ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2006. Серия 1. Том 13, № 1. 77–98

УДК 519.72

# О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ СОВЕРШЕННЫХ ДВОИЧНЫХ КОДОВ ДЛИНЫ 15 И РАНГА 15*)

*С. А. Малюгин*

Найдены все попарно неэквивалентные совершенные двоичные коды длины 15 и ранга 15, которые получаются из кода Хемминга $H^{15}$ сдвигами его непересекающихся компонент. Число таких кодов оказалось равным 51. Найдены также основные инварианты этого класса кодов: ранги, размерности ядер и порядки групп автоморфизмов.

## Введение

В последнее время появилось несколько новых методов построения совершенных двоичных кодов длины $n = 2^k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$, обзоры которых имеются в [20, 21, 28–30]. Среди них большой интерес представляет метод построения кода из кода Хемминга $H^n$ последовательными сдвигами на базисные векторы некоторых его подмножеств, называемых компонентами. Эта конструкция представляет интерес ещё и потому, что она даёт нижнюю оценку для числа всех совершенных двоичных кодов [2, 4, 8, 10, 23, 31], которая является лучшей на данный момент.

Однако даже для кодов длины 15 задача их перечисления остаётся пока нерешённой. Первым результатом в этом направлении является работа Ф. Хергерта [22], в которой показано, что существует 19 неэквивалентных кодов Васильева длины 15, включая код Хемминга. Интерес к задаче классификации кодов длины 15 возрос в последние годы не только в связи с появлением новых методов построения кодов, но и с возможностью применения компьютеров. В последнее время в литературе появилось несколько публикаций по перечислению нелинейных совершенных кодов. Здесь прежде всего нужно отметить работу К. Т. Фелпса [25], в

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00364) и государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ(проект НШ-313.2003.1).

которой с помощью компьютера перечислены 963 неэквивалентных кодов, получаемых методом конкатенации расширенных кодов Хемминга длины 8 (конструкция Соловьевой–Фелпса). В работе В. А. Зиновьева и Д. В. Зиновьева [5] перечислены все двоичные расширенные коды длины 16, получаемые обобщённой каскадной конструкцией. Число таких кодов, включая код Хемминга и 12 кодов Васильева, равно 285. В [6] перечислены все совершенные коды длины 15 и ранга не более 13, число которых оказалось равным 777. Известно, что В. А. Зиновьев и Д. В. Зиновьев [7] получили также полную классификацию двоичных расширенных кодов длины 16 ранга 14. По сути дела неперечисленными остались только совершенные коды ранга 15, которые называют также *кодами полного ранга*.

В настоящей статье перечисляются все неэквивалентные совершенные двоичные коды длины 15 ранга 15, которые получаются из кода Хемминга $H^{15}$ сдвигами его непересекающихся компонент. Число таких кодов оказалось равным 51. Эта работа является естественным завершением предыдущей статьи автора [9] и препринта [13].

Построенное в [9] семейство кодов разбилось на пять больших серий, которые были названы $(m \times l)$-кодами, где $m$ – число выбранных для построения кода координат, а $l$ – верхняя граница числа компонент, сопоставляемых каждой из $m$ выбранных координат. Для кодов длины 15 $m \in 1, 2, 4, 5, 8$ и $l = 16/m$ при $m = 1, 2, 4, 8$, $l = 2$ при $m = 5$. Следует сказать, что $(m \times l)$-коды строятся сдвигами компонент, которые при $m = 1, 2, 4, 8$ являются частью некоторого $(m \times l)$-разбиения кода Хемминга $H^{15}$ на 16 непересекающихся компонент. Исключение составляет только случай $m = 5$ и $l = 2$. В этом случае в коде Хемминга выделяется тупиковый набор из десяти непересекающихся компонент (к которому уже нельзя добавить ни одной компоненты, не пересекающейся с десятью компонентами этого набора) и $(5 \times 2)$-коды строятся сдвигами некоторого числа компонент из этого набора. В [14, 17] получены также аналоги $(m \times l)$-разбиений для кодов Хемминга любой длины $n \geqslant 15$ и для $q$-ичных кодов соответственно.

