ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2005. Серия 2. Том 12, № 2, 72–84

УДК 519.854

О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

А. Ю. Чирков, В. Н. Шевченко, Н. Ю. Золотых

Рассматривается связь между многокритериальной задачей линейного и многокритериальной задачей целочисленного линейного программирования. Ряд результатов о полиномиальной разрешимости некоторых подклассов задачи целочисленного линейного программирования распространяется на многокритериальный случай.

Введение

Дискретным многокритериальным задачам посвящен целый ряд исследований (см. библиографию, например, в обзоре [2]). В настоящей статье рассматривается связь между многокритериальными задачей линейного программирования и задачей целочисленного линейного программирования. Доказываются теоремы о близости решений этих задач. Ряд результатов о полиномиальной разрешимости некоторых подклассов задачи целочисленного линейного пограммирования распространяется на многокритериальный случай.

Обозначим через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ множества целых и действительных чисел соответственно. Для числового множества T определим: T^n — множество n-мерных векторов (точек) с компонентами из T, $T^{m\times n}$ — множество матриц размера $m \times n$ с элементами из T. Для двух векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ из T^n под неравенством $a \geqslant b$ будем понимать n неравенств $a_i \geqslant b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Выпуклую оболочку множества точек $S \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{Conv} S$.

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $D \in \mathbb{Z}^{k\times n}$, $m \geqslant n$ и ранг матрицы A равен n. Определим множества: конус $C(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av \geqslant 0\}$, подпространство $L(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$, полиэдр $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b,\}$ и $M(A, b) = P(A, b) \cap \mathbb{Z}^n$. Задача нахождения

$$\max_{x\in P(A,b)} Dx \tag{1}$$

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00552a).

называется *многокритериальной задачей линейного программирования* (МКЗЛП), а задача нахождения

$$\max_{x \in M(A,b)} Dx \tag{2}$$

называется *многокритериальной задачей целочисленного линейного программирования* (МКЗЦЛП). Точка $x_0 \in P(A,b)$ называется *оптимальной по Парето* (или просто *паретовской*) для МКЗЛП (МКЗЦЛП), если для любой другой точки $x \in P(A,b)$ либо $Dx = Dx_0$, либо найдется $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $d_i x_0 > d_i x$, где d_i — i-я строка матрицы D.

Паретовские точки называют также эффективными [9]. Детальный анализ МКЗЛП проведен в [1].

Обозначим через $P(A,b,D)$ множество паретовских точек МКЗЛП, через $P'(A,b,D)$ множество непаретовских точек МКЗЛП:

$$P'(A,b,D) = P(A,b) \setminus P(A,b,D).$$

Аналогично, для МКЗЦЛП определим множества: $M(A,b,D)$ — множество паретовских точек МКЗЦЛП, $M'(A,b,D)$ — множество непаретовских точек МКЗЦЛП: $M'(A,b,D) = M(A,b) \setminus M(A,b,D)$.

Ниже будут рассмотрены задачи:

G_1: Определить, является ли данная точка $y \in M(A,b)$ паретовской, и если $y \notin M(A,b,D)$, то найти $z \in M(A,b,D)$ такую, что $Dz \geqslant Dy$;

G_2: Определить, верно ли, что $M(A,b,D) = \varnothing$;

G_3: Определить, верно ли, что $M(A,b) = M(A,b,D)$;

G_4: Определить, верно ли, что $|M(A,b,D)| = 1$, и при положительном ответе найти $x \in M(A,b,D)$.

G_5: Описать $M(A,b,D)$ или $M'(A,b,D)$, а именно: найти совокупность систем линейных неравенств, множество целочисленных решений которой совпадает с $M(A,b,D)$ или $M'(A,b,D)$.

Ясно, что задачи G_1–G_4 являются NP-трудными, так как NP-трудны уже их однокритериальные аналоги.

При фиксированной размерности n для решения задач G_1–G_4 будут предложены полиномиальные от длины входа алгоритмы (теорема 7). Для задачи G_5 при некоторых дополнительных ограничениях (например, элементы матрицы A неотрицательные числа, а D — единичная матрица) будет получено описание $M(A,b,D)$ (раздел 2).

