ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2006. Серия 1. Том 13, № 1. 3–15

УДК 519.8

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФОВ*)

А. А. Агеев, В. П. Ильев, А. В. Кононов, А. С. Талевнин

Исследуется вычислительная сложность известной задачи аппроксимации графов. Показано, что различные варианты этой задачи являются NP-трудными как для неориентированных, так и для ориентированных графов. Для одного варианта задачи доказано существование полиномиальной приближённой схемы.

Введение

Задача аппроксимации графов возникает при анализе систем взаимосвязанных объектов, в частности, в задачах классификации. В ней минимизируется число связей между классами и число недостающих связей внутри классов. Постановки и различные интерпретации этой задачи можно найти в [3, 4, 14].

Будем рассматривать только *обыкновенные* графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом. Обозначим через $\mathcal{M}(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, $\mathcal{M}_k(V)$ — класс всех M-графов на множестве вершин V ровно с k непустыми компонентами связности, $\mathcal{M}_k^{\leqslant}(V)$ – класс всех M-графов на множестве V не более чем с k компонентами связности, $2 \leqslant k \leqslant |V|$.

Если G_1 и G_2 — графы на одном множестве вершин V, то *расстояние* $d(G_1, G_2)$ между ними определяется как

$$d(G_1, G_2) = |E(G_1) \setminus E(G_2)| + |E(G_2) \setminus E(G_1)|,$$

т. е. $d(G_1, G_2)$ — число несовпадающих рёбер в графах G_1 и G_2.

В литературе рассматривались три варианта задачи аппроксимации графов.

---

*)Исследование первого и третьего авторов выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00960).

Задача A. Дан граф $G=(V,E)$. Найти такой граф $M^*\in\mathcal{M}(V)$, что $d(G,M^*) = \min\limits_{M\in\mathcal{M}(V)} d(G,M) \overset{dn}{=} \tau(G)$.

Задача $\mathbf{A_k}$. Дан граф $G=(V,E)$ и целое число $k,\ 2\leqslant k\leqslant |V|$. Найти такой граф $M^*\in\mathcal{M}_k(V)$, что $d(G,M^*) = \min\limits_{M\in\mathcal{M}_k(V)} d(G,M) \overset{dn}{=} \tau_k(G)$.

Задача $\mathbf{A_k^{\leqslant}}$ и величина $\tau_k^{\leqslant}(G)$ определяются аналогично.

Очевидно, что для любого n-вершинного графа G и $k\geqslant 2$

$$\tau(G)\leqslant \tau_k^{\leqslant}(G)\leqslant \tau_k(G)\leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

Последнее неравенство следует из того, что величина $\tau_k(G)$ не превосходит суммы числа рёбер в графе и его дополнении.

Для графов без треугольников задача **A** решена в [6]. В [7, 8] показано, что для любого n-вершинного графа G имеет место оценка

$$\tau(G)\leqslant \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Более сильный результат установлен в [12, 13]: для любого $k\geqslant 2$ и любого n-вершинного графа G

$$\tau_k^{\leqslant}(G)\leqslant \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor.$$

В [2] показано, что для любого $k\geqslant 2$ и любого n-вершинного графа G при $n\geqslant 5(k-1)$ справедлива оценка

$$\tau_k(G)\leqslant \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Исследовалась задача аппроксимации для ориентированных и взвешенных графов. В первом случае каждая бикомпонента аппроксимирующего орграфа является полным симметрическим графом и отсутствуют дуги, ведущие из одной бикомпоненты в другую. В задачах для взвешенных графов задана весовая функция $w: V\times V\to N$ и $d(G_1,G_2)$ — суммарный вес несовпадающих рёбер в графах G_1 и G_2. Известно [9], что задача **A** для ориентированных графов с некоторыми дополнительными условиями NP-трудна, а в [5] доказано, что взвешенная задача $\mathbf{A_k}$ является NP-трудной при любом фиксированном $k\geqslant 2$.

Вычислительная сложность задач аппроксимации невзвешенных графов до сих пор оставалась неизвестной. В настоящей статье показано,

что задачи $\mathbf{A}$, $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{A_k^{\leqslant}}$ являются NP-трудными. Отсюда следует, что они NP-трудны для ориентированных и взвешенных графов. Для задачи $\mathbf{A_2^{\leqslant}}$ мы докажем существование полиномиальной приближённой схемы.