Из [9, лемма 11] следует, что коды полного ранга являются либо $(8 \times 2)$-кодами, либо $(5 \times 2)$-кодами. Наряду с классификацией даётся способ построения кодов из каждого класса эквивалентности, а также вычисляются их основные инварианты: ранги, размерности ядер и порядки групп автоморфизмов. Кроме этого доказывается, что среди $(8 \times 2)$-кодов имеется 12 неэквивалентных несистематических кодов.

## 1. Предварительные сведения

Бóльшая часть обозначений и определений взята из [9]. Напомним только некоторые из них. Пусть $\{0,1\}^n$ — векторное пространство размерности $n$ над полем из двух элементов 0 и 1. Сумму векторов $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\{0,1\}^n$ обозначим через $\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}$. Базисный вектор, в котором $i$-я координата равна единице, обозначим через $\mathbf{e}_i$, а нулевой и единичный векторы — через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Для вектора $\mathbf{u}\in\{0,1\}^n$ множество его ненулевых координат будем называть *носителем* этого вектора и обозначать через $[\mathbf{u}]$. Число элементов в $[\mathbf{u}]$ называем *весом* вектора $\mathbf{u}$. Рассмотрим следующее представление кода Хемминга. Каждому $i=1,\dots,n$ ставим в соответствие вектор $(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k$ ($k=\log(n+1)$, а через $\log$ обозначается логарифм по основанию 2), представляющий число $i$ в двоичной системе счисления. Пусть множество $H^n$ состоит из всех векторов $\mathbf{u}\in\{0,1\}^n$ таких, что $\bigoplus\{i\mid i\in[\mathbf{u}]\}=0$. Известно, что $H^n$ является кодом Хемминга и любой другой код Хемминга длины $n$ эквивалентен коду $H^n$. Для вектора $\mathbf{u}\in H^n$ веса 3 множество $[\mathbf{u}]$ назовём *кодовой тройкой*. Аналогично определяются *кодовые четвёрки, пятёрки* и т. д.

Через $\mathrm{Aut}(C)$ обозначаем *группу автоморфизмов* кода $C$, т. е. группу всех таких аффинных преобразований $(\pi,\mathbf{u})$ пространства $\{0,1\}^n$, что $\pi(C)+\mathbf{u}=C$, где $\pi$ — перестановка координат $\{1,\dots,n\}$, а $\mathbf{u}$ — вектор из пространства $\{0,1\}^n$. В $\mathrm{Aut}(C)$ выделяются две подгруппы: группа *симметрий* $\mathrm{Sym}(C)=\{\pi\mid\pi(C)=C\}$ и *ядро* $\mathrm{Ker}(C)=\{\mathbf{u}\mid C\oplus\mathbf{u}=C\}$. Важную роль в дальнейшем будет играть группа $\mathrm{Aut}(C)\cap\mathrm{Aut}(H^n)$, которую назовем *группой хемминговых автоморфизмов* кода $C$. Группу $\mathrm{Sym}(C)\cap\mathrm{Sym}(H^n)$ назовём группой *хемминговых симметрий* кода $C$. Эти определения имеют содержательный смысл, так как мы всегда будем предполагать, что нелинейный код $C$ строится вполне определенным образом из кода Хемминга $H^n$.

*Сдвигом* множества $S\subseteq\{0,1\}^n$ по координате $i$ назовём множество $S\oplus\mathbf{e}_i$. Подмножество $S$ в совершенном коде $C$ называется *$i$-компонентой* этого кода, если множество $C'=(C\setminus S)\cup(S\oplus\mathbf{e}_i)$ является совершенным кодом. В коде Хемминга $H^n$ рассмотрим подпространство $R_i$, порождённое всеми векторами веса 3 с $i$-й координатой, равной единице. Всевозможные смежные классы вида $R_i^{\mathbf{u}}=R_i\oplus\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\in H^n$) представляют собой совокупность всех минимальных по мощности $i$-компонент кода $H^n$, $i=1,\dots,n$.

Множество векторов $\mathbf{u}\in H^n$ веса $m=(n-1)/2$, ортогональных коду $H^n$, будем обозначать через $O_m^1$. Это множество является орбитой при действии группы симметрий $\mathrm{Sym}(H^n)$. Носители $[\mathbf{u}]$ векторов $\mathbf{u}$ из $O_m^1$

являются гиперплоскостями в проективной геометрии $\mathrm{PG}_{k-1}(2)$.