Кроме алгоритмических вопросов в статье рассматривается вопрос о близости паретовских точек задачи (1) и задачи (2). Введем обозначения: $|b|_\infty$ — максимум абсолютных величин компонент вектора b, Δ_1 —

максимум абсолютных величин миноров матрицы $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$, а Δ_2 — максимум абсолютных величин миноров n-го порядка этой матрицы. Результаты о близости можно сформулировать следующим образом. Пусть $x \in M(A, b, D)$. Для любой точки $y \in P(A, b, D)$ такой, что $Dy \geqslant Dx$, справедливы неравенства $|A(y - x)|_\infty \leqslant n\Delta_2$ и $|D(y - x)|_\infty \leqslant n\Delta_2$, $|y - x|_\infty \leqslant n\Delta_1$ (теорема 5). Пусть $M(A, b) \neq \varnothing$. Для любой точки $y \in P(A, b, D)$ найдётся точка $x \in M(A, b, D)$ такая, что $|A(y - x)|_\infty \leqslant n\Delta_2$, $|D(y - x)|_\infty \leqslant n\Delta_2$, $|y - x| \leqslant n\Delta_1$ (теорема 6).

Некоторые из этих результатов была анонсированы в [3, 8].

1. Общие свойства

Определение паретовской точки можно переформулировать следующим образом.

Свойство 1. *Точка x_0 является паретовской в МКЗЛП тогда и только тогда, когда $P(A, b) \cap (x_0 + C(D)) \subseteq x_0 + L(D)$.*

Действительно, если найдется точка y из $P(A, b) \cap (x_0 + C(D))$, не принадлежащая множеству $x_0 + L(D)$, то $Dy \geqslant Dx_0$ и $Dy \neq Dx_0$. Таким образом, нашлась такая точка $y \in P(A, b)$, что $Dy \geqslant Dx_0$ и $Dy \neq Dx_0$. Это противоречит тому, что x_0 — паретовская. Обратно, если x_0 не паретовская точка, то найдется $y \in P(A, b)$, что $Dy \geqslant Dx_0$ и $Dy \neq Dx_0$. Следовательно, множество $P(A, b) \cap (x_0 + C(D))$ содержит точку y, не принадлежащую множеству $x_0 + L(D)$.

Аналогично доказывается следующее

Свойство 2. *Точка x_0 является паретовской в* МКЗЦЛП *тогда и только тогда, когда $M(A, b) \cap (x_0 + C(D)) \subseteq x_0 + L(D)$.*

Приведем анализ структуры паретовских точек МКЗЛП. Если $C(D) \neq L(D)$, то $P(A, b, D)$ является объединением граней полиэдра $P(A, b)$. Действительно, для точки $x_0 \in P(A, b, D)$ размерность пересечения выпуклых множеств $P(A, b)$ и $x_0 + C(D)$ меньше размерности $C(D)$. Следовательно, существует опорная к $P(A, b)$ гиперплоскость $fx = f_0$, отделяющая $x_0 + C(D)$ от $P(A, b)$, т. е. $fx \leqslant f_0$ при всех $x \in P(A, b)$ и $fx \geqslant f_0$ при всех $x \in x_0 + C(D)$. Множество точек, принадлежащих как этой опорной гиперплоскости, так и $P(A, b)$, является гранью полиэдра $P(A, b)$. Обозначим эту грань через H. Пусть y — произвольная точка грани H. Опорная гиперплоскость $fx = f_0$ отделяет $y + C(D)$ от $P(A, b)$. Следовательно, $y = P(A, b) \cap (y + C(D))$, т. е. точка y — паретовская. Тем самым установлено, что все точки грани H — паретовские.

Обратно, если точка x_0 принадлежит грани $P(A, b)$ и через неё можно провести опорную плоскость, отделяющую $P(A, b)$ от $x_0 + C(D)$, то $x_0 \in P(A, b, D)$. Отметим, что нормаль опорной гиперплоскости, отделяющей $x_0 + C(D)$ от $P(A, b)$, является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами строк матрицы D. Линейную комбинацию строк матрицы D с неотрицательными коэффициентами называют *линейной свёрткой*. Мы получили известный результат (см., например, [1]), что множество $P(A, b, D)$ есть объединение граней полиэдра $P(A, b)$, и все точки из $P(A, b, D)$ могут быть получены в результате решения однокритериальных задач линейного программирования $\max\limits_{x \in P(A,b)} dx$, когда d пробегает всё множество линейных свёрток D. Оформим это в виде следующего утверждения.