1. Задача о бисекции графа

С задачей $\mathbf{A_2}$ тесно связана следующая *задача о бисекции графа.*

Задача B. В графе $G = (V, E)$ с чётным числом вершин найти разбиение (V_1, V_2) множества V вершин на два равномощных подмножества (*бисекцию*) с минимальной величиной разреза

$$c(V_1, V_2) = |\{uv \in E \mid u \in V_1,\ v \in V_2\}|.$$

3-B — это задача **B** на кубических, т. е. 3-регулярных графах.

Известно, что задачи **B** и **3-B** являются NP-трудными [1, 11]. Кроме того, в случае, когда граф G всюду плотный (т. е. степень каждой вершины графа G не меньше $\delta|V|$, где $\delta > 0$ — некоторая константа), существует полиномиальная приближённая схема для задачи **B** [10].

Рассмотрим следующую релаксацию задачи **B** — *задачу о бисекции с разрезом ограниченной величины.*

Задача $\mathbf{B_m}$. Задано фиксированное целое число $m \geqslant 0$. В графе $G = (V, E)$ с чётным числом вершин найти бисекцию (V_1, V_2) с минимальной величиной разреза или показать, что не существует бисекции величины $c(V_1, V_2) \leqslant m$.

Замечание 1. Поскольку в задаче $\mathbf{B_m}$ число m фиксировано и не является частью входа, задача может быть решена за полиномиальное время.

Для этого достаточно перебрать все подмножества рёбер графа $G = (V, E)$ мощности, не превосходящей m. Для каждого такого подмножества $E' \subseteq E$, $|E'| \leqslant m$, положим $H = (V, E \setminus E')$ и на графе H решим следующий распознавательный вариант задачи $\mathbf{B_0}$.

Существует ли в графе H бисекция величины 0?

Ясно, что в случае связного графа H ответ отрицательный. Если же граф H несвязен, то положительный ответ в задаче распознавания $\mathbf{B_0}$ будет означать, что в графе G существует бисекция (V_1, V_2) величины, не превосходящей m. Действительно, ребро $e \in E'$ принадлежит разрезу, если инцидентные ему вершины попали в разные множества V_1, V_2, и не принадлежит разрезу в противном случае.

Задачу распознавания $\mathbf{B_0}$ на несвязном графе H можно рассматривать как задачу РАЗБИЕНИЕ [1], в которой требуется разбить конечное

множество элементов на две части так, чтобы суммы весов элементов из разных частей были одинаковы. В задаче $\mathbf{B_0}$ элементами являются компоненты связности $C_1, \ldots, C_r$ графа H, а вес i-го элемента равен числу вершин в компоненте $C_i,\ i = 1, \ldots, r$.

Задача РАЗБИЕНИЕ решается с использованием процедуры динамического программирования [1] и её вычислительная сложность ограничена сверху полиномом от $r\sigma$, где σ — числовой параметр, равный сумме весов элементов. В нашем случае $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{r} |V(C_i)| = |V(G)| = n,\ r \leqslant n$, и мы получаем полиномиальный алгоритм решения задачи $\mathbf{B_0}$.

Таким образом, задача $\mathbf{B_m}$ может быть решена перебором всех подмножеств рёбер графа $G = (V, E)$ мощности, не превосходящей m. Среди них нужно выбрать подмножество E' наименьшей мощности, для которого в задаче $\mathbf{B_0}$ на графе $H = (V, E \setminus E')$ имеется положительный ответ. Поскольку число подмножеств ограничено сверху полиномом m-й степени от n, задача $\mathbf{B_m}$ полиномиально разрешима.

2. Вычислительная сложность задач аппроксимации

Сначала докажем, что задача $\mathbf{A_2}$ является NP-трудной. Рассмотрим следующую эквивалентную постановку задачи $\mathbf{A_2}$.

Для данного графа $G = (V, E)$ найти такое разбиение (V_1, V_2) множества V, что значение функции

$$\begin{aligned} f(V_1, V_2) = &|\{uv \in E \mid u \in V_1, v \in V_2\}| \\ &+ |\{uv \notin E \mid u, v \in V_i, i \in \{1, 2\}\}| \end{aligned} \tag{2}$$

минимально.