Назовём $i$-компоненту $R_i^{\mathbf{u}}$ кода $H^n$ *антиподальной* $i$-компоненте $R_i^{\mathbf{v}}$, если существует такой вектор $\mathbf{w} \in R_i^{\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}} \cap O_m^1$, что $i \notin [\mathbf{w}]$. Основное свойство таких компонент состоит в том, что если при $i \neq j$ компоненты $R_i^{\mathbf{u}}$ и $R_j^{\mathbf{w}}$ кода $H^n$ не пересекаются и компонента $R_i^{\mathbf{v}}$ антиподальна к $R_i^{\mathbf{u}}$, то компоненты $R_i^{\mathbf{v}}$ и $R_j^{\mathbf{w}}$ тоже не пересекаются ([9, лемма 8]).

Назовём $i$-компоненту $R_i^{\mathbf{u}}$ *$i$-чётной* (*$i$-нечётной*), если для любого вектора $\mathbf{v} \in R_i^{\mathbf{u}}$ множество $[\mathbf{v}] \setminus \{i\}$ состоит из чётного (нечётного) числа элементов. Факт сохранения $i$-чётности элементов в минимальной $i$-компоненте любого совершенного кода $C$ отмечался в [18, лемма 2.1].

Далее будем рассматривать следующую конструкцию кодов. В коде Хемминга $H^n$ выделяется некоторое семейство $\mathcal{B} = \left\{R_{i_1}^{\mathbf{u}_1}, \ldots, R_{i_m}^{\mathbf{u}_m}\right\}$, состоящее из попарно непересекающихся $i_q$-компонент, где $\mathbf{u}_q \in H^n$, $q = 1, \ldots, m$. Затем в $H^n$ сдвигаются по соответствующим координатам все компоненты выделенного семейства. Полученное таким способом множество

$$H^n(\mathcal{B}) = \left(H^n \setminus \bigcup_{p=1}^{m} R_{i_p}^{\mathbf{u}_p}\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{m} \left(R_{i_p}^{\mathbf{u}_p} \oplus \mathbf{e}_{i_p}\right)\right)$$

является совершенным кодом [1, 15, 26, 29]. В [9] было показано, что множество таких кодов длины 15 можно разбить на пять семейств. Далее дается краткое описание каждого семейства.

## 2. Классификация кодов, получаемых сдвигами непересекающихся компонент кода Хемминга $H^{15}$

**2.1.** $(1 \times 16)$-*коды т. е. коды Васильева.* Считаем, что все $i_q = i$ ($q = 1, \ldots, m;\ m \leqslant 16$), а наборы векторов $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ пробегают всевозможные подмножества из кода $H^7(\mathbf{h})$, где $\mathbf{h} \in O_7^1$ и $i \notin [\mathbf{h}]$. Коды Васильева получаются из кода Хемминга $H^{15}$ сдвигом на вектор $\mathbf{e}_i$ всех его компонент $R_i^{\mathbf{u}_q}$ ($q = 1, \ldots, m$), составляющих часть разбиения всего кода $H^{15}$ на $i$-компоненты. Имеется 15 различных разбиений кода $H^{15}$ на $i$-компоненты, $i = 1, \ldots, 15$. Эти разбиения мы будем называть $(1 \times 16)$-*разбиениями*, а коды, получаемые сдвигами $i$-компонент таких разбиений, — $(1 \times 16)$-*кодами.*

Далее будем считать, что $i = 8$ (этого всегда можно добиться, действуя подходящей перестановкой координат из группы $\mathrm{Sym}(H^{15})$). Тогда в качестве вектора из $O_7^1$ удобнее всего взять такой $\mathbf{h}$, что $[\mathbf{h}] = \{1, \ldots, 7\}$. В этом случае подкод $H^7(\mathbf{h})$ состоит из всех векторов кода $H^{15}$, имеющих нулевые $j$-е координаты при $j = 8, \ldots, 15$. Выпишем носители всех 16 векторов этого подкода:

