ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2006. Серия 1. Том 13, № 1. 33–44

УДК 519.718

О РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ВЗВЕШЕННОМ МУЛЬТИГРАФЕ*)

В. Г. Визинг, А. В. Пяткин

Правильная раскраска инциденторов ориентированного взвешенного мультиграфа называется допустимой, если разность между цветами конечного и начального инциденторов каждой дуги не меньше веса этой дуги. Наименьшее число цветов, необходимое для допустимой раскраски инциденторов, называется инциденторным хроматическим числом мультиграфа. Исследуется задача отыскания инциденторного хроматического числа ориентированного мультиграфа. Доказывается NP-полнота этой задачи. Найдены верхние оценки для инциденторного хроматического числа. Приводится приближённый полиномиальный алгоритм решения задачи с максимальной относительной погрешностью, меньшей 2.

1. Постановка задачи

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E, каждой дуге которого сопоставлено некоторое целое неотрицательное число $p(e)$, называемое *весом* дуги.

Через $d^-(v)$ и $d^+(v)$ обозначаются полустепени захода и исхода вершины v, а через $d(v)$ — ее степень, т. е. $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$. Максимальные значения этих величин, которые достигаются в мультиграфе G, обозначаются соответственно через $\Delta^-(G), \Delta^+(G)$ и $\Delta(G)$. Мультиграф G называется мультиграфом степени Δ, если $\Delta(G) = \Delta$.

Если $e = uv$ дуга мультиграфа, то пара (u, e) называется *начальным*, а пара (v, e) *конечным инциденторами* этой дуги. При этом будем говорить, что инцидентор (u, e) *примыкает* к вершине u, а инцидентор (v, e) — к вершине v. Два инцидентора называются *однотипными*, если они оба являются либо начальными, либо конечными. Инциденторы, примыкающих к одной вершине, называются *смежными*.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395).

Будем называть цветами натуральные числа; множество цветов обозначается через C. Если $a, b \in C$ и $a \leqslant b$, то под интервалом $[a, b]$ понимается множество всех цветов c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$.

Раскраской некоторого множества инциденторов называется его отображение в C. Раскраска инциденторов называется *правильной*, если смежные инциденторы имеют разные цвета. Пусть при некоторой раскраске разность между цветом конечного и цветом начального инциденторов дуги e равна $q(e)$. Тогда будем говорить, что эта дуга раскрашена со *скачком* $q(e)$. Скачок называется *допустимым*, если выполняется неравенство $q(e) \geqslant p(e)$. Правильная раскраска инциденторов называется *допустимой*, если каждая дуга раскрашена с допустимым скачком. *Инциденторным хроматическим числом* $\chi_I(G)$ мультиграфа G называется наименьшее натуральное k такое, что существует допустимая раскраска всех инциденторов мультиграфа в k цветов, т. е. цветами из интервала $[1, k]$. Очевидно, что $\chi_I(G) \geqslant \Delta(G)$. Допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, \chi_I(G)]$ будем называть *минимальной* раскраской мультиграфа G.

В настоящей статье изучается задача отыскания инциденторного хроматического числа ориентированного взвешенного мультиграфа. Следует отметить, что если веса всех дуг одинаковы и равны числу p, то это задача решается точно. При $p = 0$ это сделано в [5], при $p = 1$ — в [7], при произвольном p — в [6]. Различным задачам, связанным с раскраской инциденторов мультиграфа с постоянным весом дуг, посвящено значительное число работ; достаточно полный обзор полученных до 2004 года результатов имеется в [2]. В рассматриваемой нами общей постановке задача построения минимальной раскраски является NP-трудной. Это доказывается в разделе 2. Верхние оценки инциденторного хроматического числа и приближённый полиномиальный алгоритм решения задачи приводятся в разделе 5. Они основываются на результатах, изложенных в разделах 3 и 4.

2. Доказательство NP-полноты

В этом разделе доказывается NP-полнота следующей задачи о раскраске инциденторов ориентированного взвешенного мультиграфа.