Очевидно, что $f(V_1, V_2) = d(G, M)$, где $M \in \mathcal{M}_2(V)$, является M-графом с компонентами связности, порожденными множествами V_1 и V_2. Пусть $n = |V|,\ p = |V_1|,\ q = |V_2|$ и $p + q = n$. Без ограничения общности будем считать, что $p \geqslant q$. Легко видеть, что

$$f(V_1, V_2) = \frac{n(n-1)}{2} - |E| + 2c - pq,$$

где $c = c(V_1, V_2) = |\{uv \in E \mid u \in V_1, v \in V_2\}|$ — величина разреза. Заметим, что разность $\frac{n(n-1)}{2} - |E|$ не зависит от разбиения. Поэтому можно считать, что в задаче $\mathbf{A_2}$ требуется минимизировать функцию

$$g(V_1, V_2) = 2c - pq. \tag{3}$$

Напомним, что граф называется *кубическим*, если степени всех его вершин равны 3. Очевидно, что число вершин в кубическом графе чётно. Отметим одно важное свойство оптимального решения задачи $\mathbf{A_2}$ на кубическом графе.

Лемма 1. *Пусть (V_1, V_2) — оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$ на кубическом графе G и $p = |V_1| \geqslant |V_2| = q$. Тогда $p \leqslant \frac{n}{2} + 3$. Если при этом $c = c(V_1, V_2) > 0$ (что заведомо выполнено, если граф G связен), то $p \leqslant \frac{n}{2} + 1$.*

Доказательство. Перенесём некоторую вершину v из V_1 в V_2. Получим новое допустимое решение (V_1', V_2')=$(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\})$ задачи $\mathbf{A_2}$. Пусть $g' = g(V_1', V_2')$, $c' = c(V_1', V_2')$. Тогда

$$g - g' = 2c - pq - 2c' + (p-1)(q+1) = 2c - 2c' + p - q - 1.$$

Учитывая, что $q = n - p$ и $g - g' \leqslant 0$, получаем $2(c - c') + 2p - n - 1 \leqslant 0$. Следовательно,

$$p \leqslant \frac{n+1}{2} + c' - c.$$

Так как степень вершины v равна 3, то $c' - c \leqslant 3$, отсюда с учётом чётности n получаем $p \leqslant \frac{n}{2} + 3$.

В случае, когда $c = c(V_1, V_2) > 0$, можно выбрать вершину $v \in V_1$, смежную с одной или с несколькими вершинами из V_2. Тогда $c' - c \leqslant 1$ и $p \leqslant \frac{n}{2} + 1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть (V_1, V_2) — оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$ на кубическом графе G, причём $c(V_1, V_2) = 0$. Тогда $c(V_1^*, V_2^*) \leqslant 5$, где (V_1^*, V_2^*) — оптимальное решение задачи* **3-B** *на графе G.*

Доказательство. Поскольку $c(V_1, V_2) = 0$, граф G несвязен. Пусть $p = |V_1| = \frac{n}{2} + l$, где $l \geqslant 0$. Без ограничения общности можно считать, что $l > 0$, так как в противном случае (V_1, V_2) — оптимальное решение задачи **3-B** на графе G.

Если бы при этом в графе G нашлась такая компонента связности C, что $V(C) \subseteq V_1$ и $|V(C)| = l_0$, где $0 < l_0 \leqslant l$, то найденное решение (V_1, V_2) задачи $\mathbf{A_2}$ было бы не оптимально: взяв в качестве альтернативного решения задачи $\mathbf{A_2}$ решение $(V_1', V_2') = (V_1 \setminus V(C), V_2 \cup V(C))$, мы получили бы $c(V_1', V_2') = 0$ и

$$g(V_1', V_2') = -\left(\frac{n}{2} + l - l_0\right)\left(\frac{n}{2} - l + l_0\right) < -\left(\frac{n}{2} + l\right)\left(\frac{n}{2} - l\right) = g(V_1, V_2),$$

где $g(V_1', V_2')$ взято из (3).

Следовательно, любая компонента связности графа G, вершины которой содержатся в V_1, имеет мощность, большую l. Выберем l вершин из множества V_1, порождающих связный подграф, и перенесём их в V_2. Поскольку степени всех вершин равны 3, величина разреза возрастёт не более чем на $l+2$, т. е. мы получим бисекцию величины, которая не превосходит $l+2$. Так как $l \leqslant 3$ из леммы 1, то $l+2 \leqslant 5$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{A_2}$ *на кубических графах является* NP-*трудной.*

Доказательство. Рассмотрим задачу $\mathbf{A_2}$ на кубическом графе $G = (V, E)$ и покажем, что к ней полиномиально сводится NP-трудная задача **3-B**.

