ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2005. Серия 2. Том 12, № 2, 24–43

УДК 519.10

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПРОЕКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА $\mathbb{R}_+$ И $\mathbb{R}_-$*)

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается векторная булева задача поиска множества Парето, частными критериями которой являются положительные и отрицательные срезки линейных функций. Выводится формула предельного уровня возмущений в пространстве параметров этих функций с метрикой l_1, сохраняющих эффективность (парето–оптимальность) решения. В качестве следствий получены необходимые и достаточные условия двух типов устойчивости задачи.

Введение

При решении практических задач оптимизации приходится учитывать различные факторы неопределенности и случайности, такие как неточность входной информации, неадекватность математических моделей реальным процессам, ошибки округления, погрешность вычислений, потребность в разработке алгоритмов для решения серии «близких» задач и т. д. В связи с этим широкое распространение дискретных оптимизационных моделей в последние десятилетия обусловило внимание многих специалистов к исследованию разнообразных аспектов устойчивости, а также смежных вопросов параметрического и постоптимального анализа как скалярных, так и векторных (многокритериальных) задач дискретной оптимизации. В рамках введения не представляется возможным осветить всё многообразие существующих подходов к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации. Поэтому мы ограничимся исключительно последними публикациями, которые ближе всего примыкают к данной работе. Отметим лишь, что систематическое изложение

*) Исследование выполнено в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29» (проект 913/28).

теории устойчивости и параметрического анализа задач дискретной оптимизации содержится в работах [19, 27], а достаточно полное представление о многочисленных публикациях по этим вопросам можно получить на основе аннотированной библиографии [24].

Переходя к краткому обзору публикаций, появившихся в последнее время, выделим два основных подхода к постановке и исследованию проблем устойчивости дискретных задач. В ряде работ авторы ставят своей целью найти количественные оценки, характеризующие меру устойчивости оптимальных решений. В основу этого подхода положено ключевое понятие радиуса устойчивости, под которым понимается предельный уровень возмущений параметров задачи, сохраняющих некоторые свойства оптимальных решений. Впервые этот подход был применён к классической (скалярной) задаче коммивояжера в [18], а в обзоре [27] достаточно подробно изложены основные результаты исследований в этом направлении. Наряду с поиском аналитических выражений для радиуса устойчивости ряд авторов занимается разработкой алгоритмов его вычисления, а также анализом сложности таких алгоритмов (см., например, [20, 25]).

В работах второго направления авторы концентрируют свое внимание на поиске и описании области устойчивости оптимального решения. Например, в [26] обсуждаются вопросы применимости метода k лучших решений к нахождению области устойчивости оптимального решения линейной комбинаторной задачи оптимизации. К этому направлению относятся публикации, посвящённые получению условий, при выполнении которых множество эффективных (в некотором смысле) решений векторной задачи обладает некоторым заранее заданным свойством устойчивости. В этой связи упомянем работу [17], в которой проведён сравнительный анализ пяти типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленного программирования. Аналогичные результаты для этих типов устойчивости (но по функционалу) ранее были получены в [3, 4, 7, 14, 22] для векторных задач дискретной оптимизации с разнообразными принципами оптимальности.

Ведутся работы по исследованию устойчивости алгоритмов решения дискретных задач оптимизации. Перспективным представляется анализ устойчивости релаксационных множеств, широко используемых в различных алгоритмах решения задач целочисленного программирования. Выделим работу [21], в которой указанный анализ проведён на основе L-разбиения. Устойчивость некоторых алгоритмов решения скалярных задач целочисленного программирования при малых колебаниях релак-

сационных множеств исследовалась в [16].

В настоящей статье продолжаются исследования [2, 6 ,7, 23] устойчивости решений различных векторных (многокритериальных) дискретных задач с разными принципами оптимальности. Во всех этих работах анализ устойчивости осуществлялся в случае, когда в пространстве параметров задана чебышевская метрика l_∞. В работах [9, 12] такой анализ проведён в пространстве с метрикой l_1 и получена формула для радиуса устойчивости эффективного решения векторной комбинаторной задачи с линейными частными критериями. Ранее подобные исследования для скалярных комбинаторных задач были проведены в [6].

В настоящей статье рассматривается векторная булева задача поиска множества Парето с частными критериями, являющимися положительными и отрицательными срезками линейных функций. Получена формула радиуса устойчивости эффективного решения для метрики l_1. В качестве следствий приведены необходимые и достаточные условия двух типов устойчивости задачи. Излагаемые результаты были анонсированы в [10, 11].

1. Определения, обозначения и свойства

Рассмотрим следующую модель векторной булевой задачи. Пусть $m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, A_i — i-я строка матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, $|X| \geqslant 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Введём в рассмотрение операторы проектирования вещественного вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ произвольной размерности $k \geqslant 1$ на неотрицательный и неположительный ортанты

$$\mathbb{R}^k_+ = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \ y_i \geqslant 0, \ i \in N_k\}, \quad \mathbb{R}^k_- = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \ y_i \leqslant 0, \ i \in N_k\}:$$

$$a \to a^+ = [a]^+ = (a^+_1, a^+_2, \dots, a^+_k), \quad a \to a^- = [a]^- = (a^-_1, a^-_2, \dots, a^-_k),$$

где $a^+_i = \max\{0, a_i\}$, $a^-_i = \min\{0, a_i\}$, $i \in N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Эти операторы называются также *положительной* и *отрицательной срезками* проектируемого вектора.

