ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2006. Серия 1. Том 13, № 1. 16–32

УДК 517.71

# ОРИЕНТИРОВАННАЯ 5-РАСКРАСКА ВЕРШИН В РАЗРЕЖЕННЫХ ГРАФАХ*)

*О. В. Бородин, А. О. Иванова, А. В. Косточка*

Ориентированная $k$-раскраска вершин ориентированного графа $H$ есть ориентированный гомоморфизм из $H$ в некоторый $k$-вершинный турнир. Доказано, что любая ориентация графа с обхватом не менее 5 и максимальной средней степенью его подграфов менее $12/5$ имеет ориентированную 5-раскраску. Как следствие, любая ориентация плоского или проективно плоского графа с обхватом не менее 12 имеет ориентированную 5-раскраску.

## 1. Введение и формулировка результатов

*Гомоморфизм* графа $G$ в граф $H$ есть отображение $\varphi$ из $V(G)$ в $V(H)$, которое сохраняет рёбра (или дуги), т. е.

$$xy \in E(G) \Rightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E(H).$$

Гомоморфизмы графов изучались как обобщение раскраски вершин графов. Заметим, что неориентированный граф $G$ имеет $k$-раскраску, если и только если $G$ имеет гомоморфизм в полный $k$-вершинный граф. Поэтому хроматическое число неориентированного графа $G$ можно определить как минимальное число вершин в таком неориентированном графе $H$, что имеется гомоморфизм графа $G$ в $H$.

В дальнейшем рассматриваются орграфы, в которых нет двух дуг, инцидентных одной и той же паре вершин. *Ориентированная $k$-раскраска* орграфа $H$ есть (ориентированный) гомоморфизм орграфа $H$ в $k$-вершинный орграф $H'$. *Ориентированное хроматическое число* $o(G)$ неориентированного графа $G$ определяется как минимальное $k$ такое, что каждый ориентированный граф $G$ имеет ориентированную $k$-раскраску. Известно, что ориентированное хроматическое число графа может существенно

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований первого автора (проект 03-01-00796), второго — (проект 05-01-00816).

отличаться от его хроматического числа. Например, имеются двудольные графы с произвольно большим ориентированным хроматическим числом.

Ориентированное хроматическое число было введено Б. Курселем [6] при изучении логик второго порядка на графах. В частности, он доказал, что $o(G) \leqslant 3^{63}$ для любого плоского графа $G$. Кроме того, ориентированное хроматическое число и его связи с другими параметрами графа изучались в [2–5, 8–12]. В частности, в [11] граница $3^{63}$ была улучшена до 80 (с использованием ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов, доказанной в [1]), а в [9] было доказано, что если подграф графа $G$ имеет «большую» среднюю степень, то $G$ имеет «большое» ориентированное хроматическое число. В связи с этим в [5] рассматривались верхние границы для ориентированного хроматического числа графов с ограниченной *максимальной средней степенью* $\mathrm{mad}(G)$, где $\mathrm{mad}(G) = \max\limits_{G' \subseteq G} 2|E(G)/|V(G)|$. Нестрого говоря, $\mathrm{mad}(G)$ измеряет равномерную разреженность графа $G$: если $\mathrm{mad}(G)$ мала, то каждый подграф графа $G$ «разрежен», т. е. имеет малую степень. Некоторые важные графы имеют ограниченную максимальную среднюю степень. Например, каждый $d$-вырожденный граф $G$ имеет $\mathrm{mad}(G) < 2d$. Графы с большим обхватом и большим числом вершин, вложимые в фиксированную поверхность, имеют низкую максимальную среднюю степень. В частности, для любого плоского или проективно плоского графа $G$ с обхватом $g$

$$\mathrm{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}. \tag{1}$$

В [5] была доказана следующая

**Теорема 1**.

1) *Для любого графа $G$ с $\mathrm{mad}(G) < 7/3$ справедлива оценка $o(G) \leqslant 5$.*

2) *Для любого графа $G$ с $\mathrm{mad}(G) < 11/4$ и обхватом $g(G) \geqslant 5$ справедлива оценка $o(G) \leqslant 7$.*

3) *Для любого графа $G$ с $\mathrm{mad}(G) < 3$ справедлива оценка $o(G) \leqslant 11$.*

4) *Для любого графа $G$ с $\mathrm{mad}(G) < 10/3$ справедлива оценка $o(G) \leqslant 19$.*

В силу (1) из теоремы 1 следует, что $o(G) \leqslant 5$ для любого плоского графа $G$ с обхватом не менее 14. Учитывая один результат из [3], ограничение «обхват не менее 14» можно ослабить до «обхват не менее 13».

Основной результат состоит в дальнейшем усилении упомянутого результата об ориентированной 5-раскрашиваемости.

**Теорема 2**. *Если граф $G$ имеет $\mathrm{mad}(G) < 12/5$ и обхват не менее* 5, *то* $o(G) \leqslant 5$.

Согласно (1) из теоремы 2 получаем

**Следствие 1**. *Для любого плоского и проективно плоского графа* $G$ *с обхватом не менее* 12, *справедливо неравенство* $o(G) \leqslant 5$.

Фактически доказана более сильная форма теоремы 2: каждая ориентация графа $G$ с $\mathrm{mad}(G) < 12/5$ и обхватом не менее 5 имеет ориентированный гомоморфизм в циркулянт $C(5; 1, 2)$, т. е. в турнир на вершинах $0, 1, 2, 3, 4$, в котором пара $ij$ является дугой, тогда и только тогда, когда $j - i \equiv 1 \pmod 5$ или $j - i \equiv 2 \pmod 5$. (Требование на обхват нельзя отбросить, как показывает граф с $\mathrm{mad}(G) < 12/5$ и обхватом 4, содержащий дуги $ab$, $bc$, $cd$, $de$, $ef$, $af$ и $ad$).