Пусть (V_1, V_2) — оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$ на графе G.

Случай 1. $c(V_1, V_2) = 0$. Из леммы 2 имеем $c(V_1^*, V_2^*) \leqslant 5$ при оптимальном решении (V_1^*, V_2^*) задачи **3-B**. Следовательно, решая задачу $\mathbf{B_m}$ при $m = 5$, можно построить оптимальное решение задачи **3-B** за полиномиальное время.

Случай 2. $c(V_1, V_2) = c > 0$. В силу леммы 1 имеем $p \leqslant \frac{n}{2} + 1$. Если $p = \frac{n}{2}$, то полученное в задаче $\mathbf{A_2}$ оптимальное разбиение (V_1, V_2) задаёт бисекцию с минимальным числом ребёр c, т. е. (V_1, V_2) — оптимальное решение задачи **3-B**.

Пусть $p = \frac{n}{2} + 1$. В этом случае величина любой бисекции графа G не меньше $c + 1$. Действительно, если бы в G была бисекция (V_1', V_2') величины $c' = c(V_1', V_2') \leqslant c$, то найденное решение (V_1, V_2) задачи $\mathbf{A_2}$ было бы не оптимально: взяв в качестве альтернативного решения задачи $\mathbf{A_2}$ решение (V_1', V_2') задачи **3-B**, в соответствии с (3) получаем

$$g(V_1', V_2') = 2c' - \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \leqslant 2c - \frac{n^2}{4} < 2c - \left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right) = g(V_1, V_2).$$

Так как $c > 0$, то в V_1 имеется вершина v, смежная с вершинами из V_2. Предположим, что v смежна более чем с одной вершиной из V_2. Перенося вершину v из V_1 в V_2, мы получим бисекцию величины, которая меньше c, что невозможно. Следовательно, вершина v смежна ровно с одной вершиной из V_2. Тогда, перенося v из V_1 в V_2, находим бисекцию $(V_1^*, V_2^*) = (V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\})$ величины $c+1$, т. е. (V_1^*, V_2^*) — оптимальное решение задачи **3-B**.

Итак, в каждом из случаев, имея оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$, можно получить оптимальное решение задачи **3-B**.

В заключение отметим, что указанный способ построения оптимального решения задачи **3-B** по известному оптимальному решению задачи $\mathbf{A_2}$ легко трансформируется в алгоритм, имеющий вычислительную

сложность, ограниченную сверху полиномом от числа вершин в графе G. Следовательно, задача **3-В** полиномиально сводится к задаче $\mathbf{A_2}$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Задача* $\overset{\leqslant}{\mathbf{A_2}}$ *на кубических графах является* NP-*трудной.*

Доказательство. Построим полиномиальное сведéние задачи $\mathbf{A_2}$ на кубических графах к задаче $\overset{\leqslant}{\mathbf{A_2}}$.

Заметим, что полный n-вершинный граф K_n не является оптимальным решением задачи $\overset{\leqslant}{\mathbf{A_2}}$ на кубическом графе $G = (V, E)$ с числом вершин $n \geqslant 8$. Выделим произвольную вершину полного графа в отдельную компоненту и полученный M-граф обозначим через M'. Получим $d(G, K_n) = d(G, M') + n - 7$ и $d(G, K_n) > d(G, M')$ при $n \geqslant 8$.

Значит, любое оптимальное решение задачи $\overset{\leqslant}{\mathbf{A_2}}$ на графе G принадлежит классу $\mathcal{M}_2(V)$ и является оптимальным решением задачи $\mathbf{A_2}$ на графе G, т. е. задача $\mathbf{A_2}$ на кубическом графе G сводится к задаче $\overset{\leqslant}{\mathbf{A_2}}$ на том же графе. Следствие 1 доказано.

Теорема 2. *Задача* $\mathbf{A_k}$ *является* NP-*трудной при любом фиксированном* $k \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $k \geqslant 3$. Покажем, как задача $\mathbf{A_2}$ полиномиально сводится к задаче $\mathbf{A_k}$.

Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E)$ — вход задачи $\mathbf{A_2}$, $|V| = n$. Поставим ему в соответствие граф $H = G \bigcup M_{k-2}$, где M_{k-2} является M-графом, в котором каждая компонента связности является полным графом с n^2 вершинами. Рассмотрим граф H как вход задачи $\mathbf{A_k}$.

Пусть U — множество вершин графа H. Класс $\mathcal{M}_k(U)$ разобьём на два подкласса. К первому подклассу отнесём все M-графы вида $M_2 \bigcup M_{k-2}$, где $M_2 \in \mathcal{M}_2(V)$ – некоторое допустимое решение задачи $\mathbf{A_2}$ на графе G, а ко второму подклассу — остальные графы из $\mathcal{M}_k(U)$.

Если $M_2^* \in \mathcal{M}_2(V)$ — оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$ на графе G, а $M^* = M_2^* \bigcup M_{k-2}$ — соответствующий M-граф из первого подкласса, то

$$d(H, M^*) = d(G, M_2^*) = \tau_2(G).$$

Предположим, что $d(H, M) \leqslant \tau_2(G)$ для некоторого M-графа M из второго подкласса. Очевидно, что ни в одной компоненте связности графа M нет двух клик из M_{k-2}. Но тогда найдётся вершина, смежная в графе H не менее чем с $\frac{n^2}{2}$ вершинами, которые принадлежат другим компонентам связности аппроксимирующего графа M. Таким образом,

с использованием (1) получаем

$$\tau_2(G) \geqslant d(H, M) \geqslant \frac{n^2}{2} > \frac{n(n-1)}{2} \geqslant \tau_2(G).$$

Противоречие. Таким образом, любое оптимальное решение задачи $\mathbf{A_k}$ на графе H содержится в первом подклассе. Удалив из него $k-2$ клики с n^2 вершинами, получим оптимальное решение задачи $\mathbf{A_2}$ на исходном графе G. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Задача* $\mathbf{A}$ *является* NP-*трудной.*

Доказательство. Покажем, что задача $\mathbf{A_2^{\leqslant}}$ полиномиально сводится к задаче $\mathbf{A}$.

Пусть граф $G = (V, E)$ — вход задачи $\mathbf{A_2^{\leqslant}}$, $|V| = n$. Рассмотрим полные графы $X = (V_X, E_X)$ и $Y = (V_Y, E_Y)$, где $|V_X| = |V_Y| = n^2$. Построим граф $H = (U, R)$ — вход задачи $\mathbf{A}$, где

$$U = V \cup V_X \cup V_Y,\ R = E \cup E_X \cup E_Y \cup \{uv \mid u \in V,\ v \in V_X \cup V_Y\}.$$

Для доказательства теоремы потребуется следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $M^* \in \mathcal{M}(U)$ — некоторое оптимальное решение задачи* $\mathbf{A}$ *на графе H. Тогда M^* состоит из двух компонент связности, в одной из которых содержатся все вершины множества V_X, а в другой — все вершины множества V_Y.*

Доказательство. Сначала покажем, что никакая компонента связности графа M^* не может содержать все вершины множества $V_X \cup V_Y$. Предположим противное: пусть все вершины $V_X \cup V_Y$ принадлежат одной компоненте связности графа M^*. Рассмотрим граф $M \in \mathcal{M}(U)$, в котором все вершины из V_X вынесены в отдельную компоненту. Тогда значение целевой функции $d(H, M)$ уменьшится: $d(H, M) = d(H, M^*) - \delta$, где $\delta \geqslant n^4 - n^3 > 0$, что противоречит оптимальности M^*.

Следовательно, число компонент связности графа M^* не меньше 2. Покажем, что множество V_X целиком содержится в одной, а множество V_Y — в другой компоненте графа M^*. Предположим, что это не так, и пусть вершины одного из множеств, скажем V_X, содержатся сразу в двух компонентах K_1 и K_2 графа M^*. Далее будем отождествлять компоненты K_1 и K_2 и множества их вершин. Пусть $x_i = |V_X \cap K_i|$, $y_i = |V_Y \cap K_i|$, $z_i = |V \cap K_i|$, $i = 1, 2$. Рассмотрим новый M-граф $M_1 \in \mathcal{M}(U)$, полученный из M^* перенесением всех вершин множества V_X из K_1 в K_2. Заметим, что $d(H, M_1) = d(H, M^*) + \delta_1$, где $\delta_1 = x_1y_2 + x_1z_1 - x_1x_2 - x_1y_1 - x_1z_2$.