На множестве X зададим векторный критерий

$$f(x, A, b) = \big(f_1(x, A_1, b_1), f_2(x, A_2, b_2), \dots, f_m(x, A_m, b_m)\big) \to \min_{x \in X},$$

частными критериями которого являются проекции линейных функций $A_i x + b_i$ на $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$, т. е.

$$f_i(x, A_i, b_i) = \begin{cases} [A_i x + b_i]^+, & \text{если } i \in I_1, \\ [A_i x + b_i]^-, & \text{если } i \in I_2, \end{cases}$$

где $I_1 \cup I_2 = N_m$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Таким образом, вектор-функция $f(x, A, b)$ является проекцией m-мерного вектора, состоящего из линейных функций $A_i x + b_i$, $i \in N_m$, на один из 2^m ортантов критериального пространства $\mathbb{R}^m$, задаваемого множествами I_1 и I_2.

Отметим, что операции проектирования на простейшие выпуклые множества (ортант, гиперплоскость, полупространство, линейное многообразие и другие) лежат в основе различных вариантов фейеровских итерационных методов, используемых для численного анализа несовместных систем линейных неравенств и несобственных задач линейного программирования [1, 15].

Под *векторной* (m-критериальной) *задачей булева программирования* $Z^m(A, b)$, $m \geqslant 1$, будем понимать задачу нахождения *множества эффективных решений* (*множества Парето*)

$$P^m(A, b) = \{x \in X \mid \ P^m(x, A, b) = \varnothing\},$$

где

$$P^m(x, A, b) = \{x' \in X \mid \ g(x, x', A, b) \leqslant 0_{(m)} \quad \text{и} \quad g(x, x', A, b) \neq 0_{(m)}\},$$
$$g(x, x', A, b) = (g_1, g_2, \ldots, g_m),$$
$$g_i = g_i(x, x', A_i, b_i) = f_i(x', A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i), \ i \in N_m,$$
$$0_{(m)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

В силу неравенства $|X| < \infty$ множество $P^m(A, b)$ непусто при любых $A \in \mathbb{R}^{mn}$ и $b \in \mathbb{R}^m$.

Если $I_1 = N_m$, то очевидно, что минимизация вектора $[Ax + b]^+$ на множестве X равносильна минимизации невязок (уклонений) следующей системы линейных булевых неравенств

$$Ax + b \leqslant 0_{(m)}, \ x \in X. \tag{1}$$

Поэтому задача $Z^m(A, b)$ является задачей отыскания множества всех решений системы (1) при условии, что эта система совместна. В противном случае множество Парето $P^m(A, b)$ можно считать множеством квазирешений системы (1). Нетрудно видеть, что система неравенств (1) совместна тогда и только тогда, когда *множество эффективных векторных оценок*

$$f(P^m(A, b)) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \ y = f(x, A, b), \ x \in P^m(A, b)\}$$

состоит лишь из нулевого вектора $0_{(m)}$.

В случае, когда $I_2 = N_m$, очевидно следующее утверждение: система строгих неравенств $Ax+b < 0_{(m)}$, $x \in X$, совместна тогда и только тогда, когда среди элементов множества $f(P^m(A,b))$ существует хотя бы одна оценка, принадлежащая множеству

$$\mathbb{R}^m_{<0} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \ y_i < 0, \quad i \in N_m\}.$$

Для каждого натурального числа k в k-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^k$ зададим метрику l_1, т. е. под нормой вектора $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ будем понимать число $||z|| = \sum\limits_{i \in N_k} |z_i|$, а под нормой $||A||$ матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$ — норму вектора $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn-1}, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\Omega(\varepsilon)$ — множество таких пар (A', b'), что $A' \in \mathbb{R}^{mn}$, $b' \in \mathbb{R}^m$ и $||A'|| + ||b'|| < \varepsilon$. Далее пару $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ будем называть *возмущающей*, а множество $\{(A + A', b + b') \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \mid (A', b') \in \Omega(\varepsilon)\}$ будем интерпретировать как окрестность (ε-окрестность) точки (A, b) в пространстве $\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$.

Следуя [9, 11, 12], *радиусом устойчивости* эффективного решения $x \in P^m(A, b)$ назовем число

$$\rho^m(x, A, b) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid \quad x \in P^m(A + A', b + b'), \text{ где } (A', b') \in \Omega(\varepsilon)\}$.
Таким образом, радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи в пространстве $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ параметров векторного критерия с метрикой l_1, которые сохраняют эффективность решения.

В дальнейшем для доказательства утверждений нам понадобится ряд свойств, большинство из которых непосредственно вытекает из приведенных здесь определений и обозначений.

Для двух различных решений x и x' положим

$$N(x, x') = \{j \in N(x) | x'_j = 0\}, \quad N(x) = \{j \in N_n | x_j = 1\}.$$

Свойство 1. *Для любой пары (x, x'), $x \neq x'$, хотя бы одно из множеств $N(x, x')$ или $N(x', x)$ непусто.*

Отсюда следует

Свойство 2. *Если $N(x, x') = \varnothing$, то при любом $i \in N_m$ верно равенство* $\sum\limits_{j \in N(x', x)} |a_{ij}| + \sum\limits_{j \in N(x)} |a_{ij}| = \sum\limits_{j \in N(x')} |a_{ij}|$.

