lambda_0$, *т. е. самая левая точка множества* Ω_p *в системе координат* μ, λ *лежит ниже биссектрисы* $\lambda = \mu$.

Доказательство. Если $p_3 \neq 0$, то доказательство утверждения леммы сводится к доказательству неравенства

$$1 - 2\sqrt{p_1 p_2} - 2p_3 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \geqslant \sqrt{(1 - 2\sqrt{p_1 p_2})^2 - 4p_3 p_4}.$$

Сначала покажем, что в указанной области левая часть этого неравенства неотрицательна, т. е. покажем справедливость неравенства

$$1 - 2\sqrt{p_1 p_2} - 2p_3 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \geqslant 0.$$

Так как $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, то, избавившись от p_4, из неравенства $p_3 \leqslant p_4$ получаем $2p_3 \leqslant 1-p_1-p_2$. Найдём минимум функции $f(p_1,p_2,p_3) = 1-2\sqrt{p_1p_2}-2p_3\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$ в области $0 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant 1, 0 \leqslant 2p_3 \leqslant 1-(p_1+p_2)$.

Поскольку эта функция линейна по p_3 и убывает с ростом p_3 и $p_1 > p_2$ согласно (1), имеем

$$f(p_1,p_2,p_3) \geqslant 1-2\sqrt{p_1p_2}-(1-p_1-p_2)\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$$
$$= 1-\sqrt{p_1p_2}-\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+p_2\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = (\sqrt{p_1}-\sqrt{p_2})(1-(\sqrt{p_1}+\sqrt{q_2})) \geqslant 0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $p_3=0$. В этом случае доказательство леммы сводится к проверке справедливости в указанной области очевидного неравенства

$$\frac{1-(p_1+p_2)}{1-2\sqrt{p_1p_2}} > \sqrt{\frac{p_2}{p_1}},$$

которое не представляет затруднений. Лемма 2 доказана.

Теперь можно сформулировать и доказать условия единственности точки пересечения.

Лемма 3. *Пусть, помимо условий* (1), *коэффициенты ассоциированной системы* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}<1, \quad \sqrt{q_3}+\sqrt{q_4}<1.$$

Тогда система имеет, помимо точки $(1,1)$, *еще только одно положительное решение.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что самая левая точка множества Ω_p и самая нижняя точка множества Ω_q (крайние вершины овалов, характеризующих уравнения системы) разделены прямой $\lambda=\mu$. Каждый из овалов определяет две функции $\lambda_p(\mu)$ и $\lambda_q(\mu)$, графики которых проходят через точку (1,1). Выше было показано, что $\lambda_q(\mu)$ выпуклая, а $\lambda_p(\mu)$ вогнутая функции, причем точка, в которой меняется выпуклость функции $\lambda_p(\mu)$, лежит в полуплоскости $\lambda<\mu$, а точка минимума функции $\lambda_q(\mu)$ лежит в полуплоскости $\lambda>\mu$. Но для точек $\mu<1$, которые близки к 1, справедливо неравенство

$$\lambda_p(\mu) > \lambda_p(\mu).$$

Отсюда следует, что существует еще только одна точка их пересечения.

Заметим, что если $p_3 = 0$, то функция $\mu_1(\lambda)$, определяемая из первого уравнения, выпуклая при всех λ, а обратная к ней функция $\lambda_1(\mu)$ (ветвь, проходящая через точку (1,1)) вогнутая. Из второго уравнения определяется выпуклая функция $\lambda_2(\mu)$, и возникает ситуация, аналогичная рассмотренной. Лемма 3 доказана.

Вернёмся к общему случаю. Исследуем некоторые свойства границ множеств Ω_p и Ω_q — кривых λ_p и λ_q, определяемых уравнениями системы (3), в точке их пересечения K (отличной от точки (1,1)).