В следующем разделе исследованы некоторые свойства ориентированных гомоморфизмов в $C(5; 1, 2)$. В подразделе 2.2 изучены свойства гипотетического минимального контрпримера $G_0$ к упомянутому выше усилению теоремы 2. Мы используем тот факт, что максимальная средняя степень любого подграфа графа $G$ по определению не больше максимальной степени графа $G$. Показано, что многие разреженные графы не могут быть индуцированными подграфами графа $G_0$. В разделе 3 используется перераспределение вкладов. А именно, каждой вершине $v$ гипотетического минимального контрпримера $G_0$ присваивается первоначальный заряд $5 \deg_{G_0}(v) - 12$ и после некоторого перераспределения заряда устанавливается, что новый заряд каждой вершины неотрицателен, что противоречит тому факту, что сумма первоначальных зарядов отрицательна, так как средняя степень $G_0$ менее $12/5$.

## 2. Доказательство теоремы 2

Пусть орграф $G_0$ — наименьший по числу рёбер орграф с $\mathrm{mad}(G) < 12/5$ и обхватом не менее 5, который не допускает гомоморфизма на циркулянт $C(5; 1, 2)$. Не нарушая общности, можно считать, что $G_0$ связен.

По определению имеем

$$\sum_{v \in V} (5d(v) - 12) < 0, \tag{2}$$

где $d(v)$ — степень вершины $v$.

*Заряд* $\mu(v)$ каждой вершины $v$ графа $G_0$ положим равным $5d(v) - 12$. Например, заряд 2-вершины (т. е. вершины степени 2) равен $-2$, заряд 3-вершины равен 3, 4-вершины равен 8 и т. д.

**2.1. Свойства гомоморфизмов в $C(5;1,2)$**

Две вершины, соединенные дугой, назовём *смежными.* Из определения следует, что если вершина окрашена в цвет $\alpha$, то независимо от ориентации дуги, соединяющей $a$ с $b$, для $b$ допустимыми являются 2 цвета, причём если дуга ориентирована от $a$ к $b$, то этими цветами являются $\alpha+1, \alpha+2$, в противном случае — цвета $\alpha-1, \alpha-2$.

Нетрудно проверить справедливость следующего факта.

**Замечание 1.** Если в вершине $a$ имеется множество $A$ из $k$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, последовательных допустимых цветов, то на смежной вершине $b$ имеется такое множество $B$ из $k+1$ цвета, что для любого цвета $\beta$ из $B$ существует такой цвет $\alpha$ из $A$, что раскраска вершин $a$ и $b$ с учётом ориентации дуги $ab$ в орграфе соответствует циркулянту.

**Замечание 2.** Если в вершине $a$ имеется множество из двух допустимых цветов $\alpha-1, \alpha+1$, то смежная вершина $b$ получает лишь один запрет по ребру $ab$.

**Следствие 2**. *Если вершина $a$ имеет два допустимых цвета, а смежная с ней вершина $b$ имеет либо три, либо два не соседних допустимых цвета, то можно выбрать по одному из этих цветов так, чтобы раскраска вершин $a$ и $b$ была согласована с гомоморфизмом.*

Доказательство. По замечанию 2 вершина $b$ диктует вершине $a$ не более одного запрета. Следовательно, среди двух цветов, допустимых на $a$, найдётся незапрещённый цвет.

Далее под $k$-*цепью* будем понимать цепь, в которой содержится ровно $k$ вершин степени 2.

**Следствие 3**. *Если в 1-цепи $axb$ вершина $a$ окрашена, а вершина $b$ имеет либо три, либо два не соседних допустимых цвета, то из них можно выбрать такой цвет, чтобы нашёлся допустимый цвет для 2-вершины $x$ этой цепи.*

Доказательство. По замечанию 1 вершина $a$ диктует для $x$ два допустимых цвета, так что остаётся применить следствие 2 к вершинам $x$ и $b$.

Цвета, заданные на концах 1-цепи, назовем *совместимыми*, если существует цвет для промежуточной 2-вершины, согласованный с гомоморфизмом.

Пусть вершина $a$ 1-цепи $axb$ имеет допустимый цвет $\alpha$. Согласно замечанию 1 с ним совместимы три последовательных цвета $\gamma-1$, $\gamma$, $\gamma+1$. Нетрудно видеть, что тогда с допустимым цветом $\alpha+k$ на вершине $a$ будут совместимы цвета $\gamma-1+k$, $\gamma+k$, $\gamma+1+k$ на вершине $b$ (при любом $k$). Отсюда непосредственно следует

**Лемма 1**. *Допустимый цвет $\gamma$ вершины $b$ 1-цепи $axb$ является совместимым со всеми тремя цветами $\alpha-1$, $\alpha$, $\alpha+1$, если они допустимы для вершины $a$.*

Такой цвет $\gamma$ на вершине $b$ назовем *универсальным* для предписания $\alpha-1$, $\alpha$, $\alpha+1$ на вершине $a$, если $axb$ — 1-цепь.

Тройку цветов $B=\{\beta-1,\,\beta,\,\beta+1\}$ на вершине $b$ 1-цепи $axb$ назовём *жёсткой* для предписания $A=\{\alpha-1,\alpha,\alpha+1\}$ на вершине $a$, если $B$ не содержит цвет $\gamma$, универсальный для вершины $a$. Ясно, что для тройки $A$ на вершине $a$ существует в точности две жёсткие тройки на вершине $b$: $B^{>}=\{\gamma+1,\gamma+2,\gamma+3\}$ и $B^{<}=\{\gamma-3,\gamma-2,\gamma-1\}$. Будем называть 1-цепь $axb$ *$>$-цепью*, если $B=B^{>}$, и *$<$-цепью*, если $B=B^{<}$.

Нетрудно видеть, что свойство жёсткости симметрично.

**Лемма 2**. *Если на 1-цепи $axb$ тройка цветов $B=\{\beta-1,\beta,\beta+1\}$ на вершине $b$ является жёсткой для тройки цветов $A=\{\alpha-1,\alpha,\alpha+1\}$ на вершине $a$, то $A$ является жёсткой для $B$.*

Доказательство. По определению с цветом $\alpha$ на вершине $a$ совместимы цвета $\gamma-1$, $\gamma$, $\gamma+1$ на вершине $b$; другими словами, цвет $\alpha$ является универсальным для данной тройки. Тогда цвет $\alpha+2$ является универсальным для $B^{>}=\{\gamma+1,\gamma+2,\gamma+3\}$, а $\alpha-2$ универсален для $B^{<}=\{\gamma-3,\gamma-2,\gamma-1\}$. Остаётся заметить, что ни $\alpha+2$, ни $\alpha-2$ не входят в $A$. Лемма 2 доказана.