Свойство 3. *Если $N(x,x')=\varnothing$, то при любом $i\in N_m$ выполняется неравенство* $[A_ix-A_ix']^+ + A_ix \leqslant ||A_i||$.

Действительно, с учётом свойства 2 имеем

$$[A_ix-A_ix']^+ + A_ix \leqslant |A_ix-A_ix'| + A_ix = \Big|\sum_{j\in N(x',x)} a_{ij}\Big| + \sum_{j\in N(x)} a_{ij}$$
$$\leqslant \sum_{j\in N(x',x)} |a_{ij}| + \sum_{j\in N(x)} |a_{ij}| = \sum_{j\in N(x')} |a_{ij}| \leqslant ||A_i||.$$

Следующие соотношения очевидны при любых числах $c,d\in\mathbb{R}$:

$$c^+ + [-c]^- = 0, \tag{2}$$
$$-|c|-|d| \leqslant c^- + d^- \leqslant [c+d]^- \leqslant c^+ + d^- \leqslant [c+d]^+$$
$$\leqslant c^+ + d^+ \leqslant |c|+|d|, \tag{3}$$
$$c^+ + c^- = c. \tag{4}$$

Для любых различных решений $x,x'\in X$ и любого $i\in N_m$ введём следующие обозначения:

$$\alpha(x,x',A,b)=\sum_{i\in N_m} g_i^+(x,x',A_i,b_i), \quad \beta(x,x',A,b)=\min_{i\in N_m} h_i(x,x',A_i,b_i),$$

$$h_i(x,x',A_i,b_i)=\begin{cases} -\widehat{f}_i(x,A_i,b_i), & \text{если } N(x,x')\neq\varnothing,\ i\in I_1,\\ -\widehat{f}_i(x,A_i,b_i)+\widehat{g}_i^+(x,x',A_i,b_i), & \text{если } N(x,x')=\varnothing,\ i\in I_1,\\ \widehat{f}_i(x',A_i,b_i), & \text{если } N(x',x)\neq\varnothing,\ i\in I_2,\\ \widehat{f}_i(x',A_i,b_i)+\widehat{g}_i^+(x',x,A_i,b_i), & \text{если } N(x',x)=\varnothing,\ i\in I_2,\end{cases}$$

$$\widehat{g}_i(x,x',A_i,b_i)=\widehat{f}_i(x',A_i,b_i)-\widehat{f}_i(x,A_i,b_i),$$

$$\widehat{f}_i(x,A_i,b_i)=\begin{cases} [A_ix+b_i]^-, & \text{если } i\in I_1,\\ [A_ix+b_i]^+, & \text{если } i\in I_2,\end{cases}$$

Замечание 1. Легко убедиться, что величины $\alpha(x,x',\,A,b)$, $\beta(x,x',$ $A,b)$ и $h_i(x,x',A_i,b_i)$ неотрицательны при любых $A\in\mathbb{R}^{mn}$, $b\in\mathbb{R}^m$, $i\in N_m$.

При любом $i\in I_1$ и различных решениях $x,x'\in X$ определим

$$\widehat{h}_i(x,x',A_i,b_i)=\begin{cases} \widehat{f}_i(x',A_i,b_i), & \text{если } N(x',x)\neq\varnothing,\\ \widehat{f}_i(x',A_i,b_i)+\widehat{g}_i^+(x',x,A_i,b_i), & \text{если } N(x',x)=\varnothing.\end{cases}$$

Следующие четыре свойства непосредственно вытекают из определения величин $g_i(x,x',A_i,b_i)$, $\widehat{g}_i(x,x',A_i,b_i)$, $h_i(x,x',A_i,b_i)$ и $\widehat{h}_i(x,x',A_i,b_i)$.

Свойство 4. *Если при некотором* $i \in N_m$ *выполняется неравенство* $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, *то* $A_i x + b_i < 0$ *при* $i \in I_1$ *и* $A_i x + b_i > 0$ *при* $i \in I_2$.

Свойство 5. *Пусть* $x \in X$, $i \in N_m$. *Для любого решения* $x' \neq x$ *справедливо неравенство* $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, *если* $i \in I_1$ *и* $A_i x + b_i < 0$ *или* $i \in I_2$ *и* $A_i x + b_i > 0$.

Свойство 6. *Для любого решения* $x \neq x'$ *и любого* $i \in I_1$ *справедливы равенства*

$$\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i) = g_i(x', x, -A_i, -b_i),$$
$$\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i) = h_i(x', x, -A_i, -b_i).$$

Свойство 7. *Пусть* $i \in I_1$ *и пусть справедливо некоторое утверждение, сформулированное в терминах* $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$ *и* $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$. *Тогда это утверждение верно и для* $i \in I_2$ *при замене* $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$ *на* $g_i(x, x', A_i, b_i)$ *и* $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$ *на* $h_i(x, x', A_i, b_i)$.