Свойство 3. *Точка x_0 является паретовской в* МКЗЛП *тогда и только тогда, когда существует $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \geqslant 0$, такое, что $x_0 \in P(A, b, \lambda D)$.*

Для многокритериальных задач целочисленного линейного программирования и для нелинейных задач этот результат не имеет места. Пример нелинейной задачи, не обладающей свойством 3, имеется в [9]. Приведем пример МКЗЦЛП без этого свойства.

Рассмотрим задачу (2), в которой

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом примере $M(A, b, D) = M(A, b)$. Действительно, точка x из $M(A, b)$ не принадлежит $M(A, b, D)$ только тогда, когда найдётся такой вектор h из $\mathbb{Z}^2$, что $Dh \geqslant 0$ и $x + h \in M(A, b)$. Множество решений системы неравенств $Dh \geqslant 0$ из $\mathbb{Z}^2$ можно представить в виде $h = t_1 \cdot (4, 3)^\top + t_2 \cdot (5, 4)^\top$, где t_1 и t_2 — неотрицательные целые числа. Условие $x + h \in M(A, b)$ равносильно совместности неравенства $2x_1 + 3x_2 + 14t_1 + 22t_2 \leqslant 12$ в неотрицательных целых числах. Поскольку в любом решении $t_1 = t_2 = 0$, $M(A, b) = M(A, b, D)$. Вершинами выпуклой оболочки точек из $M(A, b)$ являются точки $(0, 0)^\top$, $(6, 0)^\top$, $(0, 4)^\top$. Точка $(1, 1)^\top$ лежит внутри выпуклой оболочки точек из $M(A, b)$ и, значит, не может быть получена как решение задачи целочисленного линейного программирования $\max\limits_{x \in M} dx$ при любом d. С другой стороны, точка $(1, 1)^\top$ является оптимальной по Парето. Таким образом, в общем случае оптимальные по Парето точки в МКЗЦЛП не могут быть получены как решения задачи целочисленного линейного программирования с критерием, полученным линейной свёрткой.

Легко видеть, что выбором матрицы критериев D всегда можно добиться того, чтобы любая точка x_0 из $M(A,b)$ была оптимальна по Парето в МКЗЦЛП. Для этого достаточно выбрать D так, чтобы множество $(x_0 + C(D)) \cap M(A,b)$ состояло из одной точки x_0.

Известно (см., например, [1]), что в МКЗЛП множество $P'(A,b,D)$ точек, не оптимальных по Парето, является выпуклым. Множество $M'(A,b,D)$ в МКЗЦЛП нельзя представить в виде пересечения некоторого полиэдра и $\mathbb{Z}^n$. Приведем пример, в котором $\operatorname{Conv} M'(A,b,D) \cap \mathbb{Z}^n \neq M'(A,b,D)$. Положим

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -9 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $M(A,b) = \{\ (0,0,0)^\top, (1,2,0)^\top, (1,3,0)^\top, (2,3,0)^\top, (1,2,1)^\top, (1,1,2)^\top, (1,0,3)^\top, (1,1,3)^\top\ \}$, $M(A,b,D) = \{\ (2,3,0)^\top, (1,2,1)^\top, (1,1,3)^\top\ \}$. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т. е. в $M(A,b,D)$ есть точка, представимая в виде выпуклой комбинации точек из $M'(A,b,D)$. Следовательно, точка $(1,2,1)^\top$ принадлежит множеству $\operatorname{Conv} M'(A,b,D) \cap \mathbb{Z}^3$ и не принадлежит множеству $M'(A,b,D)$.