**Лемма 3**. *Если $A$ и $B$ — жёсткая пара троек на концах 1-цепи $axb$, то младший (старший) цвет из $A$ совместим со старшим (с младшим) цветом из $B$.*

Доказательство. Младшим цветом в $A$ на вершине $a$ является $\alpha-1$, старшими же в $B$ могут быть цвета $\gamma+3$ и $\gamma-1$ (при $B=B^{>}$ и $B=B^{<}$, соответственно). Остаётся заметить, что $\alpha-1$ совместим с $\gamma+3=\gamma-2$ и с $\gamma-1$. Аналогично, старший цвет $\alpha+1$ совместим с $\gamma-3=\gamma+2$ и с $\gamma+1$. Лемма 3 доказана.

**Лемма 4**. *Пусть $A$ и $B$ — жёсткая пара троек на концах 1-цепи $axb$. Тогда центральный цвет $\alpha$ из $A$ совместим с младшим цветом из $B$, если $B=B^{>}$ и со старшим цветом из $B$, если $B=B^{<}$.*

Доказательство. Действительно, $\alpha$ совместим и с $\gamma+1$ (младшим при $B=B^{>}$), и с $\gamma-1$ (старшим при $B=B^{<}$). Лемма 4 доказана.

**Следствие 4**. *Если 1-цепи $b'x'a$ и $axb$ являются $>$-цепями ($<$-цепями), то центральный цвет $\alpha$ на вершине $a$ совместим и с младшим (со* *старшим) цветом на $b$, и со старшим ( с младшим) на $b'$.*

### 2.2. Основные структурные свойства минимального контрпримера

Опишем ряд структурных свойств орграфа $G_0$, опираясь на которые перераспределим заряды вершин так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин сохраняется, мы получим противоречие с (2), что и завершит доказательство теоремы 1.

**Лемма 5**. $\delta(G_0) \geqslant 2$.

**Лемма 6**. *В $G_0$ нет $k$-цепи ни при каком $k \geqslant 3$.*

Доказательство. Пусть существует $k$-цепь $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$, $k \geqslant 3$, где $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — вершины степени 2, а степени вершин $v_0, v_{k+1}$ не менее 3. Удалим вершины $v_1, v_2, v_3$ и возьмём ориентированную раскраску полученного графа (точнее гомоморфизм на $C(5;1,2)$). Согласно замечанию 1 для $v_1$ допустимыми (при фиксированной раскраске вершины $v_0$) являются два цвета, для $v_2$ — три цвета и т. д. Тогда для любого цвета вершины $v_4$ можно последовательно подобрать цвета для вершин $v_3, v_2, v_1$ так, чтобы получилась ориентированная 5-раскраска графа $G_0$. А именно, $v_4$ диктует два возможных цвета на $v_3$, а на $v_3$ был один запрет (со стороны $v_2$). Следовательно, $v_3$ можно покрасить. Цвет вершины $v_3$ был допустимым относительно $v_2$, т. е. на $v_2$ существовал цвет, согласующийся (с учетом ориентации дуги, соединяющие $v_2$ и $v_3$) с уже выбранным цветом вершины $v_3$, и мы его делаем цветом вершины $v_2$. Аналогично красится $v_1$. Лемма 6 доказана.

Вершину, которая является началом $k_1$-, $k_2$-, $\ldots$-цепей, назовём $(k_1, k_2, \ldots)$-*вершиной*.

**Лемма 7**. *В $G_0$ нет $(k, 2, 2)$-вершин, где $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $v$ — $(k, 2, 2)$-вершина, где $k \geqslant 1$. Удалим $v$ и 2-вершины в инцидентных ей цепях. Согласно замечанию 1 по 1-цепи на $v$ действует 2 запрета, а по 2-цепям — по одному. Следовательно, для вершины $v$ найдётся такой цвет, при котором существует раскраска 2-вершин цепей, инцидентных $v$, согласованная с гомоморфизмом. Лемма 7 доказана.

**Лемма 8**. *В $G_0$ нет циклов из $(k, k, k)$-вершин, где $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть такие циклы существуют. Рассмотрим кратчайший из них, который обозначим через $C$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — вершины степени 3 по часовой стрелке в $C$. Заметим, что две цепи, инцидентные каждой верщине $v_i$, лежат на цикле $C$, а третья, *внешняя*, не может заканчиваться вершиной из $C$, поскольку $g(G_0) \geqslant 5$ по условию 6 и ввиду минимальности $C$. Пусть $w_i$ – это 2-вершина не из $C$, смежная с $v_i$, а $s_i$ — вершина, отличная от $v_i$ и смежная с $w_i$. Удалим из $G_0$ все вершины цикла $C$, а также все $w_i$ и полученный граф отобразим на $C(5; 1, 2)$.

Отметим, что 3-вершины цикла $C$ могут соединяться как 1-цепями, так и 2-цепями (понятно, что каждая 1-цепь имеет одну из четырёх возможных ориентаций, а 2-цепь — из восьми).

*Случай* 1. В $C$ 3-вершины соединяются только 1-цепями.

Согласно замечанию 1 для $v_i$ допустимыми с точки зрения инцидентной ей внешней цепи, ведущей в $s_i$, являются три цвета $A_i = \{\alpha_i - 1, \alpha_i, \alpha_i + 1\}$, т. е. при раскраске $v_i$ в любой из них мы сможем подобрать цвет для $w_i$. Остаётся раскрасить все $v_i$ в эти допустимые цвета так, чтобы мы смогли раскрасить 2-вершины самого цикла $C$ согласно требованиям гомоморфизма на $C(5; 1, 2)$.

*Подслучай* 1.1. Найдутся две последовательные 3-вершины цикла $C$, например, $v_1, v_2$, такие, что соответствующие им тройки цветов $A_1$ и $A_2$ не являются (взаимно) жёсткими.

Тогда в $A_2$ найдётся цвет $\beta$, универсальный для $A_1$. Мы красим $v_2$ в $\beta$. Затем, пользуясь следствием 3, красим $v_3$ так, чтобы можно было покрасить 2-вершину, находящуюся в цикле $C$ между $v_2$ и $v_3$. Аналогично красим все вершины цикла $C$ вплоть до вершины $v_1$. Поскольку ни один из цветов, допустимых для $v_1$, не конфликтует с цветом $\beta$ вершины $v_2$, можно покрасить 2-вершину $x_1$, лежащую в $C$ между $v_1$ и $v_2$.