Свойство 8. *Для любых* $x,\ x' \in X,\ \ i \in N_m$ *справедливы соотношения*

$$f_i(x, A_i, b_i) + \widehat{f}_i(x, A_i, b_i) = A_i x + b_i, \tag{5}$$
$$f_i(x, A_i, b_i) - \widehat{f}_i(x', A_i, b_i) \leqslant ||A_i|| + |b_i|, \tag{6}$$
$$g_i(x, x', A_i, b_i) \leqslant g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) + ||A'_i|| + |b'_i|. \tag{7}$$

В самом деле, (5) вытекает из (4), а (6) — из (3) и (4). Далее, вновь используя (3), легко выводим неравенства

$$f_i(x, A_i, b_i) + [A'_i x + b'_i]^- \leqslant f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leqslant f_i(x, A_i, b_i) + [A'_i x + b'_i]^+,$$

которые с учётом (6) дают (7):

$$\begin{aligned} g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= f_i(x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) - f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \\ &\geqslant f_i(x', A_i, b_i) + [A'_i x' + b'_i]^- - f_i(x, A_i, b_i) - [A'_i x + b'_i]^+ \\ &\geqslant g_i(x, x', A_i, b_i) - ||A'_i|| - |b'_i|. \end{aligned}$$

Свойство 9. *Если при некотором* $i \in N_m$ *справедливо неравенство*

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leqslant 0, \tag{8}$$

то

$$g_i^+(x, x', A_i, b_i) \leqslant \|A'_i\| + |b'_i|. \tag{9}$$

Действительно, если $g_i(x, x', A_i, b_i) \leqslant 0$, то неравенство (9) очевидно, а если $g_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, то, используя (7) и (8), получаем

$$g_i^+(x, x', A_i, b_i) = g_i(x, x', A_i, b_i)$$
$$\leqslant g_i(x, x', A_i + A_i', b_i + b_i') + ||A_i'|| + |b_i'| \leqslant ||A_i'|| + |b_i'|.$$

2. Леммы

Лемма 1. *Если при некотором* $s \in N_m$ *справедливо неравенство*

$$g_s(x, x', A_s + A_s', b_s + b_s') < 0, \tag{10}$$

то

$$g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) \leqslant \|A_s'\| + |b_s'|. \tag{11}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду (10) верно неравенство $x \neq x'$.

Сначала докажем лемму, предполагая, что $s \in I_1$. Тогда $f_s(x, A_s, b_s) = [A_s x + b_s]^+$.

Если $h_s(x, x', A_s, b_s) = 0$, то неравенство (11) следует из свойства 9. Поэтому, считая (см. замечание 1)

$$h_s(x, x', A_s, b_s) > 0, \tag{12}$$

покажем, что тогда неравенство (11) строгое, т. е.

$$\psi := g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A_s'\| - |b_s'| < 0. \tag{13}$$

Из свойства 4 и неравенства (12) вытекает неравенство $A_s x + b_s < 0$, которое вместе с (10) даёт

$$A_s' x + b_s' > -A_s x - b_s > 0. \tag{14}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$g_s^+(x, x', A_s, b_s) = f_s(x', A_s, b_s). \tag{15}$$

Возможны два случая.

Случай 1. $N(x, x') \neq \varnothing$. Тогда в силу (14) при $s \in I_1$ выполняются равенства

$$h_s(x, x', A_s, b_s) = -\widehat{f}_s(x, A_s, b_s) = -A_s x - b_s.$$

Поэтому, последовательно применяя равенство (15) и неравенства (6) и (14), получаем

$$\begin{aligned}\psi &= g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A'_s\| - |b'_s|\\ &= f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) - \|A'_s\| - |b'_s|\\ &\leqslant f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - f_s(x, A'_s, b'_s)\\ &= f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - (A'_s x + b'_s). \qquad (16)\end{aligned}$$

В тоже время, учитывая (3) и (14), находим

$$\begin{aligned}&f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - (A'_s x + b'_s)\\ &\qquad = [A_s x' + b_s]^+ + [A'_s x' + b'_s]^- - [A_s x + b_s + A'_s x + b'_s]^+\\ &\leqslant f_s(x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) + f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s).\end{aligned}$$

Отсюда и из (10) и (16) приходим к необходимому неравенству

$$\psi \leqslant g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0.$$

Случай 2. $N(x, x') = \varnothing$. Если $\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) = 0$, то доказательство неравенства $\psi < 0$ аналогично доказательству в случае 1, поскольку $h_s(x, x', A_s, b_s) = -\widehat{f}_s(x, A_s, b_s)$ при $s \in I_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) > 0.$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$A_s x' + b_s > A_s x + b_s > -A'_s x - b'_s, \qquad (17)$$

$$h_s(x, x', A_s, b_s) = \widehat{f}_s(x', A_s, b_s) - 2(A_s x + b_s). \qquad (18)$$

Используя свойство 3 и равенства (5) и (15), убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}\psi &= g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A'_s\| - |b'_s|\\ &= f_s(x', A_s, b_s) + \widehat{f}_s(x', A_s, b_s) - 2(A_s x + b_s) - \|A'_s\| - |b'_s|\\ &\leqslant A_s x' + b_s - 2(A_s x + b_s) - [A'_s x - A'_s x']^+ - (A'_s x + b'_s)\\ &< A_s x' + b_s - (A_s x + b_s) - [A'_s x - A'_s x']^+. \qquad (19)\end{aligned}$$

Далее, учитывая (17), сумму $A_s x' + b_s$ можно записать в виде

$$[A_s x' + b_s + A'_s x + b'_s]^+ - A'_s x - b'_s.$$

Отсюда согласно (19) с учётом (2) имеем

$$\psi < [A_s x' + b_s + A'_s x + b'_s]^+ - (A'_s x + b'_s) - (A_s x + b_s) + [A'_s x' - A'_s x]^-.$$

Пользуясь этим неравенством, используя (3), (17) и учитывая (10), получаем

$$\begin{aligned}\psi &< [A_s x' + A'_s x' + b_s + b'_s]^+ - (A_s x + b_s) - (A'_s x + b'_s)\\ &= [A_s x' + A'_s x' + b_s + b'_s]^+ - [A_s x + A'_s x + b_s + b'_s]^+\\ &= f_s(x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) - f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s)\\ &= g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0.\end{aligned}$$

Итак, при $s \in I_1$ лемма 1 доказана.