Тем не менее, результаты о строении паретовских точек в МКЗЛП можно частично перенести на дискретный случай. Точка x из $M(A,b)$ не является паретовской тогда и только тогда, когда найдется такое $y \in \mathbb{Z}^n$, что $Ax \leqslant b, A(x+y) \leqslant b, Dy \geqslant 0, Dy \neq 0$. Обозначим через T полиэдр $\{(x,y) \mid Ax \leqslant b, A(x+y) \leqslant b, Dy \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n\}$ через T' полиэдр T без грани $\{(x,y) \mid Dy = 0\}$, а через V подпространство $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \in \mathbb{R}^n\}$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Условие $x \in P'(A,b,D)$ равносильно существованию $y \in \mathbb{R}^n$ такого, что $(x,y) \in T'$. Таким образом, имеет место

Свойство 4. *$P'(A,b,D)$ является ортогональной проекцией множества T' на V.*

В дискретном случае аналогично доказывается следующая

Теорема 1. *Множество $M'(A, b, D)$ является ортогональная проекцией множества $T' \cap \mathbb{Z}^{2n}$ на V.*

Если матрица $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$ унимодулярная (т. е. каждый ее минор n-го порядка равен 0, 1 или -1) и имеет полный ранг, то ортогональная проекция множества $T' \cap \mathbb{Z}^{2n}$ на V представима в виде пересечения ортогональной проекции множества T' на V и $\mathbb{Z}^n$, т. е. $M'(A, b, D) = P'(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n$.

Действительно, пусть $x \in P'(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n$. Так как x принадлежит ортогональной проекции T' на V, то найдётся $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(x, y) \in T'$. Полиэдр $\{z \mid Az \leqslant b - Ax, Dz \geqslant 0, z \in \mathbb{R}^n n\}$ не пуст (так как содержит y) и в силу унимодулярности матрицы $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$ содержит такую точку $z \in \mathbb{Z}^n$, что $Dz \neq 0$. Так как $(x, z) \in T' \cap \mathbb{Z}^{2n}$, то $x \in M'(A, b, D)$. Тем самым установлено включение $P'(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n \subseteq M'(A, b, D)$. В силу очевидности обратного включения равенство $M'(A, b, D) = P'(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n$ доказано.

Следствие 1. *Пусть матрица $\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$ унимодулярна и имеет полный ранг. Тогда $M(A, b, D) = P(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n$, $M'(A, b, D) = P'(A, b, D) \cap \mathbb{Z}^n$ и любая паретовская точка* МКЗЦЛП *может быть получена как решение однокритериальной* ЗЦЛП: *найти $\max\limits_{x \in M(A,b)} dx$ при некотором $d \in \mathbb{R}^n n$, являющимся линейной свёрткой строк матрицы D.*

В общем случае строение множества паретовских точек МКЗЦЛП гораздо сложнее. Основная трудность заключается в описании ортогональной проекции множества $T' \cap \mathbb{Z}^{2n}$ на V. В следующем разделе рассматриваются способы получения этого описания.

2. Строение множества паретовских точек МКЗЦЛП

Перейдем к изучению строения множества паретовских точек МКЗЦЛП в общем случае. Убедимся в существовании конечного множества векторов H из $\mathbb{Z}^n$ такого, что точка x_0 из $M(A, b)$ является оптимальной по Парето тогда и только тогда, когда найдётся такой вектор y из H, что $x_0 + y \in M(A, b)$.

Пусть $c \in \mathbb{R}^m$. Под $\operatorname{diag}(c)$ будем понимать диагональную квадратную матрицу порядка m, по диагонали которой расположены компоненты вектора c. Через $K(c)$ обозначим конус

$$K(c) = \{x \mid Dx \geqslant 0,\ \operatorname{diag}(c)Ax \geqslant 0\}.$$

Известно [5], что полугруппа $K(c) \cap \mathbb{Z}^n$ конечно порождена и в случае острого конуса $K(c)$ имеет единственное минимальное порождающее множество $H(c) = \{h_1, \dots, h_s\}$, называемое *гильбертовым базисом*. Положим $H = \bigcup_{c \in \{-1,1\}^m} H(c)$. Справедлива

Теорема 2. *Точка y принадлежит множеству $M(A, b, D)$ тогда и только тогда, когда для любого вектора h из $H/L(D)$ точка $y + h$ не содержится в $M(A, b)$.*

Доказательство. Если $y \in M(A, b, D)$, то для любого $h \in H/L(D)$ точка $y + h$ не принадлежит $M(A, b)$, так как $D(y + h) = Dy + Dh \geqslant Dy$ и $D(y + h) \neq Dy$.