Основная задача. *Дан взвешенный мультиграф $G = (V, E)$ степени Δ и число $\chi \geqslant \Delta$. Существует ли допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G в χ цветов?*

Принадлежность этой задачи к классу NP очевидна. Нам потребуется следующая известная NP-полная [3]:

Задача 3-ВЫП. *Дано m дизъюнкций $C_1, C_2, \ldots, C_m$, каждая из которых содержит по 3 литерала (под литералом понимается переменная или её отрицание). Можно ли назначить этим переменным такие значения истинности, чтобы каждая дизъюнкция содержала по крайней мере один истинный литерал?*

Теорема 1. *Основная задача* NP*-полна.*

Доказательство. Построим сведéние задачи 3-ВЫП к основной задаче. Пусть D — максимальное число вхождений литерала в дизъюнкции (максимум берется по всем литералам). Положим $\Delta = \max\{D+1, 3\}$. Каждой переменной X поставим в соответствие подграф G_X, изображенный на рис. 1. Его вершинами являются $a_X, b_X, x, \bar{x}, x_1, x_2, \ldots, x_{k(X)}, \bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, x_{\bar{l(X)}}$. Здесь через $k(X)$ и $l(X)$ обозначено число вхождений в дизъюнкции литералов X и $\bar{X}$ соответственно. Подграф G_X содержит $\Delta - 2$ дуги $a_X b_X$ веса 1, дуги $xb_X, \bar{x}b_X$ веса 0, дуги xx_i веса $\Delta - i - 1$; $i = 1, 2, \ldots, k(X)$, и дуги $\bar{x}\bar{x_j}$ веса $D - j - 1; j = 1, 2, \ldots, l(X)$.

Вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{k(X)}, \bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, x_{\bar{l(X)}}$ назовём *представителями* литералов X и $\bar{X}$ соответственно. Они будут иметь в мультиграфе G степень 2. Вершины a_X, b_X, x и $\bar{x}$ имеют в G ту же степень, что и в G_X. Конечные инциденторы дуг $xx_i, i = 1, 2, \ldots, k(X)$, и $\bar{x}\bar{x_j}, j = 1, 2, \ldots, l(X)$, назовём *индикаторами* литералов X и $\bar{X}$ соответственно.

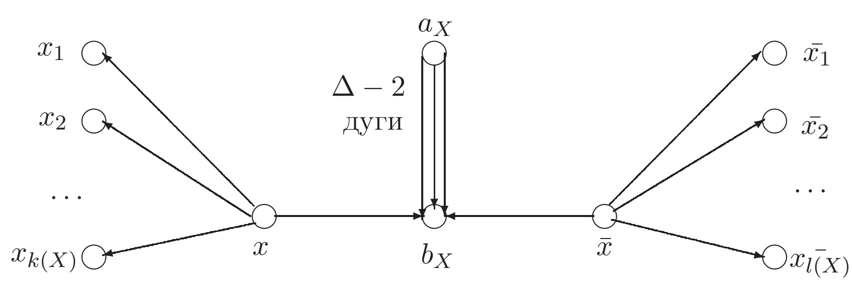

Рис. 1. Подграф G_X

Для каждой дизъюнкции C сначала выберем по одному представителю входящих в неё литералов. Представители литералов выбираются произвольно, но так, чтобы каждый представитель был выбран ровно для одной дизъюнкции. После этого дизъюнкции C ставим в соответствие подграф G_C, состоящий из вершины c, соединённой дугами веса $\Delta - 3$ с выбранными представителями входящих в C литералов (см. рис. 2).

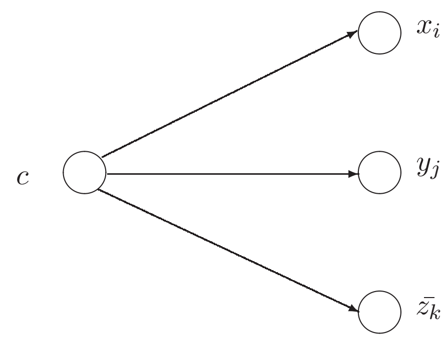

Рис. 2. Подграф G_C для дизъюнкции $C = X \vee Y \vee \bar{Z}$

В результате получим мультиграф G степени $\Delta \geqslant 3$. Установим некоторые его свойства.

Свойство 1. При любой допустимой раскраске инциденторов подграфа G_X в Δ цветов либо все индикаторы литерала X окрашены в цвет Δ, либо все индикаторы литерала $\bar{X}$ окрашены в цвет Δ.