Аналогично, для графа M_2, полученного из M^* перенесением всех вершин множества V_X из K_2 в K_1, имеем

$$d(H, M_2) = d(H, M^*) + \delta_2,$$

где $\delta_2 = x_2y_1 + x_2z_2 - x_1x_2 - x_2y_2 - x_2z_1$. Так как $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то либо $\delta_1 < 0$, либо $\delta_2 < 0$, что противоречит оптимальности M^*.

Итак, $V_X \subseteq K_1$, $V_Y \subseteq K_2$, где K_1 и K_2 — две различные компоненты связности графа M^*. Осталось показать, что в графе M^* каждая вершина множества V принадлежит либо K_1, либо K_2. Предположим, что существует такая вершина $v \in V$, что $v \notin K_1 \cup K_2$. После перенесения v в любую из компонент K_1, K_2 значение целевой функции уменьшится не менее чем на $n^2 - n + 1$. Следовательно, в оптимальном решении задачи $\mathbf{A}$ на графе H все вершины множества V лежат в компонентах K_1 и K_2. Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Рассмотрим допустимые решения задачи $\mathbf{A}$, которые удовлетворяют условию леммы 3, т. е. состоят из двух компонент K_1, K_2 таких, что $V_X \subseteq K_1$, $V_Y \subseteq K_2$, и множество V разбито на два подмножества $V_1 \subseteq K_1$, $V_2 \subseteq K_2$ (одно из множеств V_1, V_2 может быть пустым). Тогда по аналогии с (2) целевая функция задачи $\mathbf{A}$ на графе H может быть переписана в виде

$$h(K_1, K_2) = |\{uv \in R \mid u \in K_1, v \in K_2\}| + |\{uv \notin R \mid u, v \in K_i, i \in \{1, 2\}\}|.$$

Следовательно, $h(K_1, K_2) = f(V_1, V_2) + n^3$, где $f(V_1, V_2)$ — целевая функция задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$. Поскольку величина n^3 не зависит от разбиения множества V на подмножества V_1 и V_2, оптимальное решение задачи $\mathbf{A}$ на графе H определяет оптимальное решение задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$ на графе G. Теорема 3 доказана.

Используя аналогичное сведéние и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Задача* $\mathbf{A}_\mathbf{k}^{\leqslant}$ *является* NP-*трудной при любом фиксированном* $k \geqslant 2$.

3. Полиномиальная приближённая схема для задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$

Алгоритм решения задачи на минимум называется *ρ-приближённым*, если он за полиномиальное время находит решение, вес которого отличается от веса оптимального решения не более чем в ρ раз.

Семейство алгоритмов H_ε решения задачи на минимум называют *полиномиальной приближённой схемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ любой алгоритм из H_ε является $(1 + \varepsilon)$-приближённым алгоритмом.

Рассмотрим задачу $\mathbf{A}_\mathbf{2}^{\leqslant}$, в которой для графа $G = (V, E)$ требуется найти ближайший M-граф, состоящий не более чем из двух компонент связности. Как и ранее, каждый M-граф будем ассоциировать с парой множеств (V_1, V_2), соответствующих его компонентам связности (одно из множеств V_1, V_2 может быть пустым). Поэтому допустимое решение задачи $\mathbf{A}_\mathbf{2}^{\leqslant}$ будем понимать как разбиение множества вершин V на две части со значением целевой функции (2).

Сведём задачу $\mathbf{A}_\mathbf{2}^{\leqslant}$ к задаче $\mathbf{B}$. Рассмотрим обыкновенный граф $G = (V, E)$ — вход задачи $\mathbf{A}_\mathbf{2}^{\leqslant}$ и его копию — граф $G' = (V', E')$. Всюду далее v' — копия вершины $v \in V$. Построим граф $H = (U, R)$ — вход задачи $\mathbf{B}$ по правилу:

$$U = V \cup V', \ R = E \cup E' \cup \{uv' \mid uv \notin E, \ u, v \in V\}. \tag{4}$$

Замечание 2. Степень $d(u)$ любой вершины $u \in U$ графа H равна $|V| - 1 = \frac{|U|}{2} - 1$.