$$
\begin{array}{llll}
[\mathbf{u}_0] = \varnothing, & [\mathbf{u}_4] = \{4,5,6,7\}, & [\mathbf{u}_{\overline{0}}] = \{1,\dots,7\}, & [\mathbf{u}_{\overline{4}}] = \{1,2,3\},\\
[\mathbf{u}_1] = \{1,3,5,7\}, & [\mathbf{u}_5] = \{1,3,4,6\}, & [\mathbf{u}_{\overline{1}}] = \{2,4,6\}, & [\mathbf{u}_{\overline{5}}] = \{2,5,7\},\\
[\mathbf{u}_2] = \{2,3,4,5\}, & [\mathbf{u}_6] = \{2,3,6,7\}, & [\mathbf{u}_{\overline{2}}] = \{1,6,7\}, & [\mathbf{u}_{\overline{6}}] = \{1,4,5\},\\
[\mathbf{u}_3] = \{1,2,4,7\}, & [\mathbf{u}_7] = \{1,2,5,6\}, & [\mathbf{u}_{\overline{3}}] = \{3,5,6\}, & [\mathbf{u}_{\overline{7}}] = \{3,4,7\}.
\end{array}
$$

Здесь для удобства принято обозначение $\overline{k} = 15 - k$ ($k = 0,\dots,7$). Нумерация векторов выбрана такой, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{u}_k \oplus \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_{k\oplus l}$ ($k,l = 0,\dots,15$). Очевидно, что любая 8-компонента пересекается с подкодом $H^7(\mathbf{h})$ по одному из этих векторов; при этом для любого $k = 0,\dots,7$ компоненты $R_8^{\mathbf{u}_k}$ и $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{k}}}$ антиподальны друг другу.

**2.2.** $(2\times 8)$-*коды.* В этой серии кодов для некоторых $i$ и $j$ ($i \neq j$) либо $i_q = i$, либо $i_q = j$ ($q = 1,\dots,m$; $m \leqslant 16$). Такие коды любой длины $n = 2^k - 1$ были построены в [2, 15]. Полагаем $i = 8$ и $j = 14$. Подпространство $R_8 \oplus R_{14}$ можно представить как объединение восьми непересекающихся 8-компонент. Объединение всех 14-компонент, не пересекающихся с $R_8$, является классом смежности по подпространству $R_8 \oplus R_{14}$. В результате получаем разбиение кода Хемминга $H^{15}$ на 16 компонент: $R_8^{\mathbf{u}_q}$, $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 0,1,2,3$ и $R_{14}^{\mathbf{u}_q}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 4,5,6,7$. Если подпространство $R_8 \oplus R_{14}$ разбить на восемь непересекающихся 14-компонент и добавить восемь 8-компонент, не пересекающихся с $R_{14}$, то получится ещё одно разбиение кода $H^{15}$ на компоненты $R_8^{\mathbf{u}_q}$, $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 4,5,6,7$ и на компоненты $R_{14}^{\mathbf{u}_q}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 0,1,2,3$, являющееся переносом предыдущего разбиения на вектор $\mathbf{u}_1 \notin R_8 \oplus R_{14}$. Разбиения кода $H^{15}$, которые получаются из этих двух разбиений некоторой перестановкой координат $\pi \in \mathrm{Sym}(H^{15})$, будем называть $(2\times 8)$-*разбиениями*. Коды, получаемые сдвигами произвольного числа компонент одного из таких разбиений, называем $(2\times 8)$-*кодами*.

**2.3.** $(4\times 4)$-*коды.* Это множество кодов характеризуется тем, что $i_q \in [\mathbf{u}]$ для некоторого вектора $\mathbf{u} \in H^{15}$ веса 4 и всех $q = 1,\dots,m$ ($m \leqslant 16$). Можно считать, что $[\mathbf{u}] = \{8,10,12,14\}$.