Теперь покажем, что лемма верна при $s \in I_2$. Пусть при $s \in I_1$ выполняется неравенство $\widehat{g}_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0$. Тогда в силу свойства 6 имеем $g_s(x', x, -A_s - A'_s, -b_s - b'_s) < 0$. Поэтому на основании доказанного (при $s \in I_1$) неравенства (11) получаем

$$g_s^+(x', x, -A_s, -b_s) + h_s(x', x, -A_s, -b_s) \leqslant \| - A'_s\| + | - b'_s|.$$

Отсюда и из свойства 6 следует, что

$$\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) + \widehat{h}_s(x, x', A_s, b_s) \leqslant \|A'_s\| + |b'_s|.$$

Следовательно, на основании свойства 7 лемма верна при $s \in I_2$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма показывает, что в терминах введённых величин $\alpha(x, x', A, b)$ и $\beta(x, x', A, b)$ формулируется условие, при выполнении которого x становится эффективным решением не только исходной задачи $Z^m(A, b)$, но и любой возмущённой в определенной окрестности точки (A, b).

Лемма 2. *Пусть $x \in X$ и существует такое число $\varphi > 0$, что для любого решения $x' \neq x$ выполняется неравенство*

$$\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b) \geqslant \varphi. \tag{20}$$

Тогда для любой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varphi)$ справедливо включение $x \in P^m(A + A', b + b')$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varphi)$, что $x \notin P^m(A + A', b + b')$. Тогда найдётся решение $x^0 \in P^m(x, A + A', b + b')$. Это значит, что выполняются неравенства

$$g_i(x, x^0, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leqslant 0, \qquad i \in N_m;$$

при этом найдётся такой индекс $s \in N_m$, что

$$g_s(x, x^0, A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0.$$

Отсюда в силу свойства 9 при любом $i \in N_m$ имеет место неравенство (9), а по лемме 1 — неравенство (11). Используя полученные неравенства и учитывая включение $(A', b') \in \Omega(\varphi)$, получаем соотношения

$$\begin{aligned}\alpha(x, x^0, A, b) + \beta(x, x^0, A, b) &\leqslant \alpha(x, x^0, A, b) + h_s(x, x^0, A_s, b_s) \\ = \sum_{i \in N_m} g_i^+(x, x^0, A_i, b_i) + h_s(x, x^0, A_s, b_s) &\leqslant \sum_{i \in N_m} (\|A'_i\| + |b'_i|) \\ &= ||A'|| + ||b'|| < \varphi,\end{aligned}$$

которые противоречат условию (20) леммы. Лемма 2 доказана.

Приводимая ниже лемма может быть интерпретивована следующим образом: величины $\beta(x, x', A, b)$ и $g_i^+(x, x', A_i, b_i)$, $i \in N_m$, задают окрестность точки (A, b), вне которой найдётся такая возмущающая пара (A', b'), что решение x не является эффективным в задаче $Z^m(A + A', b + b')$.

Лемма 3. *Пусть x и x' — различные решения задачи $Z^m(A, b)$. Тогда для любого числа $\varepsilon > \sum_{i \in N_m} \xi_i + \eta$, где*

$$\xi_i > g_i^+(x, x', A_i, b_i), \qquad i \in N_m, \tag{21}$$

$$\eta > \beta(x, x', A, b), \tag{22}$$

найдется такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что

$$x \notin P^m(A + A', b + b').$$

Доказательство. Сначала отметим, что любое число ε, определённое условиями леммы 3, положительно. Неравенство (22) перепишем в виде

$$\eta > h_p(x, x', A_p, b_p), \tag{23}$$

где p — индекс, при котором выполняется равенство

$$\beta(x, x', A, b) = h_p(x, x', A_p, b_p).$$

Очевидно, для доказательства леммы 3 достаточно найти такую возмущающую пару $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что $x' \in P^m(x, A + A', b + b')$. Для этого в

свою очередь достаточно построить такую пару $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$, что справедливо неравенство

$$g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) < 0, \tag{24}$$

а для любого индекса $i \in N_m \setminus \{p\}$ — пару $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ с условием

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leqslant 0. \tag{25}$$

Здесь и далее $\Psi(\theta) = \{(C, d) \mid \ C \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R},\ ||C|| + |d| = \theta\}$.

Очевидно, что при таком построении в силу (21) и (22) будет выполняться включение $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, где матрица A' состоит из строк A'_i, $i \in N_m$, а столбец b' — из элементов b'_i, $i \in N_m$.

Иными словами, доказательство леммы 3 будет завершено, если будут доказаны два утверждения:

1) при $i = p$ из (21) и (23) вытекает существование такой пары $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$, что имеет место (24),

2) при каждом $i \in N_m \setminus \{p\}$ из (21) следует существование такой пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$, что справедливо (25).