Замечание 3. Для каждой вершины $v \in V$ и ее копии $v' \in V'$ любая вершина u из $U \setminus \{v, v'\}$ смежна либо с v, либо с v'.

Допустимое решение (U_1, U_2) задачи $\mathbf{B}$ на графе H назовём *правильным*, если каждая вершина $v \in V$ и её копия $v' \in V'$ принадлежат разным частям бисекции (U_1, U_2), и *неправильным* в противном случае.

Лемма 4. *Любое неправильное решение задачи* $\mathbf{B}$ *на графе* H *за полиномиальное время можно преобразовать в правильное решение без возрастания величины бисекции.*

Доказательство. Пусть (U_1, U_2) — неправильное решение. Каждой вершине $u \in U_i$ $(i = 1, 2)$ поставим в соответствие числовую характеристику $r(u) = d_{out}(u) - d_{in}(u)$, где $d_{out}(u) = |N(u) \cap (U \setminus U_i)|$, $d_{in}(u) = |N(u) \cap U_i|$, $N(u)$ — множество вершин, смежных с u в графе H.

Если вершины u и u' принадлежат одному и тому же множеству U_i, $i = 1, 2$, то в силу замечания 3 для u и u' справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_{in}(u) + d_{in}(u') &= |U_i| - 2 = |V| - 2, \\ d_{out}(u) + d_{out}(u') &= |U \setminus U_i| = |V|, \end{aligned}$$

из которых следует, что $r(u) + r(u') = 2$. Поэтому $\max\{r(u), r(u')\} > 0$.

Так как $|U_1| = |U_2|$, то кроме вершин u и u' найдётся вершина v, которая вместе со своей копией содержится в одной компоненте, отличной от той, в которой содержится u.

Таким образом, существуют такие вершины $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, что $r(u_1) > 0$ и $r(u_2) > 0$. Если поменять эти вершины местами, то это не приведет к возрастанию величины бисекции. Лемма 4 доказана.

Каждому правильному решению (U_1, U_2) задачи $\mathbf{B}$ на графе H поставим в соответствие решение (V_1, V_2) задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$ на графе G, где $V_1 = U_1 \cap V$ и $V_2 = U_2 \cap V$. Наоборот, каждому допустимому решению (V_1, V_2) задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$ можно поставить в соответствие правильное решение $(V_1 \cup V_2', V_2 \cup V_1')$ задачи $\mathbf{B}$ на графе H. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть (U_1, U_2) и (V_1, V_2) — соответствующие друг другу правильное решение задачи $\mathbf{B}$ и допустимое решение задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$. Тогда*

$$c(U_1, U_2) = 2f(V_1, V_2),$$

где $c(U_1, U_2)$ — величина бисекции, а $f(V_1, V_2)$ — целевая функция из (2).

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару вершин (u, v) графа G. Она вносит 1 в значение функции $f(V_1, V_2)$, если $uv \in E$ и $u \in V_1$, $v \in V_2$, либо $uv \notin E$ и $\{u, v\} \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. В первом случае в разрез (U_1, U_2) графа H входят только рёбра uv и $u'v'$, а во втором — только рёбра uv' и $u'v$. Если же пара вершин (u, v) не учитывается в функции $f(V_1, V_2)$, то либо $uv \notin E$ и $u \in V_1$, $v \in V_2$, либо $uv \in E$ и $\{u, v\} \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. При этом ни одно из рёбер uv, uv', $u'v$, $u'v'$ не входит в разрез (U_1, U_2).

С другой стороны, пусть некоторое ребро графа H вносит 1 в величину бисекции $c(U_1, U_2)$, например, ребро $u'v$, где u и $v \in V$. Поскольку (U_1, U_2) — правильное решение, в разрез войдёт и ребро uv' (оно тоже внесёт 1 в $c(U_1, U_2)$). Это значит, что вершины u и v принадлежат одной компоненте V_i (так как $V_i = U_i \cap V,\ i = 1, 2$) и несмежны в графе G (по построению графа H). Поэтому в значение целевой функции $f(V_1, V_2)$ пара вершин (u, v) внесёт вклад, равный 1. Случаи, когда в разрез входят рёбра вида uv и $u'v'$, рассматриваются аналогично.