В [9] построено разбиение кода Хемминга $H^{15}$ на непересекающиеся компоненты

$$R_{2s+8}^{\mathbf{v}_{r,s}} \quad (r,s = 0,1,2,3).$$

В обозначениях настоящей статьи следует положить $\mathbf{v}_{0,0} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_{1,0} = \mathbf{u}_{\overline{0}}$, $\mathbf{v}_{2,0} = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{u}_{\overline{1}}$, $\mathbf{v}_{0,1} = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_{1,1} = \mathbf{u}_{\overline{2}}$, $\mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_{3,1} = \mathbf{u}_{\overline{3}}$, $\mathbf{v}_{0,2} = \mathbf{u}_4$, $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{u}_{\overline{4}}$, $\mathbf{v}_{2,2} = \mathbf{u}_5$, $\mathbf{v}_{3,2} = \mathbf{u}_{\overline{5}}$, $\mathbf{v}_{0,3} = \mathbf{u}_6$, $\mathbf{v}_{1,3} = \mathbf{u}_{\overline{6}}$, $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u}_7$, $\mathbf{v}_{3,3} = \mathbf{u}_{\overline{7}}$, где $\mathbf{u}_0,\dots,\mathbf{u}_7$ и $\mathbf{u}_{\overline{0}},\dots,\mathbf{u}_{\overline{7}}$ определены выше. Можно построить восемь различных разбиений. Они получаются из приведённого выше разбиения переносами на некоторые векторы из кода $H^{15}$.

Разбиения кода $H^{15}$, которые получаются из вышеприведённого разбиения с помощью переносов и перестановок из группы $\mathrm{Sym}(H^{15})$, называем $(4 \times 4)$-*разбиениями*, а коды, получаемые сдвигами некоторых компонент одного из этих разбиений, называем $(4 \times 4)$-*кодами*.

**2.4.** $(8 \times 2)$-*коды*. Полагаем $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_7$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_5$, $\mathbf{v}_5 = \mathbf{u}_4$, $\mathbf{v}_6 = \mathbf{u}_6$, $\mathbf{v}_7 = \mathbf{u}_3$. Если $\mathbf{v}_s = \mathbf{u}_p$, то полагаем $\mathbf{v}_{\overline{s}} = \mathbf{u}_{\overline{p}}$. Таким образом мы определяем $\mathbf{v}_s$ для всех $s = 0, \ldots, 15$. В [9] доказано, что компоненты $R_{s+8}^{\mathbf{v}_s}$, $R_{s+8}^{\mathbf{v}_{\overline{s}}}$ $(s = 0, \ldots, 7)$ попарно не пересекаются и образуют разбиение кода $H^{15}$. В этом разбиении каждому $i = 8, \ldots, 15$ сопоставляется пара антиподальных друг другу $i$-компонент. Можно построить 64 различных разбиений такого типа и все они получаются из приведённого выше разбиения переносами на подходящие векторы из $H^{15}$.

Разбиения кода $H^{15}$, которые получаются из вышеприведённого разбиения с помощью переносов и перестановок из группы $\mathrm{Sym}(H^{15})$, называем $(8 \times 2)$-*разбиениями*, а коды, получаемые сдвигами некоторых компонент одного из этих разбиений, называем $(8 \times 2)$-*кодами*.

Рассмотрим группу $\mathrm{Sym}_J(H^{15})$ $(J = \{8, \ldots, 15\})$ всех перестановок из $\mathrm{Sym}(H^{15})$, которые оставляют неподвижным множество $J$. Порядок такой группы равен 1344, а порядок группы $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$ равен $2^{11} \cdot 1344$.

Переходим к описанию орбит $(8 \times 2)$-кодов относительно группы $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$. Пусть код $C = H^{15}(\mathcal{B})$ получен из $H^{15}$ сдвигами всех компонент из семейства $\mathcal{B}$. Обозначим через $I_{\mathcal{B}}$ множество всех таких номеров $i$, что существуют $i$-компоненты, принадлежащие семейству $\mathcal{B}$. В $I_{\mathcal{B}}$ выделим подмножество номеров $J_{\mathcal{B}}$, соответствующее *кратным компонентам* из $\mathcal{B}$, т. е. $i \in J_{\mathcal{B}}$ означает, что семейству $\mathcal{B}$ принадлежат две взаимно антиподальные $i$-компоненты. Числа $|I_{\mathcal{B}}|$ и $|J_{\mathcal{B}}|$ являются характеристиками орбиты, порождённой кодом $C$. Название или *имя* орбиты начинается с символа $Y$, после которого расположены два числа $a = |I_{\mathcal{B}}|$ и $b = |J_{\mathcal{B}}|$ (в случае отсутствия кратных компонент число $b = 0$ опускается). Для того чтобы различать орбиты с одинаковыми значениями параметров $a$ и $b$, название заканчивается либо знаком $^0$, либо $^1$. Рассмотрим все такие случаи.