*Подслучай* 1.2. При любом $i$ тройки $A_i$ и $A_{i+1}$ являются (взаимно) жёсткими.

Пусть $k$ — число 1-цепей в $C$. Если $k$ чётно, то вершины $v_i$ при чётном $i$ красим в младшие цвета из $A_i$, а при нечётном $i$ — в старшие. По лемме 3 полученная раскраска допускает продолжение до гомоморфизма графа $G_0$ на $C(5; 1, 2)$ посредством раскраски 2-вершин цикла $C$.

Пусть теперь $k$ нечётно. Тогда найдутся две соседние 1-цепи в $C$, например, $P = v_k x_k v_1$ и $Q = v_1 x_1 v_2$, которые обе являются либо $>$-цепями, либо $<$-цепями. Если $P$ и $Q$ являются $>$-цепями, то из $A_1$ выбираем центральный цвет для $v_1$, а все остальные вершины $v_i$ при нечётном $i$ красим в старшие цвета из $A_i$, а все $v_i$ при чётном $i$ — в младшие. По следствию 4 полученная раскраска допускает продолжение до гомоморфизма графа $G_0$ на $C(5; 1, 2)$ посредством раскраски 2-вершин цикла $C$.

Аналогично действуем, если $P$ и $Q$ являются $<$-цепями.

*Случай* 2. В $C$ существует 2-цепь, например, $v_1 x y v_2$.

По замечанию 1, примененному последовательно к $v_1$, $x$, $y$ и $v_2$, для каждого из двух крайних допустимых цветов на $v_1$ существует единственный цвет на $v_2$, который не позволяет покрасить $x$ и $y$, если $v_1$ покрашен в соответствующий крайний цвет.

Окрасим $v_2$ в цвет $\alpha_1$, который не противоречит крайним цветам для $v_1$, и вычеркиваем цвет $\alpha_1$ из списка допустимых для $v_1$. Далее окрасим вершины цикла $C$ по часовой стрелке, начиная с $v_2$, пользуясь следствием 3 при прохождении через 1-цепи и замечанием 1 — через 2-цепи (а именно, 2-цепь дает 1 запрет на раскраску своего конца, если другой уже окрашен). Лемма 8 доказана.

**Лемма 9**. *Цепь из* $(1,1,1)$*-вершин, начинающаяся в* $(2,1,1)$*-вершине, не может заканчиваться в* $(2,1,1)$*-вершине.*

Доказательство. Пусть существует цепь $P = v_0v_1\dots v_kv_{k+1}$, где $v_1, v_2, \dots, v_k$ — (1,1,1)-вершины, а $v_0$ и $v_{k+1}$ — (2,1,1)-вершины. По лемме 8 $v_0$ и $v_{k+1}$ различны. Пусть $w_i$ – это 2-вершина не из $P$, смежная с $v_i$, а $s_i$ – вершина, отличная от $v_i$ и смежная с $w_i$. Через $s'_0$ и $s'_{k+1}$ обозначим концы 2-цепей, инцидентных вершинам $v_0$ и $v_{k+1}$ соответственно. Не исключено, что $s'_0 = s'_{k+1}$, но ввиду леммы 8 $s'_0 \neq v_{k+1}$ и $v_0 \neq s'_{k+1}$. Также из леммы 8 следует, что вершины $s_0, s_1, \dots, s_{k+1}$ не принадлежат $P$. Теперь будем считать, что квазицепь $P$ вложена в цепь $P' = y_0x_0v_0x_1v_1x_2\dots x_{k+1}v_{k+1}x_{k+2}y_{k+2}$. Таким образом, видно, что лемма 9 является обобщением леммы 7.

Удалим из $G_0$ все вершины цепи $P'$, а также все $w_i$ и окрасим вершины полученного графа. Согласно доказательству леммы 6 от $s_0$ (по 1-цепи) на $v_0$ действует 2 запрета, а от $s'_0$ (по 2-цепи) — один. Следовательно, существуют два таких цвета для вершины $v_0$, что в какой бы из них ни раскрасили $v_0$, мы всегда сможем раскрасить 2-вершины $w_0, x_0, y_0$. Поскольку имеется два допустимых цвета для $v_0$, имеем один запрет для $v_1$, приходящий от $v_0$. Вместе с двумя запретами от $s_1$ для $v_1$ остаются 2 допустимых цвета (в какой бы из них мы ни раскрасили $v_1$, мы всегда сможем раскрасить $v_0$ и 2-вершины $w_1$ и $x_1$). Продолжая этот процесс, мы придем к тому, что $v_{k+1}$ получает по одному запрету от $v_k$ и $s'_{k+1}$ и два запрета от $s_{k+1}$, т. е. $v_{k+1}$ можно раскрасить. Далее красим вершины цепи $P$ в допустимые цвета в обратном порядке, а затем окрасим 2-вершины цепи $P'$ и все вершины $w_i$. Лемма 9 доказана.

### 2.3. Правила перераспределения зарядов

*Правило* R1. Любая 2-вершина, принадлежащая 1-цепи, получает по 1 заряда от концов этой цепи, а 2-вершина, принадлежащая 2-цепи, получает заряд 2 от соседней вершины степени больше 2.

Заметим, что после применения правила R1 заряд 2-вершины становится равным 0, заряды (2,1,1)- и (2,2,0)-вершин равны $-1$, а заряды всех остальных вершин неотрицательны.

Введём понятие *спонсора* следующим образом. Каждую (2,1,1)-вершину $v_0$ снабдим *цепью питания* $FP = v_0 v_1 \ldots v_{k+1}$, где $v_1, \ldots, v_k$ являются (1,1,1)-вершинами, а $v_{k+1}$ таковой не является, и пусть при этом цепь питания является кратчайшей с указанными свойствами. Такая цепь существует в силу конечности графа $G_0$ согласно лемме 8. По лемме 9 вершина $v_{k+1}$ не является (2,1,1)-вершиной. Тогда $v_{k+1}$ назовём *спонсором* для (2,1,1)-вершины $v_0$. Из леммы 9 также следует, что цепи питания двух разных (2,1,1)-вершин не пересекаются в (1,1,1)-вершине. Следовательно, в каждую 1-цепь любого спонсора приходит не более одной цепи питания.