Пусть $y \in M'(A, b, D)$. Тогда найдётся такая точка z из $M(A, b)$, что $Dz \geqslant Dy$ и $Dz \neq Dy$. Возьмём такой вектор c из $\{-1, 1\}^m$, что выполняется неравенство $\operatorname{diag}(c)A(z - y) \geqslant 0$. Тогда $z - y \in K(c)$. Так как $H(c)$ — гильбертов базис, то $z - y$ можно представить в виде линейной комбинации векторов из $H(c)$ с положительными целочисленными коэффициентами: $z - y = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_s h_s$. Поскольку $Dz \neq Dy$, хотя бы один из векторов $h_1, ..., h_s$ не принадлежит $L(D)$. Не нарушая общности, можно считать, что таким вектором является h_1. Покажем, что $y + h_1 \in M(A, b)$. Действительно, при $c_i = -1$ получаем $a_i h_1 \leqslant 0$, где a_i — строка матрицы A. Следовательно, $a_i(y + h_1) \leqslant a_i y \leqslant b_i$. При $c_i = 1$ имеем $\alpha_1 - 1 \geqslant 0$, $a_i h_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, s)$ и, следовательно, $a_i(y + h_1) = a_i(z - (\alpha_1 - 1)h_1 - \alpha_2 h_2 - \dots - \alpha_s h_s) \leqslant a_i z \leqslant b_i$. Таким образом, $y + h_1 \in M(A, b)$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай, когда множество H устроено довольно просто. Допустим, что существует вектор $q \in \{-1, 1\}^m$, такой, что каждая строка матрицы $\operatorname{diag}(q) \cdot A$ является неотрицательной линейной комбинацией строк матрицы D. Для произвольного $c \in \{-1, 1\}^m$ конус $K(c)$ является гранью $C(D)$, либо совпадает с $C(D)$.

Таким образом, в этом случае множество H состоит из векторов гильбертова базиса полугруппы $C(D) \cap \mathbb{Z}^n$. В частном случае, когда D — единичная матрица (т. е. $D \in \mathbb{Z}^{n \times n}, D = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$), имеем $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, где e_i — вектор размерности n, все компоненты которого равны 0, кроме i-й, равной 1. Тем самым установлено

Следствие 2. *Пусть D — единичная матрица, а элементы каждой строки матрицы A имеют один знак. Тогда точка $y \in M(A, b)$ принадлежит множеству $M(A, b, D)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ точка $(y + e_i)$ не принадлежит множеству $M(A, b)$.*

По теореме 2 точка x принадлежит множеству $M'(A, b, D)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая точка h из $H/L(D)$, что $x+h \in M(A,b)$. Другими словами, для того чтобы точка x принадлежала $M'(A,b,D)$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором $h \in H/L(D)$ выполнялись неравенства $Ax \leqslant b, A(x+h) \leqslant b$. Пусть

$$M(h) = \{x \mid Ax \leqslant b,\ Ax \leqslant b - Ah\} \cap \mathbb{Z}^n.$$

Тогда утверждение теоремы 2 эквивалентно равенству

$$M'(A,b,D) = \bigcup_{h \in H/L(D)} M(h).$$

Поскольку $M(A,b,D) = M(A,b)/M'(A,b,D)$, из полученного равенства следует, что $M(A,b,D) = \bigcap\limits_{h \in H/L(D)} (M(A,b)/M(h))$. Положим

$$M_i(h) = \{x \mid a_i x \leqslant \min\{b_i, b_i - a_i h\},\ x \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Представим $M(h)$ в виде $M(h) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i(h)$ и выразим $M(A,b)/M(h)$:

$$M(A,b)/M(h) = M(A,b)/\left(\bigcap_{i=1}^{m}(M_i(h)\right) = \bigcup_{i=1}^{m}(M(A,b)/M_i(h)).$$

Подставив полученное выражение для $M(A,b)/M(h)$ в выражение для $M(A,b,D)$, получаем

$$M(A,b,D) = \bigcap_{h \in H/L(D)} \left(\bigcup_{i=1}^{m} M(A,b)/M_i(h)\right). \tag{3}$$

Пусть число векторов в $H/L(D)$ равно s и $H/L(D) = \{h_1, \ldots, h_s\}$. Тогда, раскрыв пересечение, получим

$$M(A,b,D) = \bigcup_{i_1=1}^{m} \cdots \bigcup_{i_s=1}^{m} (\bigcap_{j=1}^{s} M(A,b)/M_{i_j}(h_j)).$$