1. Четырёхэлементное множество $I \subset \{8, \ldots, 15\}$ может состоять либо из независимых (в пространстве $E^4$) элементов $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$, либо из зависимых элементов (в этом случае $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0$ и $I$ является носителем некоторого вектора из кода $H^{15}$). В соответствии с этим четвёрку $I$ называем независимой или зависимой. Поэтому кодам, у которых множество $J_{\mathcal{B}}$ является зависимой четвёркой, дадим название $Ya4^0$ $(a = |I_{\mathcal{B}}|)$, а коды, у которых $J_{\mathcal{B}}$ является независимой четвёркой, называем $Ya4^1$.

То же самое касается и дополнения $I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}}$. Если это множество является зависимой четвёркой, то название кода имеет вид $Yab^0$; если это множество независимо, то название кода имеет вид $Yab^1$.

2. Есть ещё один тип зависимости в случае $|I_{\mathcal{B}}| = 6$ и $|J_{\mathcal{B}}| = 3$, а также при $|I_{\mathcal{B}}| = 5$ и $|J_{\mathcal{B}}| = 2, 3$. Пусть $J_{\mathcal{B}} = \{j_1, j_2, j_3\}$. Если сумма $j_1 \oplus j_2 \oplus j_3$ принадлежит множеству $I_{\mathcal{B}}$, то называем код именем $Y63^0$ при $|I_{\mathcal{B}}| = 6$ и $Y53^0$ при $|I_{\mathcal{B}}| = 5$, если же эта сумма не принадлежит $I_{\mathcal{B}}$, то называем код именем $Y63^1$ при $|I_{\mathcal{B}}| = 6$ и именем $Y53^1$ при $|I_{\mathcal{B}}| = 5$. Пусть теперь $I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}} = \{j_1, j_2, j_3\}$ и $|I_{\mathcal{B}}| = 5$. В этом случае именем кода будет $Y52^0$, если сумма $j_1 \oplus j_2 \oplus j_3$ принадлежит $I_{\mathcal{B}}$, и коду $H^{15}(\mathcal{B})$ дается имя $Y52^1$ в случае, когда эта сумма не принадлежит $I_{\mathcal{B}}$.

3. Последний случай касается кодов, у которых в множестве $\mathcal{B}$ нет кратных компонент и $|I_{\mathcal{B}}| = 8$. В этом случае $\mathcal{B} = \{R_8^{\mathbf{w}_8}, \ldots, R_{15}^{\mathbf{w}_{15}}\}$, где каждый вектор $\mathbf{w}_s$ совпадает либо с вектором $\mathbf{v}_s$ веса 4, либо с вектором $\mathbf{v}_{\overline{s}}$ веса 3. Оказывается, что чётность суммы весов $\sum\limits_{s=8}^{15} |\mathbf{w}_s|$ не меняется при преобразованиях из группы $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$. Для перестановок это очевидно, а для переносов достаточно рассмотреть случай векторов $\mathbf{u}$ веса 3 (такие векторы порождают весь код $H^{15}$). В случае $[\mathbf{u}] \subset \{1, \ldots, 7\}$ сумма $\mathbf{u} \oplus \mathbf{w}_s$ снова будет совпадать с одним из векторов $\mathbf{v}_p$ некоторого $(8 \times 2)$-разбиения и чётность суммы восьми весов очевидно не изменится. Пусть $[\mathbf{u}] = \{i, j, i \oplus j\}$, где $i \geqslant 8$ и $j \geqslant 8$. Теперь следует преобразовать вектор $\mathbf{u} \oplus \mathbf{w}_s$ с помощью переносов из компоненты $R_s$ в один из векторов $\mathbf{v}_p$. При $s \neq i$ и $s \neq j$ следует добавить два вектора с носителями $\{s, i, s \oplus i\}$ и $\{s, j, s \oplus j\}$. При $s = i$ или $s = j$ следует добавить один вектор с носителем $\{i, j, i \oplus j\}$. В результате вектор $\mathbf{w}_s$ перейдет в вектор той же чётности при $s = i$ или $s = j$ (при этом он не изменится) и в вектор другой чётности при $s \neq i$ и $s \neq j$. Чётность суммы весов полученных векторов от этого не изменится. Код $H^{15}(\mathcal{B})$ с чётной суммой весов $\sum\limits_{s=1}^{8} |\mathbf{w}_s|$ обозначаем через $Y8^0$, а код с нечётной суммой весов обозначаем через $Y8^1$.