*Правило* R2. Каждая (2,1,1)-вершина получает заряд 1 по цепи питания от своего спонсора.

После применения правила R2 заряд (2,1,1)-вершины становится равным 0, заряд (2,2,0)-вершины остается равным $-1$, а заряды всех остальных вершин, кроме (2,1,0)-вершины, являющейся спонсором, и (1,1,0)-вершины, из которой выходят 2 цепи питания, неотрицательны.

Действительно, если $d(v) \geqslant 4$, то каждая цепь забирает от $v$ не более двух единиц заряда по правилам R1 и R2 (причём ровно 2 забирают только 2-цепи и 1-цепи, входящие в цепь питания, в силу того, что цепи питания не ветвятся), но $5d(v) - 12 \geqslant 2d(v)$. Если же $d(v) = 3$, то достаточно заметить, что (1,1,1)-вершины имеют заряд 0, а каждая из остальных 3-вершин, кроме вершин типа (2,1,1), инцидентна 0-цепи и, имея исходный заряд 3, может приобрести отрицательный заряд лишь тогда, когда по двум её остальным цепям уходит по 2 единицы заряда.

Назовем *перегруженной* 3-вершину, инцидентную 0-цепи и двум *нагруженным* цепям (уносящим по две единицы заряда), т. е. являющимся либо 2-цепями, либо 1-цепями, принадлежащими цепи питания.

Пусть $P = s'_0 y_0 x_0 v_0 x_1 v_1 x_2 \ldots v_k x_{k+1} v_{k+1}$ — нагруженная цепь, выходящая из перегруженной вершины $v_{k+1}$, где $v_0$ — (2,1,1)-вершина, $v_1, \ldots,$ $v_k$ — (1,1,1)-вершины, $x_0, \ldots, x_k$ и $y_0$ — 2-вершины. Тогда 2-вершины не из $P$, смежные с $v_i$, где $0 \leqslant i \leqslant k$, обозначим через $w_i$, а вершину, смежную с $w_i$ и отличную от $v_i$, — через $s_i$. Вершины $s'_o$ и все $s_i$ назовём *граничными* вершинами нагруженной цепи $P$, причем $s'_o$ будем называть *терминальной*, а все $s_i$ — *боковыми*. Кроме того, (1,1,1)-вершины $v_0, \ldots, v_k$ будем называть *внутренними* для $P$.

Если нагруженная цепь является 2-цепью, то это случай $k = -1$, когда у неё нет ни внутренних, ни боковых вершин.

**Лемма 10**. *В $G_0$ нет ребра, соединяющего две перегруженные вершины.*

**Замечание 3.** В частности, в $G_0$ нет двух смежных $(2, 2, 0)$-вершин $u$, $w$.

Действительно, удалим $u$, $w$ и 2-вершины, которые принадлежат 2-цепям (эти 2-цепи не имеют общих 2-вершин, поскольку $g(G_0) \geqslant 5$ по условию). Ориентированную раскраску полученного графа легко продолжить до раскраски графа $G_0$: так как по каждой 2-цепи на $u$ и $w$ приходит по одному запрету. Поэтому имеется случай, описанный в следствии 2, когда на смежных вершинах $u$ и $w$ имеется по 3 допустимых цвета.

Доказательство леммы 10. Пусть $u$ и $w$ — смежные перегруженные вершины, из которых выходят нагруженные цепи $P_1, P_2, P_3, P_4$. Напомним, что по лемме 9 никакие две цепи питания не могут пересекаться в (1,1,1)-вершине. Отсюда, в частности, следует, что ни $u$, ни $w$ не может являться боковой для какой-нибудь $P_i$. Действительно, тогда боковая вершина цепи $P_i$ принадлежит другой цепи питания $P_j$, что невозможно.

*Случай* 1. Никакая граничная вершина цепи $P_i$ не является внутренней для другой вершины из $P_i$.

Удалим вершины $u$, $w$, внутренние вершины цепей $P_1, P_2, P_3, P_4$ и все остальные 2-вершины, которые принадлежат инцидентным 1-цепям (отметим, что граничные вершины ни одной цепи $P_i$ из графа удалены не будут, так как $g(G_0) \geqslant 5$). Ориентированную раскраску полученного графа легко продолжить до раскраски графа $G_0$. Поскольку по каждой нагруженной цепи на $u$ и $w$ приходит по одному запрету (от конца нагруженной цепи строим допустимые множества мощности 2, затем раскрашиваем вершины цепи от начала к концу, когда определится цвет этого начала, т. е. вершины $u$ или $w$). Вновь (как и при доказательстве замечания 3) возникает случай, описанный в следствии 2, когда на смежных вершинах $u, w$ имеется по 3 допустимых цвета.

Заметим, что по лемме 9 никакая вершина из одной цепи питания не может соединяться с вершиной из другой цепи питания посредством 1-цепи. Отсюда следует, что для завершения доказательства леммы 10 остается рассмотреть

*Случай* 2. Терминальная вершина цепи $P_i$ является внутренней

(2,1,1)-вершиной в другой цепи $P_j$.

Таких пар зависимых нагруженных цепей, проходящих через смежные вершины $u$, $w$ может быть одна или две. Как и в случае 1 удалим $u$, $w$, внутренние вершины цепей $P_1, P_2, P_3, P_4$ и 2-вершины, принадлежащие инцидентным им 2-цепям. Пусть $P_i$ соединена 2-цепью с $P_j$. Будем считать, что $P_j$ не вырождается в 2-цепь, т. е. у неё есть боковые вершины.

Данный случай принципиально не отличается от случая 1: также строим допустимые множества по всем неспаренным нагруженным цепям от конца к началу (вершине $u$ или $w$), а затем окрасим в допустимые цвета каждую вершину из этих цепей от начала к концу. Из пары нагруженных цепей $P_i$ и $P_j$, соединенных 2-цепью, цепь $P_j$ «разбираем», так как её вершины можно окрасить в последнюю очередь (поэтому она налагает 0 запретов на начальную вершину $u$ или $w$). Что касается второй из двух спаренных цепей, то если она нетривиальна, окрасим её от конца к началу (при этом она налагает 2 запрета на свою начальную вершину) следующим образом.