Сначала справедливость этих утверждений докажем в преположении, что $i \in I_1$. Возможны следующие четыре случая.

Случай 1. $i = p$, $N(x, x') \neq \varnothing$. Зафиксировав индекс $q \in N(x, x')$, элементы пары (A'_p, b'_p) зададим в виде $a'_{pj} = \xi_p + \eta$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_p = 0$ и докажем справедливость неравенства (24). Легко видеть, что $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$. В силу строения пары (A'_p, b'_p) справедливы равенства

$$A'_p x + b'_p = \xi_p + \eta, \qquad A'_p x' + b'_p = 0. \tag{26}$$

Из (5), (21) и (23) следует, что

$$\xi_p + \eta > g_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) \geqslant f_p(x', A_p, b_p) - f_p(x, A_p, b_p) \\ - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) = f_p(x', A_p, b_p) - (A_p x + b_p).$$

Поэтому $\xi_p + \eta + A_p x + b_p > f_p(x', A_p, b_p) \geqslant 0$. Отсюда с учётом (26) получаем необходимое неравенство

$$g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) = f_p(x', A_p, b_p) - [A_p x + b_p + \xi_p + \eta]^+ \\ = f_p(x', A_p, b_p) - A_p x - b_p - \xi_p - \eta < 0.$$

Случай 2. $i = p$, $N(x, x') = \varnothing$. Тогда согласно свойству 1 множество $N(x', x)$ не пусто. Зафиксировав индекс $q \in N(x', x)$, элементы пары

$(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$ зададим виде $a'_{pj} = -\xi_p - \eta'$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_p = \eta''$, где η' и η'' — положительные числа, определяемые из условий

$$\eta' = \widehat{g}_p^+(x, x', A_p, b_p) + \delta, \quad \eta'' = -\widehat{f}_p(x, A_p, b_p) + \delta, \quad \delta > 0, \quad \eta' + \eta'' = \eta.$$

Нетрудно видеть, что с учётом (23) и определения величины $h_p(x, x', A_p, b_p)$ числа η' и η'' определены корректно.

Докажем справедливость (24). Принимая во внимание строение пары (A'_p, b'_p), получаем

$$A'_p x + b'_p = \eta'', \qquad A'_p x' + b'_p = -\xi_p - \eta' + \eta''.$$

Поэтому, учитывая определение величин η', η'' и применяя последовательно неравенство (21) и трижды равенство (5), имеем

$$\begin{aligned} g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) &= [A_p x' + b_p - \xi_p - \eta' + \eta'']^+ - [A_p x + b_p + \eta'']^+ \\ &\leqslant \big[A_p x' + b_p - g_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{g}_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)\big]^+ \\ &-\big[A_p x + b_p - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) + \delta\big]^+ \leqslant \big[A_p x' + b_p - g_p(x, x', A_p, b_p) - \widehat{g}_p(x, x', A_p, b_p) \\ &- \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)\big]^+ - \big[f_p(x, A_p, b_p) + \delta\big]^+ < \big[A_p x + b_p - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)\big]^+ \\ &- f_p^+(x, A_p, b_p) = 0. \end{aligned}$$

Случай 3. $i \in N_m \setminus \{p\}$, $N(x, x') \neq \varnothing$. Тогда, фиксируя индекс $q \in N(x, x')$, определим элементы пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } j = q,\ A_i x + b_i \geqslant 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b'_i = \begin{cases} -\xi_i, & \text{если } A_i x + b_i < 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Убедимся в справедливости неравенства (25). Рассмотрим два случая.

Случай 3.1. $A_i x + b_i \geqslant 0$. Тогда с учётом строения пары (A'_i, b'_i) имеем

$$A'_i x + b'_i = \xi_i, \qquad A'_i x' + b'_i = 0.$$

Поэтому с использованием неравенства (21) находим

$$\begin{aligned} g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= f_i(x', A_i, b_i) - [A_i x + b_i + \xi_i]^+ \\ &= f_i(x', A_i, b_i) - (A_i x + b_i) - \xi_i \\ &< f_i(x', A_i, b_i) - (A_i x + b_i) - g_i^+(x, x', A_i, b_i) \\ &= f_i(x', A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i) - g_i^+(x, x', A_i, b_i) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Случай 3.2. $A_i x + b_i < 0$. Тогда из структуры пары (A'_i, b'_i) и неравенства (21) следует, что

$$A'_i x + b'_i = -\xi_i < -f_i(x', A_i, b_i).$$

Поэтому имеем

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leqslant [A_i x' + b_i - \xi_i]^+ \leqslant [A_i x' + b_i - f_i(x', A_i, b_i)]^+ = 0.$$

Случай 4. $i \in N_m \setminus \{p\}$, $N(x, x') = \varnothing$. Тогда в силу свойства 1 множество $N(x', x)$ не пусто. Зафиксировав индекс $q \in N(x', x)$, элементы пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ определим виде $a'_{pj} = -\xi_i$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_i = 0$ и покажем справедливость (25).