Действительно, так как вершина b_X имеет степень Δ, то один из примыкающих к ней инциденторов должен быть окрашен цветом 1. Это не может быть конечный инцидентор одной из дуг $a_X b_X$, так как эти дуги имеют вес 1. Следовательно, либо инцидентор (b_X, xb_X), либо инцидентор $(b_X, \bar{x}b_X)$ окрашен цветом 1. Без ограничения общности можно считать, что имеет место первый вариант. Тогда инцидентор (x, xb_X) окрашен цветом 1. Индукцией по i нетрудно показать, что единственный способ окрасить дугу xx_i со скачком $\Delta - i - 1$ заключается в окрашивании инцидентора (x, xx_i) в цвет $i+1$, а инцидентор (x_i, xx_i) — в цвет Δ, т. е. все индикаторы литерала X окрашиваются в цвет Δ.

Свойство 2. Существует допустимая раскраска инциденторов подграфа G_X в Δ цветов, при которой все индикаторы литерала X окрашены в цвет, меньший Δ; аналогичное утверждение верно для индикаторов литерала $\bar{X}$.

Действительно, раскрасим оба инцидентора дуги xb_X цветом Δ, а оба инцидентора дуги $\bar{x}b_X$ — цветом 1. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k(X)$ инцидентор (x, xx_i) окрасим цветом i, а инцидентор (x_i, xx_i) — цветом $\Delta - 1$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, l(X)$ инцидентор $(\bar{x}, \bar{x}\bar{x_j})$ окрасим цветом $i+1$, а инцидентор $(\bar{x_j}, \bar{x}\bar{x_j})$ — цветом Δ. Начальные инциденторы дуг $a_X b_X$ красим цветами из $[1, \Delta - 2]$, а конечные — цветами из $[2, \Delta - 1]$. В результате получим допустимую раскраску подграфа G_X в Δ цветов, при которой все индикаторы литерала X окрашены в цвет, меньший Δ. Такая же раскраска для индикаторов литерала $\bar{X}$ строится аналогичным образом.

Свойство 3. Дуги, инцидентные вершине c, можно раскрасить цветами из $[1, \Delta]$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из индикаторов, выбранных для дизъюнкции C литералов, окрашен в цвет, меньший Δ.

Действительно, при любой допустимой раскраске подграфа G_C цветами из $[1, \Delta]$ начальные инциденторы, примыкающие к c дугам, получат цвета 1, 2, 3. Если начальный инцидентор дуги cx_i окрашен цветом 1 или 2, то конечный инцидентор всегда можно окрасить либо цветом $\Delta - 1$, либо цветом Δ, поскольку степень вершины x_i в мультиграфе G равна 2. Если же начальный инцидентор дуги cx_i окрашен цветом 3, то конечный инцидентор этой дуги должен получить цвет Δ, а, значит, второй примыкающий к x_i инцидентор (т. е. индикатор данного представителя литерала) должен быть окрашен цветом, меньшим Δ.

Покажем теперь, что раскраска мультиграфа G в $\chi = \Delta$ цветов существует тогда и только тогда, когда переменным задачи 3-ВЫП можно присвоить такие значения истинности, что каждая дизъюнкция содержит по крайней мере один истинный литерал.

Действительно, если раскраска существует, то переменной X присваивается значение истина, если хоть один из индикаторов литерала X окрашен в цвет, меньший Δ, и ложь — в противном случае. Согласно свойству 1, лишь индикаторы истинных литералов могут быть окрашены цветом, меньшим Δ, а по свойству 3 для каждого подграфа G_C существует такой индикатор. Следовательно, каждая дизъюнкция содержит по крайней мере один истинный литерал.

Если есть назначение истинности, при котором все дизъюнкции выполняются, то по свойству 2 для каждой истинной переменной X подграф G_X окрасим так, что все индикаторы литерала X получат цвет, меньший Δ, а для каждой ложной переменной Yподграф G_Y окрасим так, чтобы все индикаторы литерала $\bar{Y}$ получили цвет, меньший Δ. Тогда для каждой дизъюнкции C хотя бы один из индикаторов выбранных для неё представителей литералов окрашен в цвет, меньший Δ, и подграф G_C можно докрасить по свойству 3. Теорема 1 доказана.

3. Свойства минимальной раскраски

Установим некоторые свойства минимальных раскрасок.