Пусть последняя из боковых вершин цепи $P_i$ оставляет тройку $Z_i$ допустимых цветов для (2,1,1)-вершины $z_i$ цепи $P_i$ (аналогично определяется множество $Z_j$ для (2,1,1)-вершины $z_j$ цепи $P_j$). Каждый из крайних цветов в $Z_j$ даёт по 2-цепи по одному запрету на цвет вершины $z_i$. Поэтому в $Z_i$ найдется цвет, пусть $\alpha$, не запрещённый по 2-цепи ни при каком выборе крайнего цвета на вершине $z_j$. Красим $z_i$ в $\alpha$ и вычеркиваем центральный цвет из множества $Z_j$ цветов, допустимых для $z_j$ (аналогично тому, как мы действовали в доказательстве случая 2 леммы 8). Теперь заметим, что мы можем раскрасить цепь $P_j$ в последнюю очередь, независимо от того, как будут раскрашены вершины $u$ и $w$. Действительно, $z_j$ не получает больше запрета по 2-цепи от $z_i$, поэтому согласно следствию 3 её можно раскрасить последней, так как для неё имеется либо три, либо два несоседних допустимых цвета. Аналогичным образом все вершины цепи $P_i$ можно окрасить по следствию 3 от начала до конца. Таким образом, $P_j$ не накладывает запретов на цвет своей начальной вершины.

А если $P_i$ тривиальна и, скажем, инцидентна $u$, то каждый из крайних цветов в $Z_j$ даёт по 2-цепи по одному запрету на цвет вершины $u$. В результате из пяти исходных цветов $0, 1, \ldots, 4$ на $u$ остаются три допустимых цвета, а цепь $P_j$ снова можно разобрать и красить вершины от начала к концу по следствию 3 в последнюю очередь (в частности, никакой цвет на $u$ не мешает красить $z_j$ в один из двух крайних цветов из $Z_j$, а значит, вершину $z_j$ можно красить самой последней).

В большинстве вариантов мы приходим к выводу, что на $u$ и $w$ остаётся по три допустимых цвета, так что их можно раскрасить по замечанию 1.

*Подслучай* 2.1. $P_i$ и $P_j$ выходят из одной вершины $w$.

Как указывалось выше, вершина $w$ имеет три допустимых цвета (как при вырожденной, так и невырожденной $P_i$). Заметим, что две другие цепи накладывают на цвет вершины $u$ не более двух запретов (1+1, если они независимы и 0+2, если они замыкаются 2-цепью). Таким образом, на $u$ и $w$ остается по 3 допустимых цвета согласно следствию 2, и можно продолжить раскраску графа $G_0$, покрасив теперь $u$ и $w$.

*Подслучай* 2.2. Пусть $P_i$ выходит из вершины $u$, а $P_j$ — из $w$.

Теперь цепь $P_i$ оставляет 3 допустимых цвета для $u$, а $P_j$ налагает 0 запретов на $w$. Если вторая цепь питания $P_k$, начинающаяся в $w$, налагает на $w$ не более одного запрета, то $w$ может быть раскрашена после вершины $u$, а $u$ также имеет меньше запретов на раскраску, чем допустимых цветов. Остается предположить, что $w$ получает 2 запрета от $P_k$, но тогда $u$ не получает запретов от второй своей нагруженной цепи, т. е. $u$ и $w$ имеют по 3 допустимых цвета, так что их можно раскрасить по следствию 2. Лемма 10 доказана.

*Правило* R3. Любая перегруженная вершина получает заряд 1 от конца инцидентной ей 0-цепи.

Ввиду леммы 10 применение правила R3 корректно, и остаётся показать, что теперь заряд каждой вершины неотрицателен.

Предположим противное, что заряд вершины $u$ стал отрицательным. Тогда $u$ должна быть смежна с перегруженной вершиной $w$. Ясно также, что $d(u) = 3$, так как $5d(u) - 12 \geqslant 2d(u)$ при $d(u) \geqslant 4$. Но поскольку по ребру $uw$ вершина $u$ отправляет заряд 1, то по одной из двух оставшихся цепей она отправляет 2, а по другой — 1 (отправлять 2 по обеим цепям она не может, так как не является перегруженной ввиду леммы 10). Цепь $P_1$, забирающая от $u$ заряд 1, является либо 1-цепью, либо 0-цепью (дугой), ведущей в перегруженную вершину $z$; в этом случае нагруженные цепи, выходящие из $z$, обозначим через $P_{11}$ и $P_{12}$. Через $P_3$ и $P_4$ мы обозначаем нагруженные цепи, выходящие из $w$.

Покажем, что таких смежных вершин $u$ и $w$ не существует. Действуем так же, как в доказательстве леммы 10. А именно, удаляем из $G_0$ вершины $u$, $w$, внутренние вершины цепей $P_2, P_3, P_4$, а также либо 2-вершину $t$ цепи $P_1$ (если $t$ существует, то через $z'$ обозначим вершину, отличную от $u$, смежную с $t$), либо вершину $z$ и внутренние вершины цепей $P_{11}$ и

$P_{12}$ в противном случае.

Заметим, что боковая вершина одной из цепей $P_2, P_3, P_4$, за исключением случая, когда $z' = s_1$, не может совпадать с вершиной $u$ (если $P_1$ вырождается в 1-цепь, т. е. если бы $z'$ принадлежала одной из цепей питания $P_i \in \{P_2, P_3, P_4\}$, то это противоречило бы выбору цепи питания $P_i$ как кратчайшей: тогда через $P_1$ проходила бы более короткая цепь питания для концевой (2,1,1)-вершины цепи $P_i$ чем сама цепь $P_i$).