Ввиду структуры пары (A'_i, b'_i) справедливы равенства

$$A'_i x + b'_i = 0, \qquad A'_i x' + b'_i = -\xi_i.$$

Пользуясь этим равенством и (21), находим

$$\begin{aligned} g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= [A_i x' + b_i - \xi_i]^+ - f_i(x, A_i, b_i) \\ &\leqslant \left[A_i x' + b_i - g_i^+(x, x', A_i, b_i)\right]^+ - f_i(x, A_i, b_i) \\ &\leqslant f_i^+(x, A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i) = 0. \end{aligned}$$

Итак показано, что при любом индексе $i \in I_1$ верны сформулированные выше два утверждения. Далее по аналогии с доказательством леммы 1 нетрудно убедиться в том, что оба утверждения, доказанные для $i \in I_1$, остаются в силе при замене величин $g_i(x, x', A_i, b_i)$, $g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i)$ и $h_i(x, x', A_i, b_i)$ соответственно на величины $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$, $\widehat{g}_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i)$ и $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$. Поэтому согласно свойству 7 эти утверждения справедливы при $i \in I_2$. Лемма 3 доказана.

3. Основной результат

Теорема. *При любом $m \geqslant 1$ для радиуса устойчивости $\rho^m(x, A, b)$ эффективного решения $x \in P^m(A, b)$ задачи $Z^m(A, b)$ справедлива формула*

$$\rho^m(x, A, b) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \big(\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b)\big). \tag{27}$$

Доказательство. В силу замечания 1 правая часть формулы (27), которую в дальнейшем для краткости будем обозначать через φ, неотрицательна.

Сначала докажем неравенство $\rho^m(x, A, b) \geqslant \varphi$. Не уменьшая общности, считаем, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство $\rho^m(x, A, b) \geqslant \varphi$ очевидно). В соответствии с определением числа φ для любого решения $x' \neq x$ имеем

$$\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b) \geqslant \varphi > 0.$$

Поэтому на основании леммы 2 решение $x \in P^m(A + A', b + b')$ при любой возмущающей паре $(A', b') \in \Omega(\varphi)$. Следовательно, $\rho^m(x, A, b) \geqslant \varphi$.

Остаётся показать, что $\rho^m(x, A, b) \leqslant \varphi$. Пусть $\varepsilon > \varphi$ и решение $x^* \neq x$ таково, что

$$\alpha(x, x^*, A, b) + \beta(x, x^*, A, b) = \varphi.$$

Тогда легко видеть, что существуют такие положительные числа

$$\xi_i > g_i^+(x, x^*, A_i, b_i),\ i \in N_m, \quad \eta > \beta(x, x^*, A, b),$$

что $\varepsilon > \sum\limits_{i \in N_m} \xi_i + \eta > \varphi$. Поэтому по лемме 3 найдётся такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что $x \notin P^m(A + A', b + b')$. Итак доказано, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho^m(x, A, b) < \varepsilon$. Поэтому $\rho^m(x, A, b) \leqslant \varphi$. Теорема доказана.

4. Следствия

Эффективное решение x из $P^m(A, b)$ назовём *устойчивым*, если $\rho^m(x, A, b) > 0$.

Следствие 1. *При любом $m \geqslant 1$ эффективное решение x^0 из $P^m(A, b)$ устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий*:

(i) x^0 *— решение системы строгих неравенств*

$$\begin{cases} A_i x + b_i < 0 & \text{при } \ i \in I_1, \\ A_i x + b_i > 0 & \text{при } \ i \in I_2, \end{cases}$$

(ii) *для любого решения $x \in X \setminus \{x^0\}$ существует хотя бы один такой индекс $s \in N_m$, что справедливо неравенство*

$$g_s(x^0, x, A_s, b_s) > 0.$$

Действительно, для любого решения $x \neq x^0$ справедливы утверждения:

1) $\alpha(x^0, x, A, b) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (ii);

2) $\beta(x^0, x, A, b) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (i) (ввиду свойств 4 и 5).

Поэтому из теоремы вытекает следствие 1. По аналогии с [4, 12–14] задачу $Z^m(A, b)$ назовём *квазиустойчивой*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для каждой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо включение

$$P^m(A, b) \subseteq P^m(A + A', b + b').$$

Таким образом, квазиустойчивость задачи $Z^m(A, b)$ является свойством сохранения эффективности решений в «малой» окрестности точки (A, b), т. е. является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного (точечно-множественного) отображения, задающего паретовскую функцию выбора. Иначе говоря, задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива, тогда и только тогда, когда каждое решение из множества Парето $P^m(A, b)$ устойчиво.

Известно (см., например, [3, 13, 19]), что в случае, когда все частные критерии линейны, векторная задача на конечном множестве решений квазиустойчива тогда и только тогда, когда множество Парето совпадает с *множеством Смейла* (*множеством строго эффективных решений*), которое, являясь подмножеством множества Парето, определяется следующим образом:

$$S^m(A, b) = \{x \in X \mid S^m(x, A, b) = \varnothing\},$$

где $S^m(x, A, b) = \{x' \in X \backslash \{x\} \mid \quad g(x, x', A, b) \leqslant 0_{(m)}\}$.

Поскольку всякое решение $x \in S^m(A, b)$ удовлетворяет условию (ii), то из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *При любом $m \geqslant 1$ задача $Z^m(A,\ b)$ квазиустойчива, если $P^m(A, b) = S^m(A, b)$.*

Следующий пример показывает, что равенство $P^m(A, b) = S^m(A, b)$, вообще говоря, не является необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^m(A, b)$.