Утверждение 1. *Пусть мультиграф G' получается из мультиграфа G переориентацией всех дуг. Тогда $\chi_I(G') = \chi_I(G)$.*

Доказательство. Пусть $\chi_I(G) = T$ и f — минимальная раскраска мультиграфа G. Положим $g(i) = T + 1 - f(i)$ для каждого инцидентора i. Нетрудно видеть, что функция g задает допустимую раскраску инцидентов мультиграфа G' с помощью цветов из $[1, T]$. Утверждение 1 доказано.

Введём два понятия, заимствованные из [1]. Пусть имеются раскраски f и g некоторого множества S инциденторов. Переход от раскраски f к раскраске g называется *монотонной перекраской*, если для любых $i', i'' \in S$ таких, что $f(i') < f(i'')$, выполняется неравенство $g(i') < g(i'')$. Очевидно, что в результате монотонной перекраски различно окрашенные инциденторы остаются различно окрашенными.

Теперь введём понятие двудольной интерпретации мультиграфа. Двудольный мультиграф B с множеством дуг E условимся записывать в виде $B = (X, Y; E)$, где X, Y — множества вершин соответственно первой и второй долей. Двудольный мультиграф $B(G) = (V', V''; E')$ называется *двудольной интерпретацией* мультиграфа $G = (V, E)$, если выполняются следующие условия:

а) $|V'| = |V''| = |V|$, причем каждая вершина $v \in V$ имеет образы $v' \in V'$ и $v'' \in V''$;

б) каждой дуге $e = uv \in E$ взаимно однозначным образом соответствует дуга $e' = u'v'' \in E'$, имеющая тот же вес.

Утверждение 2. *Для любого мультиграфа G имеет место равенство* $\chi_I(G) = \max\{\Delta(G), \chi_I(B(G))\}$.

Доказательство. Пусть $T = \max\{\Delta(G), \chi_I(B(G))\}$. Так как любая допустимая раскраска мультиграфа G естественным образом порождает допустимую раскраску мультиграфа $B(G)$, то неравенство $\chi_I(G) \geqslant T$ очевидно. Докажем обратное неравенство.

Построим минимальную раскраску инциденторов мультиграфа $B(G)$. Затем начальный и конечный инциденторы каждой дуги e мультиграфа G окрасим также, как окрашены начальный и конечный инциденторы соответствующей дуги e' мультиграфа $B(G)$. Получим раскраску f инциденторов мультиграфа G, при которой однотипные инциденторы, примыкающие к произвольной вершине, окрашены различно, и каждая дуга имеет допустимый скачок. Однако раскраска f может не быть правильной, так как могут быть одинаково окрашенными начальный и конечный инциденторы, примыкающие к одной вершине. Поэтому произведём следующую перекраску инциденторов, примыкающих к каждой вершине. Пусть v — произвольная вершина. Если $d^+(v) > 0$, то произведём монотонную перекраску примыкающих к v начальных инциденторов так, чтобы после перекраски их цвета попали в интервал $[1, d^+(v)]$. Далее, примыкающие к v конечные инциденторы (если они есть) монотонно перекрашиваем так, чтобы их цвета попали в интервал $[T - d^-(v) + 1, T]$. Так как $T \geqslant \Delta(G)$, то в результате получится допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, T]$. Следовательно, $\chi_I(G) = T$. Утверждение 2 доказано.

Двудольный мультиграф $H = (X, Y; E)$ назовём *односторонним*, если каждая его дуга исходит из вершины множества X и заходит в вершину множества Y. Двудольная интерпретация мультиграфа является односторонним двудольным мультиграфом. Утверждение 2 показывает, что задача минимальной раскраски инциденторов произвольного мультиграфа сводится к минимальной раскраске одностороннего двудольного мультиграфа. Заметим, что и мультиграф, строящийся в доказательстве теоремы 1, является односторонним двудольным мультиграфом.

Утверждение 3. *Пусть p_0 — минимальный вес дуги одностороннего двудольного мультиграфа H, и пусть мультиграф H' получается из H уменьшением веса всех его дуг на p_0. Тогда $\chi_I(H') = \chi_I(H) - p_0$.*

Доказательство. Пусть $T = \chi_I(H), T' = \chi_I(H')$. Рассмотрим минимальную раскраску мультиграфа H цветами из $[1, T]$. Уменьшим на p_0 цвета всех конечных инциденторов мультиграфа H; получим допустимую раскраску инциденторов мультиграфа H' цветами из $[1, T - p_0]$. Поэтому $T' \leqslant T - p_0$. Аналогично показывается, что $T \leqslant T' + p_0$. Таким образом, $T' = T - p_0$. Утверждение 3 доказано.