Рассмотрим случай, когда $z' = s_1$. Цепь $P_1$ является 1-цепью, а поскольку $g(G_0) \geqslant 5$, то можно считать, что $z'$ принадлежит цепи $P_4$. Если цепи $P_2, P_3, P_4$ не замыкаются между собой, то они дают по одному запрету на вершины $u$, $w$ и $z'$ соответственно. Остаётся окрасить вершины 5-цикла $z'pwut$. Сначала заметим, что при окраске вершины $z'$ в любой допустимый цвет на вершины $w, u$ приходит по 2 запрета, т. е. остаётся не менее двух допустимых цветов. За счёт выбора цвета на $z'$ можно добиться, чтобы на $w$ осталось 3 или 2 несоседних цвета. Тогда $w$ и $u$ можно окрасить по замечанию 1. Действительно, пусть на $z'$ запрещён цвет $\alpha$, а на $w$ — цвет $\beta$. Сначала пробуем окрасить $z'$. Нас не устраивает только случай, когда на $w$ запрещены цвета $\beta+1, \beta+2$, либо цвета $\beta+3, \beta+4$. В первом случае мы окрасим $z'$ в цвет $\alpha+3$, а во втором — в цвет $\alpha+1$. Тогда в силу транзитивности циркулянта $C(5;1,2)$ на $w$ в качестве допустимых цветов останутся несоседние цвета $\beta+1, \beta+4$, что и требовалось показать.

Теперь рассмотрим возможные замыкания цепей $P_2, P_3, P_4$ (напомним, что цепь $P_4$ проходит через $z'$). Если $P_2$ замыкается с $P_3$, то, как выше, получаем (используя симметрию между $w$ и $u$), что на $w$ допустимы три подряд идущих цвета, а на $u$ все пять цветов являются допустимыми. Так как при окраске вершины $z'$ в любой допустимый цвет на $u$ останется 3 допустимых цвета $\beta-1, \beta, \beta+1$, то достаточно выбрать такой цвет на $z'$, чтобы на $w$ осталось 2 допустимых цвета. Но это сделать легко: ведь только два цвета на $z'$ могут исключать пару цветов $\beta-1, \beta$, либо пару цветов $\beta, \beta+1$ (тогда на $w$ остаётся лишь один допустимый цвет).

Остаётся рассмотреть вырожденный случай, когда цепь $P_4$ замыкается с одной из цепей $P_2$, $P_3$, например, с $P_2$. Как выяснено при доказательстве леммы 10, теперь из $z'$ в $u$ ведёт 2-цепь, т. е. на $w$ имеется четыре допустимых цвета (все, кроме $\beta$), а на $z'$ и $u$ все цвета являются допустимыми. Поскольку любой цвет на $z'$ запрещает на $u$ три цвета (через 1-цепь и 2-цепь), за счёт выбора цвета на $z'$ можно добиться, чтобы на $w$ осталось два несоседних допустимых цвета. Но это уже проделывалось в случае, когда $z' = s_1$.

Возвращаемся к основному случаю, когда $z' \neq s_1$. Если нагруженные цепи $P_2, P_3, P_4$ и, быть может, $P_{11}$ и $P_{12}$ не замыкаются между собой 2-цепями, то $P_1$ накладывает не более 2 запретов на $u$, $P_2$ — один запрет, а каждая из цепей $P_3$, $P_4$ — по одному запрету на $w$. Следовательно, $u$ имеет 2 допустимых цвета, а $w$ — три. Значит, по следствию 2 они могут быть раскрашены. Затем красим нагруженные цепи (и быть может вершину $z$) в допустимые цвета, как в случае 1 доказательства леммы 10.

Переходим к рассмотрению замыканий нагруженной цепи с другой нагруженной цепью.

Назовём *одноимёнными* цепи $P_3$ и $P_4$ при вершине $w$, а также цепи $P_{11}$ и $P_{12}$ при вершине $z$ (если $z$ существует).

**Замечание 4.** Если одноименные цепи замыкаются друг на друга, либо не замыкаются ни на какую другую (нагруженную либо вырожденную цепь $P_1$), то они приносят на свою общую начальную вершину либо 0+2, либо 1+1 ограничений. Тем самым их общая начальная вершина получает 3 допустимых цвета и имеющаяся конфигурация оказывается эквивалентна такой конфигурации, в которой эта пара одноимённых цепей вместе с дугой $uw$ либо с дугой $uz$ заменяется на 2-цепь, инцидентную $u$.

*Случай* 1. Цепь $P_1$ нетривиальна.

Обратим внимание на симметрию пар смежных вершин $u$, $z$ и $u$, $w$ при вершине $u$, т. е. на равноправие пар цепей $P_3$, $P_4$ и $P_{11}$, $P_{12}$. Если в одной из этих пар одноименные цепи замыкаются друг на друга, либо не замыкаются ни на какую другую, то согласно замечанию 4 рассматриваемая конфигурация становится эквивалентной той, что описана в лемме 10. Поэтому предположим, что это не так.

Поскольку $P_2$ может замыкаться не более чем с одной из цепей $P_3$, $P_4$, $P_{11}$, $P_{12}$, остаётся рассмотреть случай, когда одна из цепей $P_3$, $P_4$ замыкается с одной из цепей $P_{11}$, $P_{12}$. Из симметрии можно предположить, что $P_3$ замыкается с $P_{11}$. Если одна из цепей $P_3$, $P_{11}$ нетривиальна, то можно считать, что цепь $P_{11}$ разбираема, а следовательно, даёт 0 ограничений на $z$, а $P_3$ раскрашиваема и даёт 2 ограничения на $w$. Поскольку в любом случае $P_{12}$ даёт не более двух ограничений на $z$, то $z$ имеет 3 допустимых цвета. Значит, смежные вершины $z$, $u$ дают не более одного запрета вершине $u$, т. е. эквивалентны 2-цепи, и мы снова попадаем в ситуацию леммы 10.

Предположим, что цепи $P_3$, $P_{11}$ тривиальны, т. е. существует 2-цепь, соединяющая вершину $z$ с вершиной $w$. Сначала рассмотрим случай, когда цепи $P_4$, $P_{12}$ вырождаются в 2-цепь, соединяющую $z$ с $w$. Тогда по цепи $P_2$ на $u$ приходит 1 запрет, и мы красим $u$ в произвольный допустимый цвет. Можно считать, что в результате на $z$ остались цвета $\alpha, \alpha+1$, а на $w$ – цвета $\beta, \beta+1$. Если цвет $\alpha$ запрещает на вершине $w$ по двум 2-цепям цвета $\beta, \beta+1$, то $\alpha+1$ запрещает цвета $\beta+1, \beta+2$. Следовательно, можно покрасить $z$ в $\alpha+1$, а $w$ – в $\beta$.