Из определения $M_i(h)$ имеем

$$M(A,b)/M_i(h) = M(A,b) \cap \{x \mid a_i x \geqslant 1 + \min\{b_i, b_i - a_i h\}\}.$$

Положим $T_i(h) = \{x \mid a_i x \geqslant 1 + \min\{b_i, b_i - a_i h\}$. Тогда

$$M(A,b)/M_i(h) = M(A,b) \cap T_i(h).$$

Подставив это выражение в (3), получаем

$$M(A,b,D) = \bigcup_{i_1=1}^{m} \cdots \bigcup_{i_s=1}^{m} (M(A,b) \cap (\bigcap_{j=1}^{s} T_{i_j}(h_j)). \tag{4}$$

Данное представление множества паретовских точек МКЗЦЛП явно избыточно. Действительно, пересечение множеств $T_i(h_1) \cap T_i(h_2)$ совпадает либо с $T_i(h_1)$, либо с $T_i(h_2)$. Тем не менее, данное представление в некоторых частных случаях позволяет получать интересные результаты.

Пусть D — единичная матрица, а элементы каждой строки матрицы A имеют один знак. В этом случае множество H состоит из векторов $e_1, \ldots, e_n$, а $T_i(e_j) = \{x \mid a_i x \geqslant 1 + \min\{b_i, b_i - a_{ij}\}\}$. Легко проверить, что $M(A,b)/T_i(e_j)$ не пусто тогда и только тогда, когда $a_{ij} > 0$. Далее, если $a_{ik} > a_{ij} \geqslant 0$, то $T_i(e_j) \subset T_i(e_k)$. Обозначим через I множество номеров строк матрицы A с положительными элементами. Тогда формула (4) примет вид

$$M(A,b,D) = \bigcup_{i_1 \in I} \cdots \bigcup_{i_n \in I} (M(A,b) \cap (\bigcap_{j=1}^{n} T_{i_j}(e_j)).$$

Формула примет ещё более простой вид, если $|I| = 1$. Действительно, пусть $I = \{i\}$. Тогда $M(A,b,D) = M(A,b) \cap (\bigcap\limits_{j=1}^{n} T_i(e_j))$. Обозначим через k номер минимального элемента в i-й строке. Тогда $\bigcap\limits_{j=1}^{n} T_i(e_j) = T_i(e_k)$ и $M(A,b,D) = M(A,b) \cap T_i(e_k)$.

В частности, для задачи о рюкзаке получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть D — единичная матрица и $A = \begin{pmatrix} a \\ -D \end{pmatrix}$, где $a \geqslant 0$, $b = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда*

$$M(A,b,D) = M(A,b) \cap \{x \mid ax \geqslant 1 + \beta - \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\}.$$

3. Теоремы о близости

В этом разделе рассмотрим вопрос о близости паретовских точек МКЗЛП и МКЗЦЛП. Аналогичные результаты о близости решений задач линейного программирования и целочисленного линейного программирования получены в [4].

Первый результат для произвольной точки $x \in M'(A,b,D)$ позволяет указать границы окрестности, в которой найдётся сертификат $y \in M(A,b)$, подтверждающий, что точка x — не паретовская, т. е. $Dy \geqslant Dx$, $Dy \neq Dx$.

Теорема 4. *Если $x \in M'(A,b,D)$, то имеется такая точка y из $M(A,b)$, что $Dy \geqslant Dx$, $Dy \neq Dx$ и*

$$|A(y-x)|_\infty \leqslant (n-1)\Delta_2,\ |D(y-x)|_\infty \leqslant (n-1)\Delta_2,\ |x-y|_\infty \leqslant (n-1)\Delta_1.$$

Доказательство. Если $x \in M'(A,b,D)$, то по теореме 2 найдется такое h из $H/C(D)$, что $x+h \in M(A,b)$. Поскольку $h \in H/C(D)$, при некотором $c \in \{-1,1\}^m$ вектор h входит в гильбертов базис полугруппы $K(c) \cap \mathbb{Z}^n$. Для доказательства теоремы осталось воспользоваться работой [7], согласно которой для любого вектора h из гильбертова базиса $K(c) \cap \mathbb{Z}^n$ справедливо неравенство $|(\operatorname{diag} D \cdot A)h|_\infty \leqslant (n-1)\Delta_2$ и $|h|_\infty \leqslant (n-1)\Delta_1$. Теорема 4 доказана.