4. Паросочетание наименьшей мощности, покрывающее заданные вершины мультиграфа

Нам необходимо немного отступить от основной линии изложения. В настоящем разделе ориентация и взвешенность мультиграфа не играют никакой роли.

Пусть $H = (X, Y; E)$ — двудольный мультиграф степени Δ. Если W — паросочетание, то *чередующейся цепью* называется простая цепь, в которой попарно чередуются рёбра из W и $E \setminus W$. Чередующуюся цепь назовём *особой* цепью, если её начальная вершина принадлежит X и имеет степень меньше Δ, а первое ребро принадлежит W. По теореме Кенига [4] в двудольном мультиграфе всегда существует паросочетание, покрывающее все вершины максимальной степени. Имеет место следующая

Лемма 1. *В двудольном мультиграфе $H = (X, Y; E)$ паросочетание W является наименьшим по мощности паросочетанием, покрывающим* *все вершины степени Δ, тогда и только тогда, когда в H нет особой цепи, оканчивающейся в вершине из Y, степень которой меньше Δ.*

Доказательство. Необходимость. Пусть W — наименьшее паросочетание, покрывающее все вершины степени Δ. Последнее ребро любой чередующейся цепи, оканчивающейся в некоторой вершине $v \in Y$, принадлежит W. Если степень вершины v меньше Δ, то, удалив из W рёбра, принадлежащие цепи, и добавив к W остальные рёбра цепи, получим паросочетание меньшей мощности, покрывающее все вершины степени Δ, что противоречит выбору W. Значит, степень вершины v равна Δ, и цепь не является особой.

Достаточность. Пусть W — паросочетание, покрывающее все вершины степени Δ, для которого не существует указанной особой цепи. Предположим, что вопреки утверждению, существует паросочетание W' меньшей мощности, покрывающее все вершины степени Δ. Рассмотрим подграф, порождённый рёбрами из $W \cup W'$. Степень любой вершины этого подграфа не превышает 2. Так как $|W| > |W'|$, то найдётся компонента связности подграфа, являющаяся простой цепью, которая начинается и оканчивается рёбрами из W. Поскольку в такой цепи содержится нечётное число рёбер, то один из её концов лежит в X, а другой — в Y. А так как W' покрывает все вершины степени Δ, но не покрывает концов цепи, то степени обоих концов цепи меньше Δ. Значит, цепь является особой, что противоречит выбору W. Лемма 1 доказана.

Из доказательства леммы 1 видно, как из произвольного паросочетания, покрывающего все вершины максимальной степени двудольного мультиграфа, можно построить паросочетание наименьшей мощности, обладающее этим же свойством. Заметим, что паросочетание W находится за время $O(n^2\Delta^2)$.

Замечание. Аналогичным образом решается следующая более общая задача. Пусть G — произвольный мультиграф, V' — такое подмножество его вершин, которое можно покрыть паросочетанием. Требуется построить паросочетание наименьшей мощности, покрывающее V'.

5. Верхние оценки инциденторного хроматического числа

Введём понятие высоты дуги мультиграфа. Пусть $e = uv$ — дуга мультиграфа G. *Высотой* дуги e называется величина

$$h(e) = \max\{d^+(u), d^-(v)\} + p(e).$$

Максимальную высоту дуги мультиграфа G назовём высотой мультиграфа и обозначим через $\eta(G)$. Мультиграф G назовём *стабильным*, если высоты всех его дуг одинаковы и равны $\eta(G)$. Заметим, что в стабильном мультиграфе дуга имеет минимальный вес в том и только в том случае, когда она инцидентна вершине максимальной полустепени.

Лемма 2. *Пусть $H = (X, Y; E)$ — стабильный односторонний двудольный мультиграф. Тогда $\chi_I(H) = \eta(H)$.*

Доказательство. Пусть $\Delta(H) = \Delta$, а минимальный вес дуги равен p_0. При $p_0 > 0$ рассмотрим мультиграф H', полученный из H уменьшением веса всех его дуг на p_0. Так как $\eta(H') = \eta(H) - p_0 = \Delta$, то по утверждению 3 достаточно доказать, что $\chi_I(H') = \Delta$.