Пусть теперь $P_4 \neq P_{12}$. Тогда возникает два подслучая. Если цепь $P_2$ раскрашиваема, то из симметрии можно предположить, что цепь $P_4$ разбираема. Тогда $P_{12}$ оставляет на вершине $z$ четыре допустимых цвета, $P_4$ – все пять цветов на $w$, а $P_2$ – 3 допустимых на $u$, и можно окрасить сначала $u$, затем $z$, а потом $w$.

Теперь предположим, что $P_2$ либо разбираема, либо не замыкается ни на $P_4$, ни на $P_{12}$, т. е. вершина $u$ имеет не менее 4 допустимых цветов. Тогда из симметрии можно считать, что $w$ имеет не менее 3 допустимых цветов, а $z$ – не менее 4. Каждый из допустимых на $w$ цветов запрещает три (последовательных) цвета на $u$. Следовательно, найдется допустимый на $w$ цвет, который оставит на $u$ не менее двух допустимых цветов. Разумеется, на $z$ через 2-цепь от $w$ придет не более одного запрета. В результате смежные вершины $z$ и $u$ можно покрасить по следствию 2.

*Случай* 2. $P_1$ есть 1-цепь $utz'$.

Если цепи $P_3$, $P_4$ либо замыкаются друг на друга, либо не замыкаются на $P_2$, то согласно замечанию 4 рассматриваемая конфигурация становится эквивалентной следующей.

**Лемма 7$'$.** *В* $G_0$ *нет* 3*-вершины, инцидентной* 1*-цепи,* 2*-цепи и нагруженной цепи.*

**Доказательство.** Пусть при вершине $u$ есть 1-цепь $P_2$, нагруженная цепь $P_2$ и 2-цепь $P_{34}$. Так как $P_2$ не зацикливается с $P_1$ по вершине $z'$, то $P_2$ и $P_{34}$ вместе дают на $u$ два запрета, как и $P_1$. Поэтому $u$ можно покрасить по следствию 2. Лемма 7$'$ доказана.

Можно считать, что $P_4$ замыкается на $P_2$ по 2-цепи. Если в этой паре разбираемой является $P_4$, то она приносит 0 запретов на $w$, а поскольку $P_3$ приносит 1 запрет, то $w$ имеет 4 допустимых цвета, а стало быть ее можно будет покрасить после вершины $u$. В свою очередь $u$, освободившись от запретов по ребру $uw$ и цепи $P_2$, имеет 3 допустимых цвета и поэтому может быть окрашена после вершины $z'$.

Теперь предположим, что разбираемой является $P_2$. Тогда $u$ фактически становится 2-вершиной, а на $w$ остается 2 допустимых цвета от цепей $P_3$ и $P_4$. Поэтому $w$ снова может быть окрашена после вершины

$z'$, а затем может быть покрашены $t$ и $u$.

Отметим, что последнее также непосредственно вытекает из леммы 7′.

Итак, после перераспределения зарядов по правилам R1–R3 заряды всех вершин становятся неотрицательными, что противоречит (2). Теорема 2 доказана.

### 3. Доказательство следствия 1

Рассмотрим минимальный контрпример $G_0$ к следствию 1. Очевидно, что $G_0$ связен. Поэтому формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| \geqslant 1$ для $G_0$ можно записать в виде $(10|E| - 12|V|) + (2|E| - 12|F|) \leqslant -12$, где $F$ — множество его граней. Отсюда $\sum\limits_{v \in V}(5d(v) - 12) + \sum\limits_{f \in F}(r(f) - 12) < 0$, где $r(f)$ — ранг грани $f$. Следовательно, $\sum\limits_{v \in V}(5d(v) - 12) < 0$. Значит, $\mathrm{mad}(G) < 12/5$, поскольку каждый подграф плоского либо проективно плоского графа является таким же графом.

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25, N 3. P. 211–236.
2. **Borodin O. V., Fon-Der-Flaass D., Kostochka A. V., Raspaud A., Sopena E.** On deeply critical oriented graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 2001. V. 81, N 1. P. 150–155.
3. **Borodin O. V., Kim S.-J., Kostochka A. V., West D.B.** Homomorphisms from sparse graphs with large girth // J. Combin. Theory. Ser. B. 2004. V. 90, N 1. P. 147–159.
4. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Nešetřil J., Raspaud A., Sopena E.** On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth // Discrete Math. 1998. V. 188, N 1–3. P. 73–85.
5. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Nešetřil J., Raspaud A., Sopena E.** On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph // Discrete Math. 1999. V. 206, N 1–3. P. 77–90.
6. **Courselle B.** The monadic second order logic of graphs VI: On several representaitions of graphs by relational structures // Discrete Appl. Math. 1994. V. 54, N 2–3. P. 117–149.
7. **Hell P., Nešetřil J.** On the complexity of $H$-coloring // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 48, N 1. P. 92–110.
8. **Kostochka A. V., Luczak T., Simonyi G., Sopena E.** On the minimum number of edges giving maximum oriented chromatic number // Contemporary trends in discrete mathematics. Providence: Amer. Math. Soc., 1999. P. 179–182 (DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci,; V. 49).

9. **Kostochka A. V., Sopena E., Zhu X.** Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs // J. Graph Theory. 1997. V. 24, N 4. P. 331–340.

10. **Nešetřil J., Raspaud A., Sopena E.** Colorings and girth of oriented planar graphs // Discrete Math. 1997. V. 165–166, N 1–3. P. 519–530.

11. **Raspaud A., Sopena E.** Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs // Inform. Process. Lett. 1994. V. 51, N 4. P. 171–174.

12. **Sopena E.** The chromatic number of oriented graphs // J. Graph Theory. 1997. V. 25, N 3. P. 191–205.

Статья поступила
27 сентября 2005 г.

Адреса авторов:

*О. В. Бородин*
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

*А. О. Иванова*
Якутский государственный университет
им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48,
677000 Якутск, Россия.
E-mail: shmgnanna@mail.ru

*А. В. Косточка*
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: sasha@math.nsc.ru
и Университет штата Иллинойс,
кафедра математики,
Урбана, IL-61801, США
E-mail: kostochk@math.uiuc.edu