Второй результат позволяет указать такую окрестность точки из $M(A,b,D)$, что в ней найдется точка из $P(A,b,D)$.

Теорема 5. *Пусть $x \in M(A,b,D)$. Тогда имеется точка $y \in P(A,b,D)$ такая, что $Dy \geqslant Dx$ и справедливы неравенства*

$$|A(y-x)|_\infty \leqslant n\Delta_2, \quad |D(y-x)|_\infty \leqslant n\Delta_2, \quad |y-x|_\infty \leqslant n\Delta_1.$$

Доказательство. Пусть $y \in P(A,b,D)$, $Dy \geqslant Dx$. Построим вектор $c \in \{-1,1\}^m$ такой, что знаки его компонент совпадают со знаками компонент вектора $A(y-x)$. Очевидно, что $(y-x) \in K(c)$. Следовательно, вектор $y-x$ может быть представлен в виде конической комбинации не более n образующих конуса $K(c)$. Не нарушая общности, можно считать, что этими образующиеми являются $h_1, \ldots, h_n$, которые принадлежат множеству $\mathbb{Z}^n$ и наибольший общий делитель компонент каждого вектора h_i равен 1. При этих предположениях справедливо неравенство

$$\left| \begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix} h_i \right|_\infty \leqslant \Delta_2. \tag{5}$$

Пусть $y-x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$, где $\alpha_i \geqslant 0$. Предположим, что среди векторов $h_1, ..., h_n$ первые k векторов принадлежат $L(D)$. Положим $z = y - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i h_i$. Так как $z \in P(A,b)$ и $Dz = Dy$, то $z \in P(A,b,D)$. Далее имеем $z - x = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \alpha_i h_i$. Так как $h_i \in H/L(D)$, то $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, где $i = k+$

$1, ..., n$. Действительно, иначе $x+h_i \in M(A, b)$, что противоречит условию $x \in M(A, b, D)$. Следовательно,

$$\left|\begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix}(x-z)\right|_\infty \leqslant \left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i\right)\Delta_2 \leqslant n\Delta_2 \quad \text{и} \quad |z-x|_\infty \leqslant n\Delta_1.$$

Теорема 5 доказана.

Следующий результат позволяет указать такую окрестность точки из $P(A, b, D)$, что в ней имеется точка из $M(A, b, D)$.

Теорема 6. *Пусть $M(A, b) \neq \varnothing$. Тогда для любой точки $y \in P(A, b, D)$ имеется точка $x \in M(A, b, D)$ такая, что*

$$|A(y-x)|_\infty \leqslant n\Delta_2, \quad |D(y-x)|_\infty \leqslant n\Delta_2, \quad |y-x| \leqslant n\Delta_1.$$

Доказательство. Пусть $y \in P(A, b, D)$, $x \in M(A, b)$. Не нарушая общности можно считать, что $x \in M(A, b, D)$. Обозначим через c такой вектор из $\{-1, 1\}^m$, что $\operatorname{diag}(c)A(y-x) \geqslant 0$. Очевидно, что $(y-x) \in K(c)$. Следовательно, вектор $y - x$ может быть представлен в виде конической комбинации не более n образующих конуса $K(c)$. Не нарушая общности, можно считать, что эти образующие $h_1, \ldots, h_n$ принадлежат $\mathbb{Z}^n$ и наибольший общий делитель компонент каждого вектора h_i равен 1. При этих предположениях справедливо неравенство (5). Пусть $y - x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$, где $\alpha_i \geqslant 0$. Допустим, что среди векторов $h_1, ..., h_n$ первые k векторов принадлежат $L(D)$. Положим $z = x + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha_i \rfloor h_i$. Так как $z \in M(A, b)$ и $Dz = Dx$, то $z \in M(A, b, D)$. Далее имеем $y - z = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i h_i$. Так как при $i = k+1, ..., n$ справедливо включение $h_i \in H/L(D)$, то $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. Действительно, иначе $z + h_i \in M(A, b)$, что противоречит $z \in M(A, b, D)$. Следовательно,

$$\left|\begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix}(y-z)\right|_\infty \leqslant n\Delta_2 \quad \text{и} \quad |z-x|_\infty \leqslant n\Delta_1.$$

Теорема 6 доказана.