Применим индукцию по Δ. При $\Delta = 1$ равенство очевидно. Пусть $\Delta > 1$ и W — минимальное по мощности паросочетание в мультиграфе H', покрывающее все вершины степени Δ. Так как $\eta(H') = \Delta$, то каждая дуга паросочетания W в H' имеет вес 0. Удалим из H' рёбра паросочетания W. В получившемся мультиграфе высота всех дуг веса 0 и, возможно, некоторых других дуг стала равной $\Delta - 1$. Уменьшим на 1 веса всех тех дуг, высота которых не изменилась. В результате получим стабильный мультиграф $H'' = (X, Y; E \setminus W)$ такой, что $\eta(H'') = \Delta(H'') = \Delta - 1$. По предположению индукции $\chi_I(H'') = \Delta - 1$. Построим допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа H'' цветами из $[1, \Delta-1]$, после чего увеличим на 1 цвета всех конечных инциденторов (примыкающих к вершинам из Y). Получим допустимую раскраску f всех инциденторов мультиграфа H, не принадлежащих дугам из W, причем каждая дуга веса 0 раскрашена со скачком не менее 1.

Приступим теперь к раскраске инциденторов дуг из W. Пусть $e = xy \in W$. Если вершина y принадлежит особой цепи, то по лемме 1 её степень в мультиграфе H' равна Δ. Уменьшим на 1 цвета всех инциденторов, примыкающих к y. Затем инцидентор (y, e) окрасим в цвет Δ, а инцидентор (x, e) — в тот цвет из интервала $[1, \Delta]$, который отсутствует при вершине x. Если же вершина y не принадлежит особой цепи, то степень вершины x в мультиграфе H' равна Δ (иначе дуга xy была бы особой цепью). Увеличим на 1 цвета всех инциденторов, примыкающих к x. Затем окрасим инцидентор (x, e) в цвет 1, а инцидентор (y, e) — в тот цвет из интервала $[1, \Delta]$, который отсутствует при вершине y. Окрасив указанным образом инциденторы всех дуг из W, получим правильную раскраску g всех инциденторов мультиграфа H' цветами из $[1, \Delta]$.

Докажем, что g — допустимая раскраска. Очевидно, что дуги паросочетания W, которые в H' имеют вес 0, окрашены с неотрицательным скачком. Далее, каждая дуга, не инцидентная в H' ни одной вершине степени Δ, при переходе от раскраски f к раскраске g не изменила цветов своих инциденторов и осталась окрашенной с допустимым скачком. Предположим теперь, что дуга $e' = x'y' \notin W$ инцидентна хотя бы одной вершине степени Δ. Тогда её вес в H' равен 0, а при раскраске f она окрашена со скачком не менее 1. Покажем, что при переходе от раскраски f к раскраске g цвет только одного инцидентора этой дуги может измениться на 1. Поэтому при раскраске g дуга будет окрашена с неотрицательным скачком. Это очевидно, если только одна из вершин x' или y' в H' имеет степень Δ. Если же степени обеих вершин x' и y' в мультиграфе H' равны Δ, и производится перекраска инциденторов, примыкающих к вершине y', то это означает, что вершина y' принадлежит особой цепи. Рассмотрим дугу $x'y'' \in W$. Так как вершина y' принадлежит особой цепи, то вершина y'' также принадлежит особой цепи. Поэтому при раскраске дуги $x'y''$ производится перекраска инциденторов, примыкающих к y''. Значит, цвета инциденторов, примыкающих к x', при переходе от f к g не меняются. Следовательно, g является допустимой раскраской мультиграфа H' в Δ цветов. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если H — односторонний двудольный мультиграф, то $\chi_I(H) \leqslant \eta(H)$.*

Если G — произвольный мультиграф и $B(G)$ — его двудольная интерпретация, то $\eta(G) = \eta(B(G))$. Поэтому из утверждения 2, леммы 2 и следствия 1 вытекает следующая