Итак, вклад $c(U_1, U_2)$ любой пары вершин $(u, v),\ u, v \in V$ равен удвоенному вкладу этой пары вершин в $f(V_1, V_2)$. Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 следует, что если правильное решение (U_1^*, U_2^*) является оптимальным решением задачи $\mathbf{B}$, то $(U_1^* \cap V, U_2^* \cap V)$ — оптимальное решение задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$.

Теорема 5. *Для задачи $\mathbf{A}_2^{\leqslant}$ существует полиномиальная приближённая схема.*

Доказательство. Известно, что в случае, когда граф H является всюду плотным (т. е. степень каждой вершины графа H не меньше $\delta|U|$ при некоторой константе $\delta > 0$), существует полиномиальная приближённая схема для решения задачи $\mathbf{B}$ [10].

По входу G задачи $\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\leqslant}$ построим вход H задачи $\mathbf{B}$, используя правило (4). По замечанию 2 граф H является всюду плотным ($\delta > 1/3$). Используя полиномиальную приближённую схему из [10], найдём приближённое решение (U_1, U_2) задачи $\mathbf{B}$ на графе H. В силу леммы 4 можно считать, что это решение и оптимальное решение (U_1^*, U_2^*) задачи $\mathbf{B}$ являются правильными. Удалив из этих решений вершины множества V', получим соответственно приближённое (V_1, V_2) и оптимальное (V_1^*, V_2^*) решения задачи $\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\leqslant}$. Из леммы 5 следует, что

$$\frac{f(V_1, V_2)}{f(V_1^*, V_2^*)} = \frac{c(U_1, U_2)}{c(U_1^*, U_2^*)}.$$

Значит, любая оценка погрешности приближённого решения задачи $\mathbf{B}$ останется верной и для соответствующего приближённого решения задачи $\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\leqslant}$. Отсюда следует существование полиномиальной приближённой схемы для решения задачи $\mathbf{A}_{\mathbf{2}}^{\leqslant}$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. **Ильев В. П., Фридман Г. Ш.** К задаче аппроксимации графами с фиксированным числом компонент // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 3. С. 533–538.

3. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Кибернетическое моделирование. М.: Сов. радио, 1972.

4. **Ляпунов А. А.** О строении и эволюции управляющих систем в связи с теорией классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 27. М.: Наука, 1973. С. 7–18.

5. **Талевнин А. С.** О сложности задачи аппроксимации графов // Вестник Омского университета. 2004. № 4. С. 22–24.

6. **Фридман Г. Ш.** Одна задача аппроксимации графов // Управляемые системы. Сб. научн. тр. Вып. 8. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1971. С. 73–75.

7. **Фридман Г. Ш.** Об одном неравенстве в задаче аппроксимации графов // Кибернетика. 1974. № 3. С. 151.

8. **Фридман Г. Ш.** Исследование одной задачи классификации на графах // Методы моделирования и обработки информации. Новосибирск : Наука, 1976. С. 147–177.

9. **Фридман Г. Ш.** Полиномиальная полнота некоторых модификаций задачи аппроксимации графов // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1977. С. 150.
10. **Arora S., Karger D., Karpinski M.** Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems // J. Comput. System Sci. 1999. V. 18, N 1. P. 193–2103.
11. **Berman P., Karpinski M.** Approximation hardness of bounded degree MIN-CSP and MIN-BISECTION // Automata, languages and programming. 29th international colloquium (Spain, July 8–13, 2002). Proc. Berlin: Springer, 2002. P. 623–632. (Lecture Notes in Computer Science; V. 2380).
12. **Tomescu I.** Note sur une caractérisation des graphes done le degreé de deséquilibre est maximal // Mathematiques et Sciences Humaines. 1973. N 42. P. 37–40.
13. **Tomescu I.** La reduction minimale d'un graphe à une reunion de cliques // Discrete Math. 1974. V. 10, N 1–2. P. 173–179.
14. **Zahn C.** Approximating symmetric relations by equivalence relations // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1964. V. 12, N 4. P. 840–847.

Адреса авторов:

Агеев А. А., Кононов А. В.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: ageev@math.nsc.ru,
alvenko@math.nsc.ru

Ильев В. П., Талевнин А. С.

Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а,
644077 Омск, Россия.
E-mail: iljev@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
20 сентября 2005 г.