4. Алгоритмические вопросы

В этом разделе при фиксированной размерности доказывается существование полиномиальных алгоритмов, решающих задачи G_1–G_4.

Теорема 7. *При фиксированной размерности n существует полиномиальный от длины входной информации алгоритм, решающий задачу G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.*

Задача G_1 сводится к ЗЦЛП

$$\max_{x \in M(A,b) \cap \{v | Dv \geqslant Dy, Dv \neq Dy\}} fx,$$

где f — произвольная свертка с положительными коэффициентами критерия D. Условие $Dx \neq Dy$ можно заменить на неравенство $fx > fy$. Известно [4], что для решения данной задачи при фиксированной размерности существует полиномиальный от длины входа алгоритм. Пусть z решение данной задачи. Очевидно, что $z \in M(A, b, D)$ и $Dz \geqslant Dy$. Если $Dz = Dy$, то $y \in M(A, b, D)$.

Рассмотрим задачу G_2. Заметим, что $M(A, b, D) = \varnothing$ в двух случаях: когда $M(A, b) = \varnothing$, или когда $M(A, b) \neq \varnothing$ и существует вектор $h \in C(D)/L(D)$, принадлежащий конусу рецессивных направлений полиэдра $P(A, b)$ (т. е. $C(-A)$). Распознавание случая $M(A, b) = \varnothing$ сводится к решению ЗЦЛП, а распознавание второго случая — к определению совместности условий $Dx \geqslant 0, Ax \leqslant 0, Dx \neq 0$, которое сводится к задаче линейного программирования. Таким образом, для решения задачи G_2 при фиксированной размерности существует полиномиальный от длины входа алгоритм.

Задача G_3 сводится к определению непустоты множества

$$W = \{(x, y) \mid Ax \leqslant b, Dy \geqslant 0, A(x + y) \leqslant b, Dy \neq 0, x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Если W пусто, то $M(A, b) = M(A, b, D)$, а если $W \neq \varnothing$, то $M(A, b) \neq M(A, b, D)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что

$$M'(A, b, D) = \{x \mid \text{существует } y \text{ такое, что} (x, y) \in W\}.$$

Следовательно, при фиксированной размерности существует полиномиальный от длины входа алгоритм решения задачи G_3.

Рассмотрим задачу G_4. Паретовскую точку можно получить как решение ЗЦЛП $\max\limits_{x \in M(A,b)} fx$, где f — произвольная свёртка. Обозначим через z решение этой задачи. Условие $|M(A, b, D)| = 1$ равносильно тому, что $M(A, b) = \{x \mid x \in M(A, b),\ Dx \leqslant Dz\}$. Таким образом, задача G_4 сводится к последовательной проверке пустоты множеств

$$\{x \mid x \in M(A, b),\ d_i x > d_i z\},$$

что делается с полиномиальной трудоёмкостью от длины входа при фиксированной размерности пространства.

Один из возможных подходов к решению задачи G_5 дает теорема 2 и формула (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волконский В. А., Еганян Г. К., Поманский А. Б.** О множестве эффективных точек в линейных многокритериальных задачах // Сиб. матем. журнал. 1983. Т. 24, № 2. С. 9–17.
2. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 3–33.
3. **Золотых Н. Ю., Чирков А. Ю., Шевченко В. Н.** О многокритериальной задаче целочисленного линейного программирования // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования № 10. Конференция «Математическое программирование и приложения» (тезисы докладов). Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С. 111–112.
4. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х тт. М.: Мир, 1991.
5. **Шевченко В. Н.** Алгебраический подход в целочисленном программировании // Кибернетика. 1984. № 4. С. 36–41.
6. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.
7. **Шевченко В. Н., Иванов Н. Н.** О представлении полугруппы полугруппой, порожденной конечным множеством векторов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 2. С. 98–100.
8. **Шевченко В. Н., Чирков А. Ю.** О многокритериальной задаче целочисленного линейного программирования // Материалы 9-й Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 99–100.
9. **Эрроу К. Дж., Баранкин Е. В., Блекуэлл Д.** Допустимые точки выпуклых множеств // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 274–280.

Адрес авторов:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23,
603950 Нижний Новгород,
Россия.
E-mail: shev@unic.nnov.ru

Статья поступила
3 августа 2005 г.