Очевидно, коды с различными именами должны принадлежать различным орбитам относительно группы $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$. Итог этой классификации подводит следующая

**Лемма 1.** *Два $(8 \times 2)$-кода принадлежат одной и той же орбите относительно группы преобразований $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые имена.*

Доказательство. Разберём подробно только случаи кодов типа $Y8^0$

и $Y8^1$ (изучение других случаев проводится аналогичным образом). Рассмотрим семейство компонент $\mathcal{B} = \{R_{s+8}^{\mathbf{v}_s} | \, s = 0, \ldots, 7\}$ с определёнными ранее векторами $\mathbf{v}_s$. К этому семейству применим перестановку $\pi_0 \in \mathrm{Sym}_J(H^{15})$ такую, что $\pi_0(7) = 7$, $\pi_0(8) = 8$, $\pi_0(9) = 10$, $\pi_0(10) = 9$. Циклическое представление этой перестановки имеет следующий вид $\pi_0 = (1,2)(5,6)(9,10)(13,14)$. При этом семейство $\mathcal{B}$ перейдёт в некоторое семейство из другого $(8 \times 2)$-разбиения. Чтобы вернуться к первоначальному разбиению, применим перенос на вектор $\mathbf{u}_0$ с носителем $[\mathbf{u}_0] = \{1,2,3,4,5,6,8,15\}$. В результате получим семейство $\mathcal{B}_1 = \{R_8^{\mathbf{v}_{15}}, R_9^{\mathbf{v}_1}, \ldots, R_{14}^{\mathbf{v}_6}, R_{15}^{\mathbf{v}_8}\}$. Оно отличается от исходного семейства $\mathcal{B}$ тем, что в нём две компоненты $R_8^{\mathbf{v}_0}$ и $R_{15}^{\mathbf{v}_7}$ заменены на антиподальные. Таким же способом в семействе $\mathcal{B}$ можно заменить любую $i$-компоненту и любую $j$-компоненту на антиподальные. Для этого сначала к семейству $\mathcal{B}$ применим перестановку $\pi \in \mathrm{Sym}_J(H^{15})$ такую, что $\pi(i) = 8$, $\pi(j) = 15$. После переноса на подходящий вектор $\mathbf{u}$ получим некоторое семейство компонент $\mathcal{B}_2$ из того же самого разбиения. Далее, применяя перестановку $\pi_0$ и перенос $\mathbf{u}_0$, в семействе $\mathcal{B}_2$ 8-компоненту и 15-компоненту поменяем на антиподальные. Применяя затем в обратном порядке перенос $\mathbf{u}$ и перестановку $\pi^{-1}$, в исходном семействе $\mathcal{B}$ $i$-компоненту и $j$-компоненту можно поменять на антиподальные. Меняя последовательно подходящие пары компонент на антиподальные, можно получить любой код типа $Y8^0$, т. е. все такие коды лежат в одной орбите. Отсюда же следует, что все коды типа $Y8^1$ тоже составляют одну орбиту.

Приведённый приём позволяет в любом семействе компонент $\mathcal{B}$, порождающем код типа $Yab^\gamma$ ($\gamma \in \{0,1\}$), с помощью подходящих преобразований из группы $\mathrm{Sym}_J(H^{15})$ поменять на антиподальную любую $i$-компоненту при $i \in I_\mathcal{B} \setminus J_\mathcal{B}$ (при этом все остальные компоненты семейства $\mathcal{B}$ остаются неподвижными). Отсюда следует, что все коды типа $Yab^\gamma$ попадают в одну и ту же орбиту. Лемма 1 доказана.