Пример. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $I_1 = N_2$, $X = \{x', x'', x'''\}$, $x' = (1, 0, 0)^T$, $x'' = (0, 1, 0)^T$, $x''' = (0, 1, 1)^T$, $b = (0, 0)^T$ и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $[Ax' + b]^+ = (2,1)^T$, $[Ax'' + b]^+ = [Ax''' + b]^+ = (0,0)^T$. Поэтому $P^2(A,b) = Q^2(A,b) = \{x'', x'''\} \neq S^2(A,b) = \varnothing$, но задача $Z^2(A,b)$ квазиустойчива, поскольку в силу теоремы $\rho^2(x'', A, b) = 1 > 0$ и $\rho^2(x''', A, b) = 2 > 0$.

Обозначим через $Q^m(A,b)$ множество таких решений x из X, что выполняется хотя бы одно из условий (i) или (ii). Тогда, воспользовавшись следствием 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *При любом* $m \geqslant 1$ *задача* $Z^m(A,b)$ *квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$P^m(A,b) = Q^m(A,b).$$

Ослабляя требование сохранения всего множества Парето, приходим к понятию *сильной квазиустойчивости* задачи $Z^m(A,b)$ [13]. Этот тип устойчивости трактуется как существование таких $\varepsilon > 0$ и $x^0 \in P^m(A,b)$, что для всякой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется включение $x^0 \in P^m(A + A', b + b')$. Для этого вида устойчивости в силу следствия 1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. *Для того чтобы задача* $Z^m(A,b)$, $m \geqslant 1$, *была сильно квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы множество* $Q^m(A,b)$ *было непусто.*

В скалярном случае $(m = 1)$ множество $P^1(A,b)$ $(A \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R})$ является множеством оптимальных решений задачи $Z^1(A,b)$. Поэтому однокритериальными аналогами следствий 3 и 4 являются следующие два утверждения.

Следствие 5. *Скалярная задача* $Z^1(A,b)$ *квазиустойчива тогда и только тогда, когда либо оптимальное решение единственно, либо для каждого оптимального решения* $x \in P^1(A,b)$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} Ax + b < 0 \quad &\text{при} \quad I_1 = \{1\}, \\ Ax + b > 0 \quad &\text{при} \quad I_2 = \{1\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Следствие 6. *Скалярная задача* $Z^1(A,b)$ *сильно квазиустойчива тогда и только тогда, когда либо оптимальное решение единственно, либо существует хотя бы одно такое решение* x^0, *что выполняются неравенства* (28).

Замечание 2. Ясно, что вид формулы (27) существенно зависит от выбранной метрики l_1 в пространстве $\mathbb{R}^{m(n+1)}$. Однако следствия 1–6 теоремы верны при любой метрике.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бердникова Е. А., Еремин И. И., Попов Л. Д.** Распределённые фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32.
2. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** Конечные коалиционные игры: параметризация принципа оптимальности («от Парето до Нэша») и устойчивость обобщённо-эффективных ситуаций // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 6. С. 36–38.
3. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** Параметризация принципа оптимальности («от Парето до Слейтера») и устойчивость многокритериальных траекторных задач // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 2. С. 3–18.
4. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** О квазиустойчивости векторной траекторной задачи с параметрическим принципом оптимальности // Изв. вузов. Математика. 2004. № 1. С. 25–30.
5. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 155–166.
6. **Гордеев Э. Н.** Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. 2001. № 2. С. 132–144.
7. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 27–32.
8. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** Формула радиуса устойчивости векторной l_∞-экстремальной траекторной задачи // Дискретная математика. 2004. Т. 16, вып. 1. С. 14–20.
9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Устойчивость эффективного решения векторной комбинаторной задачи в метрике l_1 // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 5. С. 25–28.
10. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи булева программирования с частными критериями, являющимися проекциями линейных функций на $\mathbb{R}_+$ // Российская конференция «Дискрет. анализ и исслед. операций»: Материалы конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН. 2004. С. 140.
11. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1 // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 6. С. 733–735.
12. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.

13. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
14. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** О квазиустойчивости векторной траекторной задачи мажоритарной оптимизации // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 1. С. 34–42.
15. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
16. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 48–54.
17. **Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 1. С. 63–70.
18. **Леонтьев В. К.** Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1309.
19. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.
20. **Chakravarti N., Wagelmans A. P. M.** Calculation of stability radii for combinatorial optimization problems // Oper. Res. Lett. 1998. V. 23, N 1. P. 1–7.
21. **Devyaterikova M. V., Kolokolov A. A.** Analysis of L-structure stability of convex integer programming problems // Operations Research Proceedings, Springer. 2000. P. 49–54.
22. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, N 4. P. 645–676.
23. **Emelichev V. A., Krichko V. N., Nikulin Yu. V.** The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem // Control and Cybernetics. 2004. V. 33, N 1. P. 127–132.
24. **Greenberg N. J.** An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 97–148.
25. **Libura M.** On accuracy of solution for discrete optimization problems with perturbed coefficients of the objective function // Ann. Oper. Res. 1999. V. 86. P. 53–62.
26. **Libura M., van der Poort E. S., Sierksma G., van der Veen J. A.** Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions // Discrete Appl. Math. 1998. V. 87, N 1–3. P. 159–185.

27. **Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.

Адрес авторов:

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4,
220113, Минск, Беларусь.
E–mail: emelichev@bsu.by,
kuzminkg@mail.ru

Статья поступила
11 октября 2004 г.

Переработанный вариант —
8 сентября 2005 г.