Предположим, что множества Ω_p и Ω_q ограничены и принадлежат внутренности первого квадранта. Тогда их выпуклость означает, что границу каждого из них можно описать верхней (с верхним индексом t) и нижней (с верхним индексом l) функциями, причем верхние функции вогнутые, а нижние выпуклые. В итоге имеем две пары функций $\lambda_p^t(\mu), \lambda_p^l(\mu)$ и $\lambda_q^t(\mu), \lambda_q^l(\mu)$, причем точка $(1,1)$ лежит на возрастающих частях графиков функций λ_p^t и λ_q^l и (как следует из (2)) $(\lambda_q^l)'(1) > (\lambda_p^t)'(1)$.

Ясно, что эти функции непрерывны по μ, причем часть границы множества Ω_p, соответствующая значениям $\mu < 1$ и лежащая между точками $(1,1)$ и $K = (\mu^*, \lambda^*)$, принадлежит множеству Ω_q. Кроме того (вытекает из формул (4)), производные этих функций меняют знак при переходе от возрастающих частей к убывающим за счет смены знака числителей и при переходе от функции с индексом t к функции с индексом l за счет смены знака знаменателей. При этом в точке (1,1) знаки числителей и знаменателей определяются из (1). Это замечание позволяет оценить знаки числителей и знаменателей производных рассматриваемых функций в точке K.

Рассмотрим различные случаи в зависимости от того, на графиках какой из функций (t или l) и на возрастающей или убывающей частях этих графиков лежит точка K. Поскольку в точке (1,1) функция λ_p вогнутая, а λ_q выпуклая, априори возможны следующие случаи:

Точка K принадлежит возрастающим частям графиков функций λ_q^t, λ_q^l и убывающей части графика функции λ_q^l. Аналогично, точка K принадлежит возрастающим частям графиков функций λ_p^t, λ_p^l и убывающей части графика функции λ_p^l. Однако не все девять случаев возможны. Невозможны случаи, когда точка K принадлежит графику функции λ_p^l и возрастающей части графика функции λ_q^t, поскольку при $\mu < 1$ справедливы неравенства $\lambda_p^l < \lambda_p^t < \lambda_q^t$, а точка (1,1) лежит на возрастающей части графика функции λ_p^t. Кроме того, невозможен случай, когда единственная точка пересечения лежит на убывающей части графика

функции λ_q^l и возрастающей части графика функции λ_p^l, так как отрезок верхней части границы множества Ω_p принадлежит множеству Ω_q, и в своей точке минимума функция λ_p^l больше λ_q^l.

Приведенные выше соображения показывают, что справедлива следующая лемма, в формулировке которой все неравенства выписываются в точке $K = (\mu^*, \lambda^*)$. Для упрощения обозначений символ * у координат точки K опускается.

Лемма 4. *Возможны следующие шесть случаев*:

1. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции λ_q^l и на восходящей ветви графика функции λ_p^t. При этом справедливы неравенства*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0,$$
$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0.$$

2. *Точка K лежит на нисходящей ветви графика функции λ_q^l и на восходящей ветви графика функции λ_p^t. Тогда*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0.$$

3. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции λ_q^l и на нисходящей ветви графика функции λ_p^l. Тогда*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0.$$

4. *Точка K лежит на нисходящей ветви графика функции λ_q^l и на нисходящей ветви графика функции λ_p^l. Тогда*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0.$$

5. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции λ_q^l и на восходящей ветви графика функции λ_p^l. Тогда*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0.$$

6. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции λ_q^t и на восходящей ветви графика функции λ_p^t. Тогда*

$$\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0, \quad \sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \geqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} \leqslant 0.$$

Если границей одного из множеств Ω_p и Ω_q (или обоих одновременно) являются части координатных осей или неограниченные множества, то функции с верхними индесами l и t равны. В этом случае ситуация упрощается и рассматривается подобным же образом.

В заключение заметим, что в приведенных неравенствах точные равенства возможны только тогда, когда в точке K либо числитель, либо знаменатель производной какой-либо функции обращается в 0. Не сильно ограничивая общность, можно считать, что такие случаи не реализуются, т. е. выполняется

Предположение 3. Все неравенства в лемме 4 выполняются как строгие.

3. Оценка вероятности вырождения

В этом разделе всюду считается, что выполняются сформулированные выше предположения 1–3.

Пусть $\varphi(x, y)$ — вероятность вырождения при оптимальной политике, если система находится в точке (x, y). Тогда, как отмечалось выше,

$$\varphi(x, y) = \min \left(\sum_i p_i \varphi(x + a_i, y + b_i), \sum_i q_i \varphi(x + a_i, y + b_i) \right).$$

Эти равенства выполняются для всех точек (x, y) таких, что при любом i точка $(x + a_i, y + b_i)$ лежит в неотрицательном квадранте. Если же для некоторого i либо $x + a_i < 0$, либо $y + b_i < 0$, то $\varphi(x + a_i, y + b_i) = 1$.

Зафиксируем некоторое управление α. Пусть Φ — оператор перехода соответствующего марковского процесса. Покажем, что функция $\varphi(x, y)$ является субрегулярной.

Действительно, $M\varphi(x, y) = \sum\limits_i p_i \varphi(x + a_i, y + b_i)$, если $\alpha(x, y) = 1$, и $M\varphi(x, y) = \sum\limits_i q_i \varphi(x + a_i, y + b_i)$, если $\alpha(x, y) = 0$. Поэтому $\varphi(x, y) \leqslant M\varphi(x, y)$.

Отметим, что функция $1-\varphi(x,y)$ является суперрегулярной и неотрицательной. По теореме о представлении неотрицательной суперрегулярной функции (см. [1], с. 99) функция $1-\varphi(x,y)$ однозначно представима в виде

$$1-\varphi(x,y)=r+Nf,$$

где r — регулярная неотрицательная функция, $f=(I-P)h, Nf$– потенциал некоторой меры, носитель которой сосредоточен в точках (x,y), для которых существует i такое, что либо $x+a_i<0$, либо $y+b_i<0$. Поэтому

$$\varphi(x,y)=1-r-Nf$$

и это представление единственно.

Пусть $\beta(x,y)=\varphi(x,y)(\lambda^*)^{-x}(\mu^*)^{-y}$.

Для каждой точки (x,y) обозначим через $I(x,y)$ совокупность таких индексов i, что точка $(x+a_i,y+b_i)$ не лежит в первом квадранте. Отметим, что это множество конечно. Положим

$$A_p(x,y)=\sum_{i\notin I(x,y)}p_i(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i}\beta(x+a_i,y+b_i)+\sum_{i\in I(x,y)}p_i(\lambda^*)^{-x}(\mu^*)^{-y},$$

$$A_q(x,y)=\sum_{i\notin I(x,y)}q_i(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i}\beta(x+a_i,y+b_i)+\sum_{i\in I(x,y)}q_i(\lambda^*)^{-x}(\mu^*)^{-y}.$$

Тогда

$$\beta(x,y)=\min(A_p(x,y),A_q(x,y)). \tag{6}$$

Замечание 4. Если в формулах, определяющих $A_p(x,y)$ и $A_q(x,y)$, слагаемые, в которых суммирование производится по $i\in I(x,y)$ (не зависящие от β), увеличивать или уменьшать, то решение функционального уравнения (6) также будет соответственно увеличиваться либо уменьшаться.

Полученные уравнения для функции $\beta(x,y)$ приводят к следующим полезным построениям. Рассмотрим новую систему, связанную с исходной: векторы, определяющие переходы, те же самые, а вероятности перехода для новой модели определяются по формулам

$$p_i^*=p_i(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i};\quad q_i^*=q_i\,(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i}.$$

Так как (λ^*,μ^*) является положительным решением системы (3), то наборы (p_i^*) и (q_i^*) $(i=1,2,\cdots,k)$ являются наборами вероятностей.

В новых обозначениях формулы для $A_p(x,y)$ и $A_q(x,y)$ можно записать в виде

$$A_p(x,y) = \sum_{i\notin I(x,y)} p_i^*\beta(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i\in I(x,y)} p_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)},$$

$$A_q(x,y) = \sum_{i\notin I(x,y)} q_i^*\beta(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i\in I(x,y)} q_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}.$$

Отметим, что ассоциированная система для новой модели имеет тоже ровно две пары корней — (1,1) и $(\frac{1}{\lambda^*}, \frac{1}{\mu^*})$, причем каждый элемент из второй пары больше 1.

Пусть $\gamma(x,y)$ — минимальная вероятность вырождения новой системы с наборами вероятностей p_i^* и q_i^*.

Функция γ должна удовлетворять соотношениям

$$\gamma(x,y) = \min\Bigg(\sum_{i\notin I(x,y)} p_i^*\gamma(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i\in I(x,y)} p_i^*, \\ \sum_{i\notin I(x,y)} q_i^*\gamma(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i\in I(x,y)} q_i^*\Bigg).$$

Теорема 1. $\gamma(x,y) = 1$.

Доказательство. Пусть $X^*(t)$ и $Y^*(t)$ — координаты точки на шаге t, определяемые при некоторой фиксированной политике α для пары случайных блужданий P^* и Q^*, и пусть $V(t) = \min(X^*(t), Y^*(t))$.

Пусть $s \in [0,1]$. Рассмотрим случайную величину

$$W(t) = sX^*(t) + (1-s)Y^*(t).$$

Ясно, что для каждого t и для любого $s \in [0,1]$ величина $W(t)$ является мажорантой для $V(t)$, т. е. справедливо неравенство $W(t) \geqslant V(t)$.

Сначала рассмотрим случай, когда положение точки K описывается случаем 1 леммы 4. В этом случае в силу предположения 3 справедливы неравенства (в новых обозначениях)

$$\sum q_i^* a_i < 0, \quad \sum p_i^* a_i > 0, \quad \sum q_i^* b_i > 0, \quad \sum p_i^* b_i < 0.$$

Выберем s таким, чтобы прирост $M(W(t+1) - W(t))$ не зависел от политики α:

$$s = \frac{\sum b_i(q_i^* - p_i^*)}{\sum(a_i - b_i)(p_i^* - q_i^*)}.$$

Легко проверить, что числитель и знаменатель этой дроби положительны и, кроме того, $s < 1$.

При выбранном таким образом параметре s имеем

$$M(W(t+1) - W(t)) = \frac{\sum b_i q_i^* \sum a_i p_i^* - \sum b_i p_i^* \sum a_i q_i^*}{\sum (a_i - b_i)(p_i^* - q_i^*)} = h. \qquad (7)$$

Покажем, что в случае 1 справедливо неравенство

$$(\lambda_q^l)'(\mu^*) < (\lambda_p^t)'(\mu^*).$$

Действительно, разложив функции λ_q^l и λ_p^t по формуле Тейлора в точке μ^*, имеем

$$\lambda_q^l(1) = \lambda_q^l(\mu^*) + (\lambda_q^l)'(\mu^*)(1-\mu^*) + (\lambda_q^l)''(\theta_1)(1-\mu^*)^2,$$
$$\lambda_p^t(1) = \lambda_p^t(\mu^*) + (\lambda_p^t)'(\mu^*)(1-\mu^*) + (\lambda_p^t)''(\theta_2)(1-\mu^*)^2,$$

где θ_1 и θ_2 лежат внутри промежутка $(\mu^*, 1)$.

Требуемое неравенство между производными получается, если из первого равенства вычесть второе, так как справедливы неравенства

$$(\lambda_q^l)''(\theta_1) > 0,\ (\lambda_p^t)''(\theta_2) < 0,\ \lambda_q^l(1) = \lambda_p^t(1),\ \lambda_q^l(\mu^*) = \lambda_p^t(\mu^*),\ \mu^* < 1.$$

Из формул (4) для производных функций λ_q и λ_p вытекает, что числитель дроби в (7) отрицателен. Поэтому $h < 0$.

Теперь воспользуемся усиленным законом больших чисел (теоремой Колмогорова) (см. [5], с. 379).

Пусть $\{R_t\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием h, и пусть $S(t) = \sum\limits_{j=0}^{t} R_j$. Тогда $\dfrac{S_t}{t} \to h$ почти всюду.

Положим $MR_t = M(W(t) - W(t-1))$. Тогда $MR_t = h, S_t = W(t)$ и по усиленному закону больших чисел $W(t) \to -\infty$ почти всюду.

В остальных случаях леммы 4 выбранный параметр s может не принадлежать промежутку $(0, 1)$.

Однако в случаях 3–5 в качестве мажоранты можно выбрать $X(t)$ $(s = 1)$. При этом $W(t) = X(t)$ и $MR_t = M(W(t) - W(t-1)) < 0$, поскольку в этих случаях в точке K справедливы неравенства $\sum p_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} < 0$ и $\sum q_i a_i \lambda^{a_i} \mu^{b_i} < 0$.

Аналогично, в случаях 2, 4 и 6 $W(t) = Y(t)$ (s = 0) и $MR_t = M(W(t) - W(t-1)) < 0$, так как в точке K справедливы неравенства

$\sum p_i b_i \lambda^{a_i}\mu^{b_i} < 0$ и $\sum q_i b_i \lambda^{a_i}\mu^{b_i} < 0$. Применение усиленного закона больших чисел приводит к тем же результатам. Теорема 1 доказана.

Теперь заметим, что если для любого $i \in I(x,y)$ справедливо неравенство

$$(\lambda^*)^{x+a_i}(\mu^*)^{y+b_i} > 1,$$

то $\beta(x,y) \geqslant \gamma(x,y)$.

Для получения нижней оценки для функции $\beta(x,y)$ положим

$$s_p = \min_{x,y} \frac{\sum\limits_{i\in I(x,y)} p_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}}{\sum\limits_{i\in I(x,y)} p_i^*},$$

$$s_q = \min_{x,y} \frac{\sum\limits_{i\in I(x,y)} q_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}}{\sum\limits_{i\in I(x,y)} q_i^*},$$

$$s = \min(s_p, s_q).$$

В этих формулах минимум выбирается по всем (x,y) таким, что $I(x,y) \neq \varnothing$.

Лемма 5. $\beta(x,y) \geqslant s$.

Доказательство. Рассмотрим систему, для которой $\delta(x,y) = s$ является решением:

$$\delta(x,y) = \min\Bigg(\sum_{i\in I(x,y)} p_i(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i}\delta(x+a_i, y+b_i) + s_1,$$
$$\sum_{i\in I(x,y)} q_i(\lambda^*)^{a_i}(\mu^*)^{b_i}\delta(x+a_i, y+b_i) + s_2\Bigg),$$

где $s_1 = s(1 - \sum\limits_{i\notin I(x,y)} p_i^*)$, $s_2 = s(1 - \sum\limits_{i\notin I(x,y)} q_i^*)$.

Очевидно, что

$$s_1 \leqslant \sum_{i\notin I(x,y)} p_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}, \quad s_2 \leqslant \sum_{i\notin I(x,y)} q_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}.$$

Поэтому $s \leqslant \beta(x,y)$. Отсюда следует нижняя оценка для вероятности вырождения $\varphi(x,y)$:

$$s(\lambda^*)^x(\mu^*)^y \leqslant \varphi(x,y).$$

Верхнюю оценку точно таким же образом получить не удается. Трудности возникают, поскольку на множестве $I(x,y)$ функция

$$g = \sum_{i \in I(x,y)} p_i^* (\lambda^*)^{-(x+a_i)} (\mu^*)^{-(y+b_i)}$$

может быть неограниченной сверху; например, даже при отрицательном $x + a_i$ величина $y + b_i$ может быть сколь угодно большой. Тогда $(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}$ нельзя ограничить универсальной константой, поскольку $\mu^* < 1$.

Для получения верхней оценки воспользуемся результатами из [3] и [6].

В [6] было введено так называемое «пожарное» управление ("putting out fires"), заключающееся в следующем: весь имеющийся ресурс направляется на развитие того производства, которое увеличивает количество наименьшего в данный момент продукта. Формально это управление можно описать так. В каждой точке (x, y) управление α выбирается следующим образом:

$$\alpha(x,y) = 1 \;\; x \leqslant y; \quad \alpha(x,y) = 0 \;\; x > y.$$

Понятие «пожарного» управления можно естественным образом обобщить. Пусть $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ — произвольный вектор со строго положительными компонентами. Управление α будем называть *«$\mathbf{c}$-пожарным»,* если

$$\alpha(x,y) = 1 \text{ при } \frac{x}{c_1} \leqslant \frac{y}{c_2}; \quad \alpha(x,y) = 0 \text{ при } \frac{x}{c_1} > \frac{y}{c_2}.$$

Таким образом возникает класс достаточно простых управлений, в котором естественно искать такой вектор c, при котором вероятность вырождения $\psi(x,y)$ минимальна. Пусть выполняется следующее

Предположение 4. Если $b_i > 0$, то $p_i = 0$; если $a_i > 0$, то $q_i = 0$

В [3] показано, что при $\mathbf{c}$-пожарном управлении вероятность вырождения $\psi(x,y)$ при выполнении предположения 4 обладает следующим свойством:

$$\psi(x,y) = O((\lambda^*)^x (\mu^*)^y) \text{ при } (x,y) \to (\infty, \infty).$$

Так как класс $\mathbf{c}$-пожарных управлений у́же, чем класс всех управлений, то $\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y)$. Значит, существует такая константа d, что $\varphi(x,y) \leqslant d(\lambda^*)^x(\mu^*)^y$ для достаточно больших x, y. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Существуют такие константы s и t, что*

$$s(\lambda^*)^x(\mu^*)^y\varphi(x,y) \leqslant t(\lambda^*)^x(\mu^*)^y.$$

при достаточно больших x и y.

В заключение рассмотрим один частный случай, изучавшийся в [2].

Пусть при блуждании, порождённом набором вероятностей $\{p_i\}$, отличны от нуля только такие p_i, при которых $a_i \geqslant 0$, $-1 \leqslant b_i \leqslant 0$, т. е. первая координата не убывает, а вторая координата не возрастает и может уменьшиться не более чем на 1. Тогда можно ограничиться рассмотрением только векторов перехода $(i,0)$ и $(i,-1)$ с вероятностями p_{i1} и p_{i2} соответственно, $\sum\limits_{i=0}^{k}(p_{i1}+p_{i2})=1$.

Аналогично, при блуждании, порождённом набором вероятностей $\{q_i\}$, будем рассматривать только векторы $(0,i)$ и $(-1,i)$ с вероятностями q_{i1} и q_{i2} соответственно, $\sum\limits_{i=0}^{k}(q_{i1}+q_{i2})=1$.

Дополнительно будем предполагать, что $p_{01}^2+p_{02}^2\neq 0$ и $q_{01}^2+q_{02}^2\neq 0$.

В этом случае ассоциированная система имеет вид

$$\sum_{i=0}^{k}p_{i1}\lambda^i+\frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{k}p_{i2}\lambda^i=1,\quad \sum_{i=0}^{k}q_{i1}\mu^i+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{k}q_{i2}\mu^i=1,$$

а условия (1) записываются следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{k}p_{i2}>0;\quad \sum_{i=1}^{k}i(p_{i1}+p_{i2})>p_{02};\quad \sum_{i=0}^{k}q_{i2}>0;\quad \sum_{i=1}^{k}i(q_{i1}+q_{i2})>q_{02}.$$

Из уравнений ассоциированной системы получаем функции

$$\lambda=\frac{\sum q_{i2}\mu^i}{1-\sum q_{i1}\mu^i},\quad \mu=\frac{\sum p_{i2}\lambda^i}{1-\sum p_{i1}\lambda^i},$$

которые, как легко проверить, являются возрастающими и выпуклыми. Тогда функция $\mu^{-1}(\mu)$, обратная к функции μ, является возрастающей и вогнутой. Нетрудно видеть, что графики функций λ и μ^{-1} пересекаются только в двух точках — в точке (1,1) и в такой точке (μ^*,λ^*), что $0<\mu^*<1$ и $0<\lambda^*<1$.

Для минимальной вероятности вырождения $\varphi(x,y)$ имеем

$$\varphi(x,y) = \min\Bigg(\sum_i p_{i1}\varphi(x+i,y) + \sum_i p_{i2}\varphi(x+i,y-1),\\ \sum_i q_{i1}\varphi(x,y+i) + \sum_i q_{i2}\varphi(x-1,y+i)\Bigg),$$
$$\varphi(-1,y+i) = 1, \quad \varphi(x+i,-1) = 1 \text{ при всех } i.$$

Легко проверить, что

$$\varphi(x,y) = \rho(\mu^*)^y(\lambda^*)^x \text{ при всех } x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$

где

$$\rho = \varphi(0,0) = \min\left(\frac{\sum p_{i2}}{1-\sum p_{i1}(\lambda^*)^i}, \frac{\sum q_{i2}}{1-\sum q_{i1}(\mu^*)^i}\right).$$

Заметим, что $\rho < 1$, поскольку $\lambda^* < 1$ и $\mu^* < 1$, а $\sum p_{i2} = 1 - \sum p_{i1}$ и $\sum q_{i2} = 1 - \sum q_{i1}$.

Следует отметить, что в этом случае существует оптимальное управление, которое определяется следующими соотношениями:

$\alpha(0,0) = 1$, если $\rho = \dfrac{\sum p_{i2}}{1-\sum p_{i1}(\lambda^*)^i}$;

$\alpha(0,0) = 0$, если $\rho = \dfrac{\sum q_{i2}}{1-\sum q_{i1}(\mu^*)^i}$;

$\alpha(0,y) = 1$, если $y > 0$;

$\alpha(x,0) = 1$, если $x > 0$;

$\alpha(x,y)$ произвольное при $x > 0\, y > 0$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. А. Могульскому за конструктивную критику, позволившую устранить неточности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.** Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987.
2. **Рапопорт Э. О.** Об одной стохастической модели распределения неделимого ресурса // Труды Сибирской конференции по прикладной и индустриальной математике. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1997. С. 197–206.
3. **Рапопорт Э. О.** Магистральные стратегии при распределении неделимого ресурса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 1. С. 33–45.
4. **Спицер Ф.** Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.

5. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980.

6. **Majumdar M., Radner R.** Stationary optimal policies with discounting in a stochastic activity analysis model // Econometrica. 1983. V. 51, N 6. P. 1821–1837.

7. **Majumdar M., Zilcha I.** Optimal growth in a stochastic environment: some sensitivity and turnpike results // J. Economic Theory. 1987. V. 43, N 1. P. 116–133.

8. **Radner R.** A behavioral model of cost reduction //Bell J. Economics. 1975. V. 6, N 1. P. 196–215.

9. **Radner R., Rothschild M.** On the allocation of effort // J. Economic Theory. 1975. V. 10, N 3. P. 358–376.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E–mail: rapoport@math.nsc.ru

Статья поступила
18 марта 2005 г.