Для получения кодов ранга 15 необходимо рассматривать семейства компонент $\mathcal{B}$, для которых $|I_\mathcal{B}| \geqslant 4$, причем в случае $|I_\mathcal{B}| = 4$ следует считать, что множество $I_\mathcal{B}$ является независимым (случай, когда множество $I_\mathcal{B}$ является зависимым, относится к $(4 \times 4)$-кодам). Из [9, лемма 11] следует, что все $(8 \times 2)$-коды, кроме кодов из единственной орбиты $Y88$, имеют ранг 15. Коды из орбиты $Y88$ имеют ранг 14. Из леммы 1 следует, что с помощью группы $\mathrm{Aut}_J(H^{15})$ множество всех $(8 \times 2)$-кодов разбивается на 46 орбит.

**2.5.** $(5 \times 2)$-*коды.* Пусть $[\mathbf{u}_{0,1}] = \{2,6,8,12\}$, $\mathbf{u}_{0,8} = \mathbf{0}$, $[\mathbf{u}_{0,11}] = \{8,10,12,14\}$, $[\mathbf{u}_{0,13}] = \{4,6,8,10\}$, $[\mathbf{u}_{0,15}] = \{2,4,8,14\}$, $[\mathbf{u}_{1,1}] = \{4,11,15\}$,

$[\mathbf{u}_{1,8}] = \{2,4,6,8,10,12,14\}$, $[\mathbf{u}_{1,11}] = \{2,4,6\}$, $[\mathbf{u}_{1,13}] = \{2,12,14\}$, $[\mathbf{u}_{1,15}] = \{6,10,12\}$. В [9] доказано, что семейство из десяти непересекающихся компонент $\mathcal{B}_{10} = \{R_s^{\mathbf{u}_{r,s}} \big| r = 0,1;\ s = 1,8,11,13,15\}$ является *тупиковым*, т. е. любая другая $i$-компонента кода $H^{15}$ пересекается с компонентами этого семейства. Пятёрка координат $\{1,8,11,13,15\}$ является кодовой, т. е. является носителем некоторого вектора веса 5 из кода $H^{15}$. Кроме этого, любая $s$-компонента семейства $\mathcal{B}_{10}$ имеет кратность 2, так как антиподальная ей $s$-компонента принадлежит $\mathcal{B}_{10}$. Для $s \in \{1,8,11,13,15\}$ можно построить 64 различных тупиковых наборов компонент, которые можно получить из приведённого выше семейства с помощью переносов на подходящие векторы из $H^{15}$. Применяя перестановки из группы $\mathrm{Sym}(H^{15})$, множество координат $s \in \{1,8,11,13,15\}$ можно заменять на любое другое множество, являющееся носителем некоторого вектора веса 5 из кода $H^{15}$. В [9] показано, что получается 10752 различных тупиковых наборов такого типа. Совершенный код называем $(5\times 2)$-*кодом*, если он получен из кода $H^{15}$ сдвигами некоторых компонент одного из тупиковых наборов.

В данном случае, положив $K = \{1,8,11,13,15\}$, рассмотрим группу $\mathrm{Sym}_K(H^{15})$ всех перестановок из $\mathrm{Sym}(H^{15})$, оставляющих на месте множество $K$. Любая перестановка $\pi$ из этой группы однозначно определяется значениями $\pi(1)$, $\pi(8)$, $\pi(11)$ и $\pi(13)$. Поэтому порядок группы $\mathrm{Sym}_K(H^{15})$ равен $5! = 120$, а порядок группы $\mathrm{Aut}_K(H^{15})$ равен $120\cdot 2^{11}$.

Понятно, что в множестве сдвигаемых $i$-компонент $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{10}$ индекс $i$ должен принимать хотя бы один раз каждое значение из пятёрки $\{1,8,11,13,15\}$ (иначе будут получаться коды из предыдущих серий). Поэтому следует считать, что $|I_\mathcal{B}| = 5$ и код $H^{15}(\mathcal{B})$ характеризуется только одним числом $|J_\mathcal{B}|$ (числом координат $i$, соответствующих кратным $i$-компонентам, т. е. семейству $\mathcal{B}$ принадлежит и компонента $R_i^{\mathbf{u}_{0,i}}$ и антиподальная ей компонента $R_i^{\mathbf{u}_{1,i}}$). Именем любого $(5\times 2)$-кода $H^{15}(\mathcal{B})$ является $Z5b$, где $b = |J_\mathcal{B}| \in \{0,\dots,5\}$. Справедлива

**Лемма 2.** *Два $(5\