Теорема 2. *Для любого мультиграфа G имеет место неравенство*

$$\chi_I(G) \leqslant \max\{\Delta(G), \eta(G)\}. \tag{1}$$

Если при этом G — стабильный мультиграф, то

$$\chi_I(G) = \max\{\Delta(G), \eta(G)\}. \tag{2}$$

Отметим, что равенство (2) имеет место и в том случае, когда все дуги мультиграфа G имеют один и тот же вес p. В этом случае $\eta(G) = \max\{\Delta^+(G) + p, \Delta^-(G) + p\}$ и равенство (2) можно записать в виде

$$\chi_I(G) = \max\{\Delta(G), \Delta^+(G) + p, \Delta^-(G) + p\}. \tag{3}$$

Формула (3) была впервые доказана в [6].

Теорема 3. *Существует полиномиальный алгоритм трудоемкости $O(n^2\Delta^2)$, строящий допустимую раскраску инциденторов мультиграфа G в $\max\{\Delta(G), \eta(G)\}$ цветов. Относительная погрешность такого алгоритма меньше 2.*

Доказательство. Поскольку доказательства утверждения 2, а также лемм 1 и 2 по сути алгоритмические, то шаги алгоритма указываются ниже лишь схематично.

Шаг 1. Строится двудольная интерпретация $B(G)$ мультиграфа G.

Шаг 2. Для каждой дуги e полагается $p'(e) = p(e) + \eta(B(G)) - h(e)$. В результате получится стабильный односторонний мультиграф H' высоты $\eta(B(G))$. Пусть p_0 — минимальный вес дуги в мультиграфе H'. Если $p_0 > 0$, то вес каждой дуги уменьшается на p_0. Получившийся стабильный мультиграф H имеет высоту Δ.

Шаг 3. Если $\Delta > 1$, то, как описано в доказательстве леммы 1, находится минимальное по мощности паросочетание W, покрывающее все вершины степени Δ. Паросочетание W удаляется из H. Этот шаг повторяется до тех пор, пока Δ не станет равным 1.

Шаг 4. Если $\Delta = 1$, то все инциденторы мультиграфа красятся цветом 1.

Шаг 5. Докрашиваются поочередно инциденторы удаленных паросочетаний (если таковые были) так, как описано в доказательстве леммы 2.

Шаг 6. Цвет конечного инцидентора каждой дуги увеличивается на p_0. Получится допустимая раскраска мультиграфа $B(G)$ в $\eta(B(G))$ цветов.

Шаг 7. Производится переход от раскраски мультиграфа $B(G)$ к раскраске мультиграфа G, как описано в доказательстве утверждения 2. Число цветов при этом станет равным $\max\{\Delta(G), \eta(G)\}$.

Самым трудоёмким шагом алгоритма является шаг 3, выполняемый $\Delta - 1$ раз. Паросочетание W находится за время $O(n^2\Delta)$. Таким образом, трудоемкость алгоритма равна $O(n^2\Delta^2)$.

Оценим относительную погрешность алгоритма. Если $\eta(G) \leqslant \Delta$, то имеет место равенство (2), т. е. алгоритм находит точное решение. Если же $\eta(G) > \Delta(G)$, то алгоритм строит допустимую раскраску в $\eta(G)$ цветов. Обозначим через p наибольший вес дуги. Тогда $\chi_I(G) \geqslant p + 1$. Следовательно,

$$\eta(G) \leqslant p + \Delta(G) \leqslant \chi_I(G) - 1 + \Delta(G) \leqslant 2\chi_I(G) - 1, \tag{4}$$

т. е. относительная погрешность $\eta(G)/\chi_I(G)$ алгоритма меньше 2. Теорема 3 доказана.

Заметим что из неравенства (4) следует также, что абсолютная погрешность алгоритма не превосходит $\Delta - 1$.

Авторы благодарны рецензенту, указавшему, что паросочетание W находится за время $O(n^2\Delta)$, а не за время $O(n^2\Delta^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инцидентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.

2. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Задача раскраски инцидентов мультиграфа // Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций": Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 6–11.

3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи М.: Мир. 1982.

4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.

5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–70.

6. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инцидентов и их приложения. Дис. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

7. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.

Адреса авторов:

В. Г. Визинг
ул. Варненская, 18/2, кв. 26
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

А. В. Пяткин
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: piatkin@math.nsc.ru

Статья поступила
21 сентября 2005 г.