ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2005. Серия 2. Том 12, № 1, 74–96

УДК 519.865.3

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОПЕРИОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ИНВЕСТИРОВАНИЕМ*)

А. В. Сидоров

Исследуется модель экономики с производством типа Эрроу–Дебре, в которой дополнительно допускается возможность потребительского инвестирования в производственный сектор, а также осуществление кредитных операций между потребителями на основе безарбитражной процентной ставки. Основным результатом является доказательство теоремы существования равновесия в однопериодной модели.

Введение

Основой для изучаемой в настоящей статье экономики служит классическая модель Эрроу–Дебре

$$\mathcal{E} = \langle N,\ M,\ \{X_i,\ \succcurlyeq_i,\ \boldsymbol{\omega}^i\}_{i\in N},\ \{Y_j\}_{j\in M},\ \{\theta_{ij}\}_{i\in N, j\in M}\rangle, \tag{1}$$

где N — множество потребителей, X_i — потребительские множества с заданными на них отношениями предпочтения $\succcurlyeq_i$, $\boldsymbol{\omega}^i$ — индивидуальные начальные запасы потребителей, M — множество фирм, Y_j — технологические множества, а величины θ_{ij} обозначают долю потребителя $i \in N$ в доходе фирмы $j \in M$ (см. [5, § 16.1]). При этом параметры θ_{ij} в этой модели заданы экзогенно, т. е. определены в некоторой «предыстории» и уже не могут быть изменены самим владельцем этих активов.

В настоящей статье предпринята попытка модификации модели Эрроу–Дебре таким образом, чтобы механизм формирования инвестиционных портфелей соответствовал принципам рационального поведения инвесторов при максимально возможном сохранении всех остальных характеристик и черт исходной модели. В отличие от статической модели Эрроу–Дебре процессы производства и потребления предполагаются развёртывающимися во времени, в простейшем случае — на временно́м

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке фонда РГНФ (проект 05–02–02005а) и гранта по президентской программе поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–80.2003.6).

интервале $[0, 1]$, причем цены в начале и конце периода, вообще говоря, различны. При этом начало производственного процесса и производственные издержки, относятся к началу периода, а получение конечной продукции и прибыли от её реализации — к концу периода. Как и в классической модели, целью производителя является максимизация величины чистой прибыли. Что касается задачи потребителя, то как обычно она заключается в максимизации полезности потребительского плана на бюджетном множестве, которое в изучаемой модели имеет более сложную структуру, поскольку следует учитывать бюджетные ограничения как в начале, так и в конце периода. Кроме того, в число решений, принимаемых потребителем, входит сумма, инвестируемая в производство в начале периода с целью получения прибыли в конце временно́го интервала в соответствии с безарбитражной процентной ставкой. Основной целью настоящей статьи является доказательство теоремы существования равновесия в этой модели.

1. Модель экономики с инвестированием

1.1. Производственный сектор

Пусть $L = \{1, \ldots, l\}$ — ассортимент всех имеющихся в экономике товаров. Один и тот же товар k в начале и в конце временно́го интервала $[0, 1]$ может иметь различную цену p_k^0 и p_k^1 и поэтому должен рассматриваться как два различных товара, т. е. размерность пространства товаров и размерность сопряженного к нему пространства цен будет равна $2l$. Как было отмечено во введении, производственный процесс совершается не мгновенно, а в течение временно́го интервала $[0, 1]$, причем производственные издержки относятся к началу интервала, а получение и реализация конечной продукции — к его концу. В связи с этим технологическое множество Y рассматривается как подмножество в $(-\mathbb{R}^L_+) \times \mathbb{R}^L_+$, где $\mathbb{R}^L_+ = \big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L | \, \mathbf{y} \geqslant 0\big\}$ и каждый элемент технологического множества Y может быть представлен в виде $\mathbf{y} = (-\mathbf{y}^-, \mathbf{y}^+)$, где $\mathbf{y}^\pm \geqslant 0$. В этом случае $\mathbf{y}^-$ — вектор затрат, указывающий на ассортимент и количество затрачиваемых факторов производства, а $\mathbf{y}^+$ — вектор выпуска, указывающий на ассортимент и количество конечной продукции. Здесь и далее для векторных неравенств будут использоваться следующие обозначения: $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{z}$ означает, что $y_k \geqslant z_k$ для всех k, $\mathbf{y} \gg \mathbf{z}$ означает, что $y_k > z_k$ для всех k, наконец $\mathbf{y} > \mathbf{z}$ означает, что $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{z}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$. Кроме того, для множества всех строго положительных по всем компонентам векторов будет использоваться обозначение $\mathbb{R}^L_{++} = \big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L | \, \mathbf{y} \gg 0\big\}$. Прежде чем сформулировать предположения, налагаемые на технологические множества, введем некоторые обозначения и понятия.

Определение 1. *Границей эффективности* технологического множества Y называется множество

$$\mathrm{Eff}\,(Y) = \{\bar{\mathbf{y}} \in Y \,|\, \mathbf{y} > \bar{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{y} \notin Y\}\,.$$

Определение 2. Пусть $\mathbf{y} \in Y$ — некоторая допустимая ненулевая технология такая, что луч $\Lambda(\mathbf{y}) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{y} \subset Y$. В этом случае будем говорить, что технология $\mathbf{y}$ *имеет постоянную отдачу от масштаба.*

С содержательной точки зрения это означает, что при любом $\lambda \geqslant 0$ пропорциональное увеличение затрат в λ раз приведет к увеличению выпуска, как минимум, в той же пропорции.

Пусть теперь $\mathbf{p} = \left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ — некоторый строго положительный по всем компонентам вектор, в дальнейшем интерпретируемый как совокупный вектор цен, характеризующий начальные цены $\mathbf{p}^0$ и конечные цены $\mathbf{p}^1$. Тогда для любой допустимой технологии $\mathbf{y} \in Y$ скалярное произведение $\Pi\,(\mathbf{p}, \mathbf{y}) := \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^+ - \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^-$ выражает чистую прибыль (разность выручки и издержек) от использования технологии $\mathbf{y}$ за период [0, 1].

Определение 3. Технология $\mathbf{y} \in Y$ называется $\mathbf{p}$-*рентабельной*, если $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, и $\mathbf{p}$-*оптимальной*, если $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \geqslant \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ для любого $\mathbf{z} \in Y$.

Теперь сформулируем основные предположения, налагаемые ниже на технологические множества. Предполагается, что для каждого из условий считаются выполненными все предыдущие. Это особенно важно для правильной интерпретации двух последних условий.

Y1. Множество Y выпукло и замкнуто.

Y2. Множество Y удовлетворяет *условию свободного расходования* в $(-\mathbb{R}^L_+) \times \mathbb{R}^L_+$, т. е. если $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y}' \in (-\mathbb{R}^L_+) \times \mathbb{R}^L_+$ таковы, что $\mathbf{y}' \leqslant \mathbf{y}$, то $\mathbf{y}' \in Y$.

Y3. Множество Y удовлетворяет *условию отсутствия рога изобилия*: $0 \in \mathrm{Eff}(Y)$.

Y4. Множество Y удовлетворяет *условию убывания отдачи от масштаба*: если $\mathbf{y} \in Y$ — такая технология, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при любом $\lambda \geqslant 1$, то $\mathbf{y}^+ = 0$.

Y5. Множество Y *строго выпукло*: для любых $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathrm{Eff}(Y)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$, и $\lambda \in (0, 1)$ справедливо соотношение $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{y}' \notin \mathrm{Eff}(Y)$.

Поясним сформулированные выше предположения. Благодаря условию **Y1** задача отыскания производителем $\mathbf{p}$-оптимальных технологий превращается в задачу выпуклой оптимизации: найти $\max\limits_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}$. Условие свободного расходования **Y2** является традиционным для моделей с производством, заданным в терминах потоков, и означает, что вместе с каждой допустимой технологией $\mathbf{y}\in Y$ реализуемы все менее эффективные технологии. Из условия **Y3** следует два важных вывода. Во-первых, для любого $\mathbf{p}$ существует по меньшей мере одна $\mathbf{p}$-рентабельная технология — нулевая и, значит, любая $\mathbf{p}$-оптимальная технология является $\mathbf{p}$-рентабельной. Во-вторых, не существует допустимых технологий, позволяющих производить ненулевой объем конечной продукции, не затрачивая сырья. Наконец, из условий **Y1** и **Y3** вытекает, что наряду с допустимой технологией $\mathbf{y}\in Y$ допустимыми являются также все технологии вида $\lambda\mathbf{y}$ при $\lambda\in[0,1]$, поскольку их можно представить в виде выпуклой комбинации $\lambda\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)0$. Условие **Y4** означает, что не существует нетривиальных технологий с постоянной отдачей от масштаба; при этом следует отметить, что в силу условия свободного расходования **Y2** любая технология вида $(-\mathbf{y}^-,0)$ имеет постоянную, а именно нулевую, отдачу от масштаба. Кроме того, предположив существование технологии $\mathbf{y}$ с возрастающей отдачей от масштаба, т. е. наличие траектории $(-\lambda\mathbf{y}^-,\mathbf{y}^+(\lambda))\subset Y$ такой, что $\mathbf{y}^+(\lambda)\geqslant\lambda\mathbf{y}^+>0$ при любом $\lambda\geqslant 1$, в силу условий **Y1**—**Y3** получим, что луч $(-\lambda\mathbf{y}^-,\lambda\mathbf{y}^+)$ целиком содержится в Y, и снова придем к противоречию с условием **Y4**. Условие строгой выпуклости, вообще говоря, заранее предполагает выпуклость множества Y и само по себе гарантирует отсутствие линейных участков на границе эффективности, что является, как будет отмечено ниже, условием однозначной разрешимости задачи производителя.

Лемма 1. *Пусть K — произвольный компакт из $\mathbb{R}^L_{++}\times\mathbb{R}^L_{++}$ и выполнены условия* **Y1**—**Y4**. *Тогда объединение множеств* $\mathbf{p}$*-рентабельных технологий по всем $\mathbf{p}\in K$ ограничено. В частности, если $K=\{\mathbf{p}\}$, то множество всех* $\mathbf{p}$*-рентабельных технологий является непустым выпуклым компактным множеством.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность технологий $\mathbf{y}_n\in Y$ такая, что

1) последовательность $\lambda_n=||\mathbf{y}_n||$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$;

2) $\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{y}_n\geqslant 0$ для некоторого $\mathbf{p}_n\in K$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p} \in K$.

Последнее условие можно считать выполненным в силу компактности множества K. Рассмотрим последовательность $\mathbf{z}_n = \dfrac{\mathbf{y}_n}{\lambda_n}$ элементов сферы единичного радиуса. Без ограничения общности можно считать, что в силу условия **Y1** существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{z} \in Y$. Тогда $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{z}_n \geqslant 0$. Следовательно, $\mathbf{z}^+ \neq 0$, так как в противном случае выполнялось бы неравенство $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} < 0$. Покажем, что $\mathbf{z}$ — технология с постоянной отдачей от масштаба. Пусть $\lambda > 0$ — произвольное число. Рассмотрим такие члены последовательности $\mathbf{y}_n$, что $\lambda_n = ||\mathbf{y}_n|| \geqslant \lambda$. Тогда $\lambda \mathbf{z}_n = \lambda \dfrac{\mathbf{y}_n}{\lambda_n} = \dfrac{\lambda}{\lambda_n}\mathbf{y}_n + \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right) \cdot 0 \in Y$ в силу условий **Y1** и **Y3**. С другой стороны, $\lambda \mathbf{z}_n \to \lambda \mathbf{z} \in Y$ в силу замкнутости множества Y. Пусть теперь $K = \{\mathbf{p}\}$. Тогда множество $\mathbf{p}$-рентабельных технологий ограничено в силу доказанного выше. Кроме того, по определению это множество является пересечением замкнутого выпуклого множества Y и полупространства $\left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2L} \,|\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \geqslant 0\right\}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* **Y1**—**Y4**. *Тогда для любого* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *множество* $\mathbf{p}$*-оптимальных технологий* $S(\mathbf{p})$ *является непустым выпуклым компактным подмножеством границы эффективности* $\mathrm{Eff}(Y)$, *точечно-множественное соответствие* $S : \mathbf{p} \mapsto S(\mathbf{p})$ *имеет замкнутый график во всей области определения и образ* $S(K)$ *для любого компактного подмножества* $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *является ограниченным множеством. Если дополнительно выполнено условие* **Y5**, *то* $S(\mathbf{p}) = \{\mathbf{y}(\mathbf{p})\}$ *— одноэлементное множество и функция* $\mathbf{y} : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to Y$ *является непрерывной.*

Доказательство. В силу замечания к предположению **Y3** все $\mathbf{p}$-оптимальные технологии принадлежат множеству $\mathbf{p}$-рентабельных технологий, которое в силу леммы 1 является непустым выпуклым компактом. С учетом того, что целевая функция $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$ линейна, легко вытекает непустота, выпуклость и компактность множества $S(\mathbf{p})$. Ограниченность образа $S(\mathbf{p})$ следует из предыдущей леммы.

Теперь покажем, что $S(\mathbf{p}) \subseteq \mathrm{Eff}(Y)$. Пусть это не так и $\mathbf{y} \in S(\mathbf{p})$ не принадлежит $\mathrm{Eff}(Y)$, т. е. найдется технология $\mathbf{y}' \in Y$ такая, что $\mathbf{y}' > \mathbf{y}$. Тогда в силу строгой положительности по всем компонентам вектора $\mathbf{p}$ получим $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}' > \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$, что противоречит $\mathbf{p}$-оптимальности технологии $\mathbf{y}$.

Докажем замкнутость графика соответствия S. Пусть $\mathbf{p}_n \to \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$, $\mathbf{y}_n \in S(\mathbf{p}_n)$ и $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$. Покажем, что отсюда следует включение $\mathbf{y} \in S(\mathbf{p})$. Заметим, что во всяком случае $\mathbf{y} \in Y$ в силу **Y1**. Кроме того, пусть

$\mathbf{z}$ — произвольный элемент из Y. Тогда по определению $\mathbf{y}_n$ выполнены неравенства $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{y}_n \geqslant \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{z}$ для всех n. Переходя к пределу, получим $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \geqslant \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}$, что в силу произвольности выбора $\mathbf{z} \in Y$ означает, что $\mathbf{y} \in S(\mathbf{p})$. Предположим, что выполнено условие **Y5**. Если бы нашлись два различных элемента $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in S(\mathbf{p}) \subset \mathrm{Eff}(Y)$, то $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{y} + \mathbf{y}'}{2} \in S(\mathbf{p})$, поскольку $\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}'}{2} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \max\limits_{\mathbf{u} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$. С другой стороны, $\mathbf{z} \notin \mathrm{Eff}(Y)$ в силу **Y5**, что противоречит доказанному выше включению $S(\mathbf{p}) \subseteq \mathrm{Eff}(Y)$. Наконец, непрерывность функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является тривиальным следствием замкнутости ее графика и ограниченности образа $\mathbf{y}(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ (см. [1, лемма 1.3.7]). Лемма 2 доказана.

Пусть фирмы образуют конечное множество $M = \{1, \ldots, m\}$ и производственные возможности каждой фирмы $j \in M$ характеризуются технологическим множеством Y_j, удовлетворяющим условиям **Y1—Y5**. Тогда в силу леммы 1 определены непрерывные функции $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$, характеризующие оптимальный производственный план фирмы $j \in M$. Определим функцию совокупного производственного предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{j \in M} \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. Тогда функции

$$\mathbf{y}^-(\mathbf{p}) = \sum_{j \in M} \mathbf{y}_j^-(\mathbf{p}),\ \mathbf{y}^+(\mathbf{p}) = \sum_{j \in M} \mathbf{y}_j^+(\mathbf{p})$$

характеризуют совокупные затраты и совокупный выпуск соответственно.

Заметим, что в силу условия **Y3** равенство $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}^-(\mathbf{p}) = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению равенства $\mathbf{y}_j^-(\mathbf{p}) = 0$ для всех $j \in M$. Используя это обстоятельство, введем функцию

$$r(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^-(\mathbf{p})} & \text{при } \mathbf{y}(\mathbf{p}) \neq 0, \\ 0 & \text{при } \mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

которую можно интерпретировать как общую доходность производственного сектора, т. е. величину совокупной чистой прибыли, отнесенной к совокупным затратам. Заметим также, что функцию $r(\mathbf{p})$ можно рассматривать как среднюю доходность:

$$r(\mathbf{p}) = \sum_{j \in M} \lambda_j(\mathbf{p})\, r_j(\mathbf{p})$$

полученную усреднением доходностей отдельных фирм

$$r_j(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{y}_j^-(\mathbf{p})}, & \text{если } \mathbf{y}_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{y}_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$

с весами

$$\lambda_j(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{y}_j^-(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{y}^-(\mathbf{p})}, & \text{если } \mathbf{y}(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \dfrac{1}{m}, & \text{если } \mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

характеризующими относительную производственную активность каждой фирмы.

Лемма 3. *Функция $r(\mathbf{p})$ непрерывна всюду в $\mathbb{R}^{2L}_{++}$.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ функция $\mathbf{r}(\mathbf{p})$ непрерывна во всех точках $\mathbf{p}$ таких, что $\mathbf{y}(\mathbf{p}) \neq 0$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение: если $\mathbf{p}_n \to \mathbf{p}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(\mathbf{p}_n) \neq 0$ и $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0$, то $r(\mathbf{p}_n) \to 0$.

Рассмотрим множество $Y = \sum\limits_{j\in M} Y_j$. В силу условий, налагаемых на Y_j, множество Y выпукло, замкнуто и $0 \in Y$. Заметим, что гиперплоскость $H_{\mathbf{p}} = \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{2L} \mid \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} = 0\right\}$ является опорной к Y в точке 0, причем $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \leqslant 0$ для любого $\mathbf{y}\in Y$. В самом деле, если имеется $\mathbf{y} = \sum\limits_{j\in M}\mathbf{y}_j \in Y$ такой, что $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} > 0$, то $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j > 0$ для некоторого $j \in M$. Следовательно, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j(\mathbf{p}) > 0$ и как следствие $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{p}) > 0$, что противоречит предположению $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0$. Поэтому при любом n вектор $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(\mathbf{p}_n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_n \leqslant 0$. Следовательно, найдется число $\varepsilon_n \geqslant 0$ такое, что $\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n + \varepsilon_n\mathbf{p}_n \in H$. Заметим, что $\mathbf{z}_n^+ = \mathbf{y}_n^+ + \varepsilon_n\mathbf{p}_n^1 \geqslant \mathbf{y}_n^+$ и $\mathbf{z}_n^- = \mathbf{y}_n^- - \varepsilon_n\mathbf{p}_n^0 \leqslant \mathbf{y}_n^-$. Рассмотрим последовательность $\rho_n = \dfrac{\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{z}_n}{\mathbf{p}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-}$. Из определения $\mathbf{z}_n$ следует, что

$$\rho_n = \frac{\mathbf{p}_n^1\mathbf{z}_n^+ - \mathbf{p}_n^0\mathbf{z}_n^-}{\mathbf{p}_n^0\mathbf{z}_n^-} = \frac{\mathbf{p}_n\mathbf{y}_n + \varepsilon_n||\mathbf{p}_n||^2}{\mathbf{p}_n^0\mathbf{z}_n^-} \geqslant \frac{\mathbf{p}_n\mathbf{y}_n}{\mathbf{p}_n^0\mathbf{y}_n^-} = r(\mathbf{p}_n) \geqslant 0.$$

Ясно, что при $n \to +\infty$ имеет место сходимость последовательностей $\mathbf{z}_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$, поскольку $\mathbf{y}_n \to 0 \in H_{\mathbf{p}}$. Теперь для доказательства леммы остается показать, что $\rho_n \to 0$.

Положим $\mathbf{q}_n = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}$. Тогда $\mathbf{q}_n \to 0$. По построению $\mathbf{z}_n \in H$. Поэтому

для любого n имеем $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}_n \equiv 0$, т. е. $\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{z}_n^+ \equiv \mathbf{p}^0\cdot\mathbf{z}_n^-$. Следовательно,

$$\rho_n = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{q}_n)\cdot\mathbf{z}_n}{(\mathbf{p}^0+\mathbf{q}_n^0)\cdot\mathbf{z}_n^-} = \frac{\mathbf{q}_n^1\cdot\mathbf{z}_n^+ - \mathbf{q}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{z}_n^- + \mathbf{q}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-} \leqslant \frac{\mathbf{q}_n^1\cdot\mathbf{z}_n^+ - \mathbf{q}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{z}_n^-} = \frac{\mathbf{q}_n^1\cdot\mathbf{z}_n^+}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{z}_n^+} - \frac{\mathbf{q}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{z}_n^-}.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю. Действительно,

$$\frac{\mathbf{q}_n^1\cdot\mathbf{z}_n^+}{\mathbf{p}^1\cdot\mathbf{z}_n^+} = \frac{\mathbf{q}_n^1\cdot\dfrac{\mathbf{z}_n^+}{||\mathbf{z}_n^+||}}{\mathbf{p}^1\cdot\dfrac{\mathbf{z}_n^+}{||\mathbf{z}_n^+||}} \to 0,$$

поскольку последовательность $\dfrac{\mathbf{z}_n^+}{||\mathbf{z}_n^+||}$ ограничена, $\mathbf{q}_n^1 \to 0$ и $\mathbf{p}^1 \gg 0$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{\mathbf{q}_n^0\cdot\mathbf{z}_n^-}{\mathbf{p}^0\cdot\mathbf{z}_n^-} \to 0$. Лемма 3 доказана.

1.2. Потребительский сектор

В потребительском секторе экономики действуют экономические агенты, образующие конечное множество $N=\{1,\ldots,n\}$, и каждый участник $i\in N$ характеризуется вектором начального запаса $\boldsymbol{\omega}^i = \left(\boldsymbol{\omega}^{i,0},\boldsymbol{\omega}^{i,1}\right) \in \mathbb{R}_+^{2L}$, где $\boldsymbol{\omega}^{i,0}$ и $\boldsymbol{\omega}^{i,1}$ обозначают начальный запас участника i в начале и в конце временно́го интервала $[0,1]$. Допустимые потребительские наборы образуют множество $\mathbb{R}_+^{2L}$, на котором заданы индивидуальные отношения предпочтения $\succcurlyeq_i$; при этом отношение $\mathbf{x}\succcurlyeq_i\mathbf{y}$ трактуется как «для потребителя $i\in N$ набор $\mathbf{x}$ не хуже набора $\mathbf{y}$», что допускает отношение безразличия. Тот факт, что «$\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$», будет обозначаться как $\mathbf{x}\succ_i\mathbf{y}$. Подобно процессу производства процесс потребления распределен во времени. Однако имеется существенное отличие: для производителя вектор затрат $\mathbf{y}^-$ и вектор конечной продукции $\mathbf{y}^+$ связаны в единый технологический процесс, в то время как потребитель формирует два независимых плана потребления $\mathbf{x}^{i,0}$ и $\mathbf{x}^{i,1}\in\mathbb{R}_+^L$ для начального и конечного момента времени.

Перейдем к описанию бюджетных ограничений при заданных ценах $\mathbf{p}\in\mathbb{R}_{++}^{2L}$. В классической модели Эрроу–Дебре (1) доход потребителя i складывался из стоимости начального запаса $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}^i$ и дополнительного дохода от участия в разделе прибылей фирм $j\in M$, а доли участия характеризовались экзогенно заданными величинами θ_{ij}. В отличие

от этого в изучаемой модели каждый потребитель в начальный момент времени может капитализировать некоторую часть d_i своего дохода от реализации начального запаса $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0}$, либо инвестировать его в производственный сектор, либо ссудить его другим экономическим агентам. Допустимыми являются также и отрицательные значения d_i; этот случай интерпретируется как заем в размере $|d_i|$. По истечении временно́го периода $[0,1]$ на инвестированные суммы (суммы займа) происходит начисление процентов в соответствии с процентной ставкой r, единой для всех типов финансовых операций. Вопрос о том, как определяется процентная ставка r, будет рассмотрен ниже. В данный момент ставка r и цены $\mathbf{p}$ рассматриваются потребителем как экзогенные параметры. Тем самым величины дохода, направляемые на потребление в начальный и конечный момент времени, равны $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0} - d_i$ и $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,1} + (1+r) \cdot d_i$ соответственно. Отсюда вытекает, что интервал допустимых значений для d_i равен $\left[-\dfrac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,1}}{1+r}, \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0}\right]$, а бюджетное множество потребителя i при ценах $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ и процентной ставке r равно

$$B_i(\mathbf{p}, r) = \Big\{\mathbf{x}^i = \big(\mathbf{x}^{i,0}, \mathbf{x}^{i,1}\big) \in \mathbb{R}^{2L}_{+} \,\Big|\, \exists d_i \in \mathbb{R} : \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^{i,0} \leqslant \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0} - d_i, \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^{i,1} \leqslant \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,1} + (1+r) \cdot d_i \Big\}.$$

В этом бюджетном множестве потребитель осуществляет выбор максимальных элементов относительно предпочтения $\succcurlyeq_i$, формируя множество спроса

$$D_i(\mathbf{p}, r) = \big\{\mathbf{x}^i \in B_i(\mathbf{p}, r) \,|\, \mathbf{x}^i \succcurlyeq_i \mathbf{z} \text{ при любом } \mathbf{z} \in B_i(\mathbf{p}, r)\big\}.$$

Определение 4. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на топологическом пространстве X называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ множества $\{y \in X \,|\, y \succcurlyeq x\}$ и $\{y \in X \,|\, x \succcurlyeq y\}$ замкнуты.

Определение 5. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на выпуклом множестве X называется *выпуклым*, если $\lambda x + (1-\lambda) y \succcurlyeq y$ для любых $x, y \in X$ таких, что $x \succcurlyeq y$, и любого $\lambda \in [0,1]$.

Определение 6. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется *локально ненасыщаемым* на топологическом пространстве X, если для любого $x \in X$ и любой относительной окрестности $U \subset X$ точки x найдется такая точка $y \in U$, что $y \succ x$.

Применительно к отношению предпочтения $\succcurlyeq_i$, заданному на $\mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^L_+$,

мы говорим, что оно локально ненасыщаемо в момент времени $t = 0$ ($t = 1$), если для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L_+$ ограничение отношения $\succcurlyeq_i$ на множество $\mathbb{R}^L_+ \times \{\mathbf{x}\}$ (соответственно, $\{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}^L_+$) локально ненасыщаемо.

Лемма 4. *Пусть отношение предпочтения $\succcurlyeq_i$ непрерывно, выпукло и локально ненасыщаемо в каждый момент времени $t \in \{0, 1\}$ и $\boldsymbol{\omega}^i \neq 0$. Тогда для любых $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ и $r \geqslant 0$ множество $D_i(\mathbf{p}, r)$ является непустым выпуклым компактом и для любого $\mathbf{x} \in D_i(\mathbf{p}, r)$ выполнено равенство*

$$\left(\mathbf{p}^0, \frac{\mathbf{p}^1}{1+r}\right) \cdot \mathbf{x} = \left(\mathbf{p}^0, \frac{\mathbf{p}^1}{1+r}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}^i.$$

Доказательство. Непосредственно из определения бюджетного множества вытекает, что $B_i(\mathbf{p}, r)$ — непустой компакт. Отсюда в силу непрерывности отношения предпочтения $\succcurlyeq_i$ следует, что множество спроса $D_i(\mathbf{p}, r)$ непусто и компактно (см., например, [1, теорема 1.2.3]). Пусть $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1\right) \in D_i(\mathbf{p}, r) \subset B_i(\mathbf{p}, r)$. Тогда из локальной ненасыщаемости в каждый момент времени вытекает, что оба бюджетных ограничения выполняются как равенства, т. е. для некоторого $d_i \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0} - d_i, \; \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,1} + (1+r) \cdot d_i.$$

Выражая d_i из первого равенства и подставляя его во второе равенство, после элементарных преобразований получаем требуемое тождество. Отсюда, в частности, вытекает что $D_i(\mathbf{p}, r)$ совпадает с множеством максимальных точек отношения $\succcurlyeq_i$ на модифицированном бюджетном множестве

$$\widetilde{B}_i(\mathbf{p}, r) = \left\{\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^{2L}_+ \;\middle|\; \left(\mathbf{p}^0, \frac{\mathbf{p}^1}{1+r}\right) \cdot \mathbf{x}^i \leqslant \left(\mathbf{p}^0, \frac{\mathbf{p}^1}{1+r}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}^i\right\},$$

которое является непустым выпуклым компактом. Учитывая выпуклость отношения предпочтения, получаем, что $D_i(\mathbf{p}, r)$ выпукло (см., например, [1, теорема 1.2.3]). Лемма 4 доказана.

1.3. Взаимодействие секторов экономики

Рассмотрим оба сектора экономики в рамках единой системы, связав их с помощью операций кредитования (инвестирования). Одним из параметров, формирующих потребительский спрос, является доходность кредитных операций (кредитная ставка) r, формально независимая от цен. Начиная с этого момента мы будем полагать, что она равна общей доходности производственного сектора $r(\mathbf{p})$.

Каковы основания для подобного отождествления? Не будет ли более естественным предполагать, что каждый инвестор захочет вкладывать свои средства в предприятие с наибольшей доходностью $r_j(\mathbf{p})$? Вряд ли стоит отождествлять рядового инвестора с профессиональным брокером. На практике типичный мелкий инвестор доверяет свои средства крупным надежным банкам, паевым фондам и т. п., которые собственно и занимаются размещением активов на микроуровне. В свою очередь, крупные инвесторы тоже не полагаются на доходность активов одной фирмы, формируя сбалансированные портфели активов, поскольку высокая доходность активов компенсируется их высокой курсовой стоимостью и следовательно, высокими издержками на их приобретение, что в итоге нивелирует доходность от владения разными активами. В связи с этим следует вспомнить, что общая доходность $r(\mathbf{p})$ являлась усреднением доходов отдельных предприятий $r_j(\mathbf{p})$ с коэффициентами λ_j, которые в соответствии со своим определением (2) совпадают с относительными долями инвестиций в фирму j. В свою очередь, эти относительные доли в точности совпадают с компонентами так называемого «касательного» или «рыночного» портфеля в классической модели формирования оптимального портфеля Д. Тобина (см. [4, § 15.5, § 17.6]). Вряд ли стоит переоценивать это совпадение, поскольку имеется слишком много различий между этими моделями, в частности, в изучаемой модели полностью отсутствует вероятностная составляющая, которая является доминирующей в моделях Г. Марковица и Д. Тобина. Тем не менее замеченный параллелизм придает бóльшую уверенность в правильности отождествления процентной ставки r с функцией общей производственной доходности $r(\mathbf{p})$.

Рассмотрим отображение $PV : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to \mathbb{R}^{2L}_{++}$, определенное формулой $PV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = \left(\mathbf{p}^0, \dfrac{\mathbf{p}^1}{1 + r\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right)}\right)$. В силу леммы 3 отображение PV является непрерывной векторнозначной функцией. Далее положим $D_i(\mathbf{p}) := D_i(\mathbf{p}, r(\mathbf{p}))$. Теперь из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Лемма 5. *Пусть отношение предпочтения $\succcurlyeq_i$ непрерывно, выпукло и локально ненасыщаемо в каждый момент времени $t \in \{0, 1\}$ и $\boldsymbol{\omega}^i \neq 0$. Кроме того, пусть выполнены предположения* **Y1—Y5**. *Тогда для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ множество $D_i(\mathbf{p})$ является непустым выпуклым компактом и для любого $\mathbf{x} \in D_i(\mathbf{p})$*

$$PV\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) \cdot \mathbf{x} = PV\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) \cdot \boldsymbol{\omega}^i. \tag{3}$$

При этом точечно-множественное соответствие $D_i(\mathbf{p})$ имеет замкнутый

график и образ $D_i(K)$ *любого компактного подмножества* $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *ограничен.*

Тождество (3) имеет важный содержательный смысл: величина $PV\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) \cdot \mathbf{x}$ представляет собой так называемую «текущую стоимость» (present value) потребительского набора $\mathbf{x}$. Понятие текущей стоимости используется в финансовой математике для сравнения между собой разновременных платежей (см. например [3, § 4.2]). В русскоязычной литературе по финансовому анализу используются также синонимичные ему понятия «приведенная стоимость» и «чистая приведенная стоимость»; впрочем, последний термин обычно используется при исследовании потока разнонаправленных платежей. В дальнейшем $PV\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right)$ будем называть приведенными ценами, а стоимость $PV\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) \cdot \mathbf{x}$, выраженную в приведенных ценах, — приведенной стоимостью. В соответствии с этим равенство (3) является тождеством Вальраса относительно приведенных цен. При этом легко видеть, что относительно номинальных цен $\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right)$ тождество Вальраса не имеет места. Кроме того, для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ выполнено равенство

$$PV\left(\mathbf{p}\right) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^+(\mathbf{p})}{1 + r\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right)} - \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^-(\mathbf{p})$$
$$= \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^+(\mathbf{p})\left(\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^-(\mathbf{p})\right)}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{y}^+(\mathbf{p})} - \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{y}^-(\mathbf{p}) = 0. \quad (4)$$

Иными словами, чистая приведенная стоимость производственного потока платежей равна нулю.

Замечание. Напомним, что в изучаемой модели (как и в модели Эрроу—Дебре) понятие чистой прибыли и базирующееся на нем понятие рентабельности из определения 3 были основаны на «бухгалтерском» подходе к измерению доходности, т. е. чистый доход равен общей выручке за вычетом общих расходов. В то же время расчет прибыли на основе приведенных цен ближе к теоретико–экономической оценке доходности фирмы на основе альтернативных стоимостей. Подробное изложение этих двух подходов с примером анализа доходности вымышленной фирмы «Хот-Дог» можно найти в монографии [5, глава 7]. Полученное выше тождество $PV\left(\mathbf{p}\right) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0$ интерпретируется в этих терминах как равенство нулю чистой экономической прибыли (ЧЭП) производственного сектора в целом. Отсюда вытекает парадоксальный на первый взгляд вывод, что, как правило, часть фирм $j \in M$ функционирует с отрицательной ЧЭП, которая в нашем случае вычисляется как

$PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. В этой связи отметим, что благодаря условию **Y3** «бухгалтерская» чистая прибыль $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$ всегда неотрицательна. Именно так обстояли дела в фирме «Хот-Дог»; при положительном сальдо анализ альтернативных издержек показал экономическую убыточность данного предприятия. Отметим также, что изучаемая модель, фактически являющаяся структурным «кирпичиком» более общей многопериодной модели, описывает поведение экономики в краткосрочном временно́м интервале. В этом случае наличие в экономике убыточных (с точки зрения ЧЭП) предприятий является скорее правилом, чем исключением. Ясно, что со временем такие фирмы либо разорятся, либо реорганизуются, повысив свою эффективность, либо будут поглощены более удачливыми конкурентами. В любом случае будущая судьба этих предприятий выходит за временны́е рамки изучаемой модели.

Сформулируем теперь основное понятие настоящей работы.

Определение 7. Вектор $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ называется *равновесной системой цен,* если для любого $i \in N$ найдется $\bar{\mathbf{x}}^i \in D_i(\mathbf{p}^*)$ такое, что

$$\sum_{i \in N} \bar{\mathbf{x}}^i = \sum_{i \in N} \boldsymbol{\omega}^i + \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

Определение 8. Пусть X — насыщенное вверх подмножество векторного пространства $\mathbb{R}^L$ (т. е. $\mathbf{x}' \in X$ для любых $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{x}' \geqslant \mathbf{x}$) с заданным на нем отношением предпочтения $\succcurlyeq$. Тогда $\succcurlyeq$ называется *монотонным* относительно $k \in L$ в точке $\mathbf{x} \in X$, если $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}^k \succ \mathbf{x}$ при любом $\varepsilon > 0$, где $\mathbf{e}^k$ — k-й единичный вектор.

Определение 9 (условие ресурсной связности). *Для любых $k, k' \in L$, $t, t' \in \{0,1\}$ таких, что $(k,t) \neq (k',t')$, найдется участник $i \in N$, у которого отношение предпочтения монотонно относительно товара k в момент времени t и $\boldsymbol{\omega}^{i,t'}_{k'} > 0$.*

Определение 10 (условие производственной ненасыщаемости). *Для любого $\mathbf{y} \in Y = \sum_{j \in M} Y_j$ найдется $\mathbf{z} \in Y$ такой, что $\mathbf{z}^+ > \mathbf{y}^+$.*

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема. *Пусть в производственном секторе все технологические множества удовлетворяют условиям* **Y1—Y5,** *выполнено условие производственной ненасыщаемости, потребительские отношения предпочтения $\succcurlyeq_i$ непрерывны, выпуклы, локально ненасыщаемы в каждый момент времени $t \in \{0,1\}$, $\boldsymbol{\omega}^i \neq 0$ и выполнено условие ресурсной связности. Тогда существует равновесная система цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$.*

2. Вспомогательные результаты

При доказательстве нижеследующих утверждений будут предполагаться выполненными все предположения теоремы.

Лемма 6. *Множество* $Y = \sum\limits_{j\in M} Y_j$ *удовлетворяет условиям* **Y1**—**Y4** *и для любых* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *и* $\mathbf{z} \in Y$ *выполнено неравенство* $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{p}\cdot\mathbf{z}$, *причем при* $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}(\mathbf{p})$ *неравенство является строгим.*

Доказательство. Замкнутость, выпуклость и насыщенность вниз множества Y следует из соответствующих свойств множества Y_j. Предположим, что существует $\mathbf{y} \in Y$ такое, что $\mathbf{y} = \sum_{j\in M}\mathbf{y}_j > 0$. Тогда $\mathbf{y}_j^- = 0$ при любом $j \in M$ и $\mathbf{y}^+ = \sum_{j\in M}\mathbf{y}_j^+ > 0$, причем по определению $\mathbf{y}_j^+ \geqslant 0$ при любом $j \in M$. Значит, найдется такое $j \in M$, что $\mathbf{y}_j^+ > 0$, т. е. $\left(0, \mathbf{y}_j^+\right) \in Y_j$, что противоречит условию **Y1**. При этом $0 \in Y$, поскольку $0 \in Y_j$ при любом $j \in M$.

Покажем, что в Y нет нетривиальных технологий с постоянной отдачей. Предположим противное. Тогда для любого n найдутся $\mathbf{z}_{j,n} \in Y_j$ такие, что $n\cdot\mathbf{z} = \sum\limits_j \mathbf{z}_{j,n}$. Заметим, что $\sum\limits_{j\in M}\dfrac{\mathbf{z}_{j,n}}{n} \equiv \mathbf{z}$ при любом n. Поэтому все $\dfrac{\mathbf{z}_{j,n}}{n}$ ограничены в совокупности. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\dfrac{\mathbf{z}_{j,n}}{n} \to \widetilde{\mathbf{z}}_j \in Y_j$. При этом $\dfrac{\alpha\mathbf{z}_{j,n}}{n} \in Y_j$ и $\dfrac{\alpha\mathbf{z}_{j,n}}{n} \to \alpha\widetilde{\mathbf{z}}_j \in Y_j$ при любом $\alpha \geqslant 1$ и всех $n \geqslant \alpha$. В силу произвольности $\alpha \geqslant 1$ это означает, что $\widetilde{\mathbf{z}}_j$ — технология с постоянной отдачей из множества Y_j, т. е. $\widetilde{\mathbf{z}}_j^+ = 0$. С другой стороны, для любого n имеем $\mathbf{z} = \sum\limits_{j\in M}\dfrac{\mathbf{z}_{j,n}}{n}$. Следовательно, $\mathbf{z}^+ = \sum\limits_{j\in M}\widetilde{\mathbf{z}}_j{}^+ = 0$.

Покажем, что вектор $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является $\mathbf{p}$-оптимальным. Пусть $\mathbf{z} = \sum\limits_{j\in M}\mathbf{z}_j \in Y$ — произвольный элемент. Тогда $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_j(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{p}\cdot\mathbf{z}_j$ для любого $j \in M$ по определению $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. При этом если $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}(\mathbf{p})$, то $\mathbf{z}_j \neq \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$ по крайней мере для одного $j \in M$ и соответствующее неравенство будет строгим в силу единственности оптимального решения на множестве Y_j. Суммируя неравенства по всем $j \in M$, получаем строгое неравенство $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{p}) > \mathbf{p}\cdot\mathbf{z}$. Лемма 6 доказана.

Следствие 1 (свойство монотонности). *Если* $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$, *то*

$$\mathbf{q}\cdot\left(\mathbf{y}(\mathbf{q}) - \mathbf{y}(\mathbf{q}')\right) \geqslant 0, \quad \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}'\right)\cdot\left(\mathbf{y}(\mathbf{q}) - \mathbf{y}(\mathbf{q}')\right) \geqslant 0,$$

причем при $\mathbf{y}(\mathbf{q}) \neq \mathbf{y}(\mathbf{q}')$ *неравенства являются строгими.*

Лемма 7. *Пусть* $\mathbf{q}^0_n \to 0$, $\mathbf{q}^1 \gg 0$ *и* $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0_n, \mathbf{q}^1\right)$. *Тогда последовательность* $\mathbf{y}_n$ *является неограниченной и* $\dfrac{||\mathbf{y}^+_n||}{||\mathbf{y}^-_n||} \to 0$.

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{y}_n$ — ограниченная последовательность. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{y}_n \to \bar{\mathbf{y}} \in Y$. Для каждого n и любого $\mathbf{z} \in Y$ выполнены неравенства $\left(\mathbf{q}^0_n, \mathbf{q}^1\right) \cdot \mathbf{y}_n \geqslant \left(\mathbf{q}^0_n, \mathbf{q}^1\right) \cdot \mathbf{z}$. Переходя к пределу, получаем $\left(0, \mathbf{q}^1\right) \cdot \bar{\mathbf{y}} \geqslant \left(0, \mathbf{q}^1\right) \cdot \mathbf{z}$. Следовательно, $\mathbf{q}^1 \cdot \bar{\mathbf{y}}^+ \geqslant \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{z}^+$ для любого $\mathbf{z} \in Y$. Учитывая, что $\mathbf{q}^1 \gg 0$, получаем противоречие с условием производственной ненасыщаемости.

Итак, последовательность $\mathbf{y}_n$ неограничена, т. е. $||\mathbf{y}_n|| \to +\infty$. Рассмотрим последовательность элементов единичной сферы $\mathbf{z}_n = \dfrac{\mathbf{y}_n}{||\mathbf{y}_n||}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{z}_n \to \mathbf{z}$; при этом $||\mathbf{z}|| = 1$, в частности, $\mathbf{z} \neq 0$. Пусть $\alpha > 0$ произвольное число. Тогда $\alpha\mathbf{z}_n \to \alpha\mathbf{z}$, причем $\alpha\mathbf{z}_n \in Y$ при любом n таком, что $||\mathbf{y}_n|| \geqslant \alpha$. В силу неограниченности $||\mathbf{y}_n||$ и замкнутости Y получаем, что $\alpha\mathbf{z} \in Y$ при любом $\alpha > 0$, т. е. $\mathbf{z}$ — технология с постоянной отдачей от масштаба. Следовательно, $\mathbf{z}^+ = 0$. Из определения $\mathbf{z}$ вытекает, что $\dfrac{\mathbf{y}^+_n}{||\mathbf{y}_n||} \to 0$, т. е. $\dfrac{||\mathbf{y}^+_n||}{||\mathbf{y}_n||} \to 0$.

Покажем, что $\dfrac{||\mathbf{y}^+_n||}{||\mathbf{y}^-_n||} \to 0$. Пусть это не так. Тогда переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $||\mathbf{y}^+_n|| \geqslant \varepsilon||\mathbf{y}^-_n||$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\dfrac{\varepsilon||\mathbf{y}^-_n||}{||\mathbf{y}_n||} \to 0$, т. е. $\dfrac{\mathbf{y}^-_n}{||\mathbf{y}_n||} \to 0$. Но это невозможно, так как в этом случае $\mathbf{z} = 0$, в то время как $||\mathbf{z}|| = 1$. Лемма 7 доказана.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *и* $f_{\mathbf{q}}(\alpha) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)$. *Тогда* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} f_{\mathbf{q}}(\alpha) = -\infty$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\alpha_n \to +\infty$ такая, что $f_{\mathbf{q}}(\alpha_n) \geqslant C$ при некотором $C > -\infty$. Заметим, что в силу однородности степени нуль функции $\mathbf{y}(\mathbf{q})$ справедливо равенство $\mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) = \mathbf{y}\left(\dfrac{\mathbf{q}^0}{\alpha}, \mathbf{q}^1\right)$. Поэтому сделанное выше предположение можно записать в виде

$$\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{y}^+\left(\frac{\mathbf{q}^0}{\alpha_n}, \mathbf{q}^1\right) \geqslant C + \mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{y}^-\left(\frac{\mathbf{q}^0}{\alpha_n}, \mathbf{q}^1\right).$$

Введем обозначение: $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}\left(\dfrac{\mathbf{q}^0}{\alpha_n}, \mathbf{q}^1\right)$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\dfrac{\mathbf{y}_n^-}{||\mathbf{y}_n^-||}$ сходится к некоторому $\mathbf{z} > 0$. Теперь поделив предыдущее неравенство на $||\mathbf{y}_n^-||$ и перейдя к пределу, получим противоречие $0 \geqslant \mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{z} > 0$. Следствие 2 доказано.

Лемма 8. *При любых* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *и* $\alpha, \alpha' \geqslant 1$ *равенство* $f_{\mathbf{q}}(\alpha) = f_{\mathbf{q}}(\alpha')$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $\mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) = \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha'\mathbf{q}^1\right)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$ и $\alpha' \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{y}' = \mathbf{y}(\mathbf{q}^0, \alpha'\mathbf{q}^1)$. Тогда $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}') = f_{\mathbf{q}}(1) - f_{\mathbf{q}}(\alpha') = 0$, что в силу следствия 1 возможно лишь в случае, когда $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Пусть теперь $\alpha, \alpha' > 1$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1)$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y}(\mathbf{q}^0, \alpha'\mathbf{q}^1)$. Тогда в силу следствия 1 имеем $\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}') \geqslant 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{y}'\right) &= \left(\mathbf{q}^0, (1 + (\alpha - 1))\mathbf{q}^1\right) \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{y}'\right) \\ &= f_{\mathbf{q}}(\alpha) - f_{\mathbf{q}}\left(\alpha'\right) + (\alpha - 1)\mathbf{q}^1 \cdot \Big(\mathbf{y}^+ - \left(\mathbf{y}'\right)^+\Big).\end{aligned}$$

Так как $f_{\mathbf{q}}(\alpha) - f_{\mathbf{q}}(\alpha') = 0$ и $\alpha > 1$, то из последнего равенства следует, что $\mathbf{q}^1 \cdot \Big(\mathbf{y}^+ - (\mathbf{y}')^+\Big) \geqslant 0$. Ввиду равноправности α и α', используя аналогичные выкладки, получаем $\mathbf{q}^1 \cdot \Big((\mathbf{y}')^+ - \mathbf{y}^+\Big) \geqslant 0$, т. е. $\mathbf{q}^1 \cdot \Big(\mathbf{y}^+ - (\mathbf{y}')^+\Big) = 0$. Поскольку в силу однородности степени нуль функции $\mathbf{y}(\mathbf{q})$ выполнены равенства $\mathbf{y} = \mathbf{y}\left(\dfrac{\mathbf{q}^0}{\alpha}, \mathbf{q}^1\right)$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y}\left(\dfrac{\mathbf{q}^0}{\alpha'}, \mathbf{q}^1\right)$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - 1}{\alpha}\mathbf{q}^0 \cdot \Big(\left(\mathbf{y}'\right)^- - \mathbf{y}^-\Big) &= \left(\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} + 1\right)\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1\right) \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{y}'\right) \\ &= \left(\frac{\mathbf{q}^0}{\alpha}, \mathbf{q}^1\right) \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{y}'\right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{q}^0 \cdot \Big((\mathbf{y}')^- - \mathbf{y}^-\Big) \geqslant 0$. Используя аналогичные выкладки для α', получаем противоположные неравенства, что влечет равенство $\mathbf{q}^0 \cdot \Big(\mathbf{y}^- - (\mathbf{y}')^-\Big) = 0$. Умножая равенство $\mathbf{q}^1 \cdot \Big(\mathbf{y}^+ - (\mathbf{y}')^+\Big) = 0$ на α и вычитая из последнего $\mathbf{q}^0 \cdot \Big(\mathbf{y}^- - (\mathbf{y}')^-\Big) = 0$, получим $(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}') = 0$, что в силу следствия 1 возможно лишь в случае, когда $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Поэтому из равенства $f_{\mathbf{q}}(\alpha) = f_{\mathbf{q}}(\alpha')$ следует, что $\mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) = \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha'\mathbf{q}^1\right)$. Ввиду очевидности обратной импликации лемма 8 доказана.

Следствие 3. *Функция* $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ *является невозрастающей при* $\alpha \geqslant 1$ *и*

для любого $t \in (-\infty, \mathbf{q}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{q})]$ *найдутся такие* α_1 *и* α_2, $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < +\infty$, *что* $f_{\mathbf{q}}^{-1}(t) = [\alpha_1, \alpha_2]$. *При этом функция* $\mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)$ *постоянна на интервале* $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Доказательство. Так как $f_{\mathbf{q}}(1) = \mathbf{q}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{q}) = \max\limits_{z\in Y} \mathbf{q}\cdot\mathbf{z} \geqslant f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ и $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f_{\mathbf{q}}(\alpha) = -\infty$, то в силу непрерывности функции $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ для любого $t \leqslant \mathbf{q}\cdot\mathbf{y}(\mathbf{q})$ прообраз $f_{\mathbf{q}}^{-1}(t)$ непуст и содержит наименьший элемент $\alpha_1 \geqslant 1$. Положим $\alpha_2 = \sup f_{\mathbf{q}}^{-1}(t)$ и покажем, что $\alpha_2 < +\infty$. Действительно, в противном случае найдется последовательность $\alpha_n \to +\infty$ такая, что $f_{\mathbf{q}}(\alpha_n) \equiv t > -\infty$, что противоречит доказанному ранее равенству $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f_{\mathbf{q}}(\alpha) = -\infty$. Таким образом, $\alpha_2 < +\infty$ и в силу непрерывности $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ является наибольшим элементом в $f_{\mathbf{q}}^{-1}(t)$. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ утверждение тривиально. Поэтому далее будем полагать, что $\alpha_1 < \alpha_2$. В силу леммы 8 имеем $\mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha_1\mathbf{q}^1\right) = \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha_2\mathbf{q}^1\right) = \mathbf{y}$. Пусть $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ — произвольный элемент и $\mathbf{y}' = \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)$. Тогда в силу следствия 1 выполнены неравенства $\left(\mathbf{q}^0, \alpha_1\mathbf{q}^1\right)\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}') \geqslant 0$ и $\left(\mathbf{q}^0, \alpha_2\mathbf{q}^1\right)\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}') \geqslant 0$. Умножив эти неравенства на $\dfrac{\alpha_2-\alpha}{\alpha_2-\alpha_1}$ и $\dfrac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ соответственно и сложив их, получим неравенство $\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}') \geqslant 0$. При этом в силу определения $\mathbf{y}'$ и следствия 1 выполнено также неравенство $\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y}) \geqslant 0$. Следовательно, $\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)\cdot(\mathbf{y}'-\mathbf{y}) = 0$, что возможно лишь в случае $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$.

Наконец, предположим, что при некоторых α и α', $1 \leqslant \alpha < \alpha'$, справедливо неравенство $f_{\mathbf{q}}(\alpha) < f_{\mathbf{q}}(\alpha')$. Поскольку $f_{\mathbf{q}}(1) = \max\limits_{\alpha\geqslant 1} f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ и $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ — непрерывная функция, то найдется $\alpha'' \in [1, \alpha]$ такое, что $f_{\mathbf{q}}(\alpha'') = f_{\mathbf{q}}(\alpha')$. Но тогда в силу доказанного выше имеем $f_{\mathbf{q}}(\alpha'') = f_{\mathbf{q}}(\alpha) = f_{\mathbf{q}}(\alpha')$. Полученное противоречие доказывает невозможность строгого возрастания $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ на $[1, +\infty]$. Следствие 3 доказано.

Лемма 9. *При любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *множество* $PV^{-1}(\mathbf{q})$ *является непустым выпуклым компактным подмножеством в* $\mathbb{R}^{2L}_{++}$, *при этом функция* $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ *постоянна на* $PV^{-1}(\mathbf{q})$. *Далее, для любого* $\lambda > 0$ *выполнено равенство* $PV^{-1}(\lambda\mathbf{q}) = \lambda PV^{-1}(\mathbf{q})$, *точечно-множественное соответствие* $\mathbf{q} \mapsto PV^{-1}(\mathbf{q})$ *имеет замкнутый график и прообраз* $PV^{-1}(K)$ *любого компактного множества* $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *ограничен.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{q}$ — произвольный элемент из $\mathbb{R}^{2L}_{++}$. Тогда множество $PV^{-1}(\mathbf{q})$ состоит из таких элементов $\mathbf{p}$, что $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$ и $\dfrac{\mathbf{p}^1}{1+r(\mathbf{p})} = \mathbf{q}^1$. Из последнего равенства следует, что $\mathbf{p}^1 = \alpha\mathbf{q}^1$, где $\alpha \geqslant 1$

должно удовлетворять условию $\alpha = 1 + r\left(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1\right) = 1 + r\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) = 1 + \dfrac{\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right) \cdot \mathbf{y}\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)}{\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{y}^-\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)} = \dfrac{\alpha\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{y}^+\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)}{\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{y}^-\left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)}$. Сокращая это равенство на $\alpha \neq 0$, после преобразования получаем равенство $f_{\mathbf{q}}(\alpha) = 0$. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами множества $\mathrm{A}_{\mathbf{q}} = \{\alpha \in [1, +\infty) \,|\, f_{\mathbf{q}}(\alpha) = 0\}$ и элементами множества $PV^{-1}(\mathbf{q})$, задаваемое формулой $\mathbf{p} = \left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)$. Из следствия 3 вытекает, что $f_{\mathbf{q}}^{-1}(0) = [\alpha_1, \alpha_2]$ при некоторых α_1, α_2, где $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < +\infty$. Отсюда вытекают все свойства множества $PV^{-1}(\mathbf{q})$. Положительная однородность степени 1 для соответствия $PV^{-1}(\mathbf{q})$ является простым следствием однородности функции $PV(\mathbf{p})$.

Пусть $\mathbf{q}_n \to \mathbf{q}$, $\mathbf{p}_n \in PV^{-1}(\mathbf{q}_n)$, $\mathbf{p}_n \to \mathbf{p}$ и $\alpha_n \geqslant 1$ таковы, что $\mathbf{p}_n^0 = \mathbf{q}_n^0$, $\mathbf{p}_n^1 = \alpha_n\mathbf{q}_n^1$. Тогда $f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n) \equiv 0$, $\alpha_n = \dfrac{||\mathbf{p}_n^1||}{||\mathbf{q}_n^1||} \to \alpha = \dfrac{||\mathbf{p}^1||}{||\mathbf{q}^1||} \geqslant 1$. Следовательно, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, $\mathbf{p}^1 = \alpha\mathbf{q}^1$ и $f_{\mathbf{q}}(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n) \equiv 0$. Таким образом, $\mathbf{p} = \left(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1\right)$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{A}_{\mathbf{q}}$. В силу доказанного выше это означает, что $\mathbf{p} \in PV^{-1}(\mathbf{q})$.

Предположим, что множество $PV^{-1}(K)$ неограничено. Тогда существует последовательность $\mathbf{p}_n \in PV^{-1}(K)$ такая, что $||\mathbf{p}_n|| \to \infty$, причем $\mathbf{p}_n^0 = \mathbf{q}_n^0$, $\mathbf{p}_n^1 = \alpha_n\mathbf{q}_n^1$, $\mathbf{q}_n \in K$, $\alpha_n \geqslant 1$ и $f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n) = 0$ при любом n. В силу компактности K можно считать, что $\mathbf{q}_n \to \bar{\mathbf{q}} \in K$. Поэтому $\alpha_n \to +\infty$. Из непрерывности $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ по α и по параметру $\mathbf{q}$ и доказанного ранее утверждения $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f_{\bar{\mathbf{q}}}(\alpha) = -\infty$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A \geqslant 1$ такое, что для всех $||\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}|| < \varepsilon$ и $\alpha > A$ выполнено неравенство $f_{\mathbf{q}}(\alpha) < -1$. В силу сходимости последовательностей $\mathbf{q}_n \to \bar{\mathbf{q}}$ и $\alpha_n \to +\infty$, найдется достаточно большое n такое, что $||\mathbf{q}_n - \bar{\mathbf{q}}|| < \varepsilon$ и $\alpha_n > A$, т. е. $f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n) = -1$; при этом по построению $f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n) = 0$. Из полученного противоречия следует справедливость леммы 9.

3. Доказательство теоремы существования равновесия

Пусть $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ — произвольный элемент. Для каждого $i \in N$ определим множества:

$$\widetilde{B}_i(\mathbf{q}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2L}_{+} \,|\, \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i\right\},$$
$$\widetilde{D}_i(\mathbf{q}) = \left\{\bar{\mathbf{x}} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}) \,\Big|\, \bar{\mathbf{x}} \succcurlyeq_i \mathbf{x} \text{ при любом } \mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q})\right\}.$$

Заметим, что $\widetilde{B}_i(\mathbf{q})$ и $\widetilde{D}_i(\mathbf{q})$ суть бюджетное множество и множество спроса экономического агента $i \in N$ в классической модели чистого обмена и для них справедлива

Лемма 10. *Пусть отношение предпочтения $\succcurlyeq_i$ непрерывно, выпукло и локально ненасыщаемо, а начальный запас $\boldsymbol{\omega}^i \neq 0$. Тогда*

1. *при любом $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ множество $\widetilde{D}_i(\mathbf{q})$ является непустым выпуклым компактом;*

2. (*однородность степени нуль*): *при любом $\lambda > 0$ выполнено $\widetilde{D}_i(\lambda\mathbf{q}) = \widetilde{D}_i(\mathbf{q})$;*

3. (*закон Вальраса*): *при любом $\mathbf{x} \in \widetilde{D}_i(\mathbf{q})$ выполнено тождество $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i$;*

4. *точечно-множественное соответствие $\mathbf{q} \mapsto \widetilde{D}_i(\mathbf{q})$ имеет замкнутый график и образ $\widetilde{D}_i(K)$ любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ ограничен.*

Доказательство этой леммы идентично классическому (см., например, [1, теоремы 1.2.3 и 1.4.4]); четность размерности пространства товаров не играет в данном случае никакой роли.

Заметим, что в силу леммы 4 $\widetilde{D}_i(\mathbf{q}) = D_i(\mathbf{p}, r(\mathbf{p}))$, где $\mathbf{p}$ — произвольный элемент из $PV^{-1}(\mathbf{q})$.

Лемма 11. *При любом $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ множество $\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q}) = \mathbf{y}\left(PV^{-1}(\mathbf{q})\right)$ является одноэлементным. Кроме того, функция $\widetilde{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to \mathbb{R}^{2L}$ непрерывна, положительно однородна степени нуль и $\mathbf{q} \cdot \widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q}) \equiv 0$ при любом $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$.*

Доказательство. Одноэлементность множества $\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})$ вытекает из леммы 9. Кроме того, из свойств соответствия $PV^{-1}(\mathbf{q})$ (см. лемму 9), а также из непрерывности и положительной однородности функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ следует однородность функции $\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})$, замкнутость ее графика и ограниченность образа на любом компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$. Следовательно, функция $\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})$ непрерывна всюду в $\mathbb{R}^{2L}_{++}$ по лемме о замкнутом графике (см., например, [1,лемма 1.3.7]). Пусть $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ — произвольный элемент. Заметим, что по определению $\mathbf{q} \cdot \widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q}) = PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p})$ для любого $\mathbf{p} \in PV^{-1}(\mathbf{q})$. В свою очередь, $PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p}) = 0$ в силу равенства (4). Лемма 11 доказана.

Определим на $\mathbb{R}^{2L}_{++}$ точечно-множественное соответствие $\mathbf{q} \mapsto \widetilde{Z}(\mathbf{q})$, полагая

$$\widetilde{Z}(\mathbf{q}) = \sum_{i \in N} \widetilde{D}_i(\mathbf{q}) - \sum_{i \in N} \boldsymbol{\omega}^i - \widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q}).$$

Заметим, что вектор $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ является равновесным тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}^* \in PV^{-1}(\mathbf{q}^*)$, где $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ удовлетворяет условию $0 \in \widetilde{Z}(\mathbf{q}^*)$.

Лемма 12. *Соответствие $\widetilde{Z}(\mathbf{q})$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *при любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *множество* $\widetilde{Z}(\mathbf{q})$ *является непустым выпуклым компактом;*

2. (*однородность степени нуль*): *при любом* $\lambda > 0$ *справедливо равенство* $\widetilde{Z}(\lambda\mathbf{q}) = \widetilde{Z}(\mathbf{q})$;

3. (*закон Вальраса*): $\mathbf{q} \cdot \mathbf{z} = 0$ *при любом* $\mathbf{z} \in \widetilde{Z}(\mathbf{q})$;

4. *точечно-множественное соответствие* $\mathbf{q} \mapsto \widetilde{Z}(\mathbf{q})$ *имеет замкнутый график и образ* $\widetilde{Z}(K)$ *любого компактного подмножества* $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *ограничен.*

Справедливость этой леммы легко вытекает из лемм 9, 10 и 11.

Отметим следующее простое, но важное утверждение.

Лемма 13. *Пусть* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2L}_{+}$ *и*

$$L(\mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{z} = \sum_{i\in N} \mathbf{x}^i - \sum_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^i - \sum_{j\in M} \mathbf{y}_j \leqslant \mathbf{v} \,\middle|\, \mathbf{x}^i \geqslant 0,\, \mathbf{y}_j \in Y_j \right\}.$$

Тогда все $\mathbf{x}^i$ *и* $\mathbf{y}_j$ *ограничены в совокупности.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{v} = 0$, поскольку его можно «присоединить» к вектору начальных запасов. Тогда для первых l компонент выполнено ограничение $\sum\limits_{i\in N} \mathbf{x}^{0,i} - \sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{0,i} + \sum\limits_{j\in M} \mathbf{y}_j^- \leqslant 0$. Заметим, что все $\mathbf{x}^{0,i}$ и $\mathbf{y}_j^-$ ограничены снизу в силу их неотрицательности. Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает, что $\mathbf{x}^{0,i}$ и $\mathbf{y}_j^-$ ограничены сверху вектором $\sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{0,i}$. Докажем ограниченность сверху для всех $\mathbf{y}_j^+$. Предположим, что это не так и для некоторого $j \in M$ существует неограниченная последовательность $\mathbf{y}_{j,n}$. Рассмотрим последовательность элементов единичной сферы $\mathbf{z}_n = \frac{\mathbf{y}_{j,n}}{||\mathbf{y}_{j,n}||}$. Заметим, что $\mathbf{z}_n \in Y_j$ при всех n таких, что $||\mathbf{y}_{j,n}|| \geqslant 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{z}_n \to \mathbf{z} \neq 0$; при этом $\mathbf{z}^- = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{y}_{j,n}^-}{||\mathbf{y}_{j,n}||} = 0$ в силу ограниченности $\mathbf{y}_{j,n}^-$. Следовательно, $\mathbf{z} > 0$ и $\mathbf{z} \in Y_j$ в силу замкнутости множества Y_j. Полученное противоречие с условием **Y3** завершает доказательство совокупной ограниченности $\mathbf{y}_j^+$. Ограниченность сверху для $\mathbf{x}^{1,i} \geqslant 0$ тривиально следует из неравенства $\sum\limits_{i\in N} \mathbf{x}^{1,i} - \sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{1,i} - \sum\limits_{j\in M} \mathbf{y}_j^+ \leqslant 0$ и ограниченности $\mathbf{y}_j^+$. Лемма 13 доказана.

Доказательство существования равновесия будет опираться на известную лемму Гейла–Никайдо–Дебре (см., например, [2, C.III.(15)]).

Лемма 14. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — произвольный непустой выпуклый замкнутый конус с вершиной в точке 0, не содержащий линейных подпространств, $S^m = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+ \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{m} p_k = 1\right\}$, $Q = S^m \cap K \neq \varnothing$ и $F : Q \to 2^{\mathbb{R}^m}$ — ограниченное замкнутое соответствие с непустыми выпуклыми компактными значениями. Если $\mathbf{q} \cdot \mathbf{f} \leqslant 0$ для любых $\mathbf{q} \in Q$ и $\mathbf{f} \in F(\mathbf{q})$, то найдется вектор $\mathbf{q}^* \in Q$ такой, что $F(\mathbf{q}^*) \cap K^- \neq \varnothing$, где $K^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \leqslant 0$ при любом $\mathbf{u} \in K\}$ — отрицательная поляра конуса K.*

Доказательство теоремы существования равновесия. Из сказанного выше следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ такого, что $0 \in \widetilde{Z}(\mathbf{q}^*)$. Рассмотрим единичный симплекс $\Delta = \left\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_+ \,\middle|\, \sum\limits_{k\in 2L} q_k = 1\right\}$ и его относительную внутренность $S = \left\{\mathbf{q} \in \Delta \,\middle|\, \mathbf{q} \gg 0\right\}$. В силу свойства однородности степени нуль достаточно рассмотреть ограничение соответствия $\widetilde{Z}$ на множество S. При каждом $n \geqslant 1$ рассмотрим множество

$$\Delta_n = \left\{\mathbf{q} \in \Delta \,\middle|\, q_k \geqslant \frac{1}{n+2l} \text{ при любом } k\right\} \subset S.$$

Пусть $K_n = \operatorname{cone}(\Delta_n)$ — коническая оболочка множества Δ_n. Очевидно, что K_n — выпуклый замкнутый конус с вершиной в точке 0 и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{R}^{2L}_{++}$. В силу леммы 12 сужение $\widetilde{Z}$ на множество Δ_n удовлетворяет всем условиям леммы Гейла–Никайдо–Дебре. Поэтому для каждого n существуют $\mathbf{q}_n \in \Delta_n$ и $\mathbf{z}_n \in \widetilde{Z}(\mathbf{q}_n) \bigcap K_n^-$. В силу компактности симплекса Δ можно считать, что $\mathbf{q}_n \to \mathbf{q}^* \in \Delta$. Пусть $\mathbf{z}_n = \sum\limits_{i\in N} \mathbf{x}^i_n - \sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^i - \sum\limits_{j\in M} \mathbf{y}^j_n$. Сначала предположим, что последовательность $\mathbf{z}_n$ неограничена. Тогда последовательность $\mathbf{v}_n = \dfrac{\mathbf{z}_n}{||\mathbf{z}_n||}$ можно считать сходящейся к некоторому $\bar{\mathbf{v}}$ такому, что $||\bar{\mathbf{v}}|| = 1$ и $\lambda\mathbf{v}_n \to \lambda\bar{\mathbf{v}}$ для любого $\lambda > 0$. В силу ограниченности сходящейся последовательности $\mathbf{v}_n$ и леммы 13 все $\dfrac{\mathbf{x}^i_n}{||\mathbf{z}_n||}$ и $\dfrac{\mathbf{y}^j_n}{||\mathbf{z}_n||}$ ограничены в совокупности. Поэтому без ограничения общности их можно считать сходящимися к некоторым $\bar{\mathbf{x}}^i$ и $\bar{\mathbf{y}}^j$. Ясно, что если $||\mathbf{z}_n|| \geqslant \lambda$, то $\dfrac{\lambda\mathbf{y}^j_n}{||\mathbf{z}_n||} \in Y_j$. Следовательно, $\lambda\bar{\mathbf{y}}^j \in Y_j$ при любом $\lambda \geqslant 0$, что в силу

условия **Y4** означает, что $\bar{\mathbf{y}}^j \leqslant 0$. Поэтому

$$\mathbf{v}_n = \left(\sum_{i\in N} \frac{\mathbf{x}_n^i}{||\mathbf{z}_n||} - \sum_{i\in N} \frac{\boldsymbol{\omega}^i}{||\mathbf{z}_n||} - \sum_{j\in M} \frac{\mathbf{y}_n^j}{||\mathbf{z}_n||}\right) \to \left(\sum_{i\in N} \bar{\mathbf{x}}^i - \sum_{j\in M} \bar{\mathbf{y}}_n^j\right) \geqslant 0,$$

т. е. $\bar{\mathbf{v}} \geqslant 0$. С другой стороны, $\mathbf{z}_n \in K_n^-$ для любого n. Отсюда следует, что $\mathbf{v}_n \in K_n^-$ и следовательно, $\bar{\mathbf{v}} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n^- = -\mathbb{R}_+^{2L}$. Одновременное выполнение этих условий влечет равенство $\bar{\mathbf{v}} = 0$, что невозможно ввиду $||\bar{\mathbf{v}}|| = 1$. Итак, предположив неограниченность последовательности $\mathbf{z}_n$, мы пришли к противоречию. Следовательно $\mathbf{z}_n$ ограничена. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{z}_n \to \bar{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i\in N} \bar{\mathbf{x}}^i - \sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^i - \sum\limits_{j\in M} \bar{\mathbf{y}}^j$, где $\mathbf{x}_n^i \to \bar{\mathbf{x}}^i$ и $\mathbf{y}_n^j \to \bar{\mathbf{y}}^j$. Это является следствием ограниченности $\mathbf{z}_n$ и леммы 13. Так как $\mathbf{z}_n \in K_n^-$ для всех n, то повторив рассуждения, проведенные для последовательности $\mathbf{v}_n$, получим, что $\bar{\mathbf{z}} \leqslant 0$.

Предположим, что $\mathbf{q}^* = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{q}_n \in \Delta \setminus S$, т. е. $q_k^* = 0$ при некотором $k \in 2L$. Поскольку $\mathbf{q}^* \neq 0$, найдется такое $j \in 2L$, что $q_j^* > 0$. В силу условия ресурсной связности имеется потребитель $i \in N$, для которого отношение предпочтения $\succcurlyeq_i$ монотонно по товару k и $\omega_j^i > 0$; в частности $\mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^i > 0$. Заметим, что по построению для всех n справедливы включения $\mathbf{x}_n^i \in \widetilde{D}_i(\mathbf{q}_n) \subset \widetilde{B}_i(\mathbf{q}_n)$. Отсюда следует, что вектор $\bar{\mathbf{x}}^i$ принадлежит множеству

$$\widetilde{B}_i(\mathbf{q}^*) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{2L} \,|\, \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^i\right\}.$$

Покажем, что этот вектор является максимальным элементом в этом множестве. Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}^*)$ — произвольный элемент. Тогда при любом $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо неравенство $\mathbf{q}^* \cdot \varepsilon\mathbf{x} < \mathbf{q}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^i$. Поэтому при достаточно больших n выполнены неравенства $\mathbf{q}_n \cdot \varepsilon\mathbf{x} < \mathbf{q}_n \cdot \boldsymbol{\omega}^i$; в частности $\varepsilon\mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}_n)$. Из определения $\mathbf{x}_n^i \in \widetilde{D}_i(\mathbf{q}_n)$ следует, что $\mathbf{x}_n^i \succcurlyeq_i \varepsilon\mathbf{x}$. Поэтому переходя к пределу по n, в силу непрерывности отношения предпочтения $\succcurlyeq_i$ получим $\bar{\mathbf{x}}^i \succcurlyeq_i \varepsilon\mathbf{x}$. Теперь, переходя к пределу по $\varepsilon \to 1$ и используя непрерывность $\succcurlyeq_i$, получим $\bar{\mathbf{x}}^i \succcurlyeq_i \mathbf{x}$. Однако в множестве $\widetilde{B}_i(\mathbf{q}^*)$ не может быть максимальных элементов, поскольку ввиду равенства $q_k^* = 0$ вместе с каждым элементом $\mathbf{x}$ в $\widetilde{B}_i(\mathbf{q}^*)$ содержится $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}^k$, где $\mathbf{e}^k$ — k-й единичный вектор, а t — произвольное положительное число. С другой стороны, $\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}^k \succ_i \mathbf{x}$ в силу монотонности отношения предпочтения $\succcurlyeq_i$ по товару k.

Из полученного противоречия следует, что $\mathbf{q}^* \gg 0$. Поэтому последовательность $\mathbf{q}_n$ целиком содержится в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}_{++}^{2L}$.

Отсюда и из леммы 12 следует, что $\bar{\mathbf{z}} \in \widetilde{Z}\,(\mathbf{q}^*)$; в частности $\mathbf{q}^* \cdot \bar{\mathbf{z}} = 0$ и, как было доказано выше, $\bar{\mathbf{z}} \leqslant 0$. Следовательно, $\bar{\mathbf{z}} = 0 \in \widetilde{Z}\,(\mathbf{q}^*)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.** Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М: Мир, 1995.
2. **Гильденбрандт В.** Ядро и равновесие в большой экономике. М: Наука, 1986.
3. **Малыхин В. И.** Финансовая математика. М: Юнити, 2000.
4. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры в математической экономике. М: Мир, 1972.
5. **Самуэльсон П. А., Нордхаус В. Д.** Экономика. Изд. 15-е. М: Бином–КноРус, 1997.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: sidorov@math.nsc.ru

Статья поступила
1 июня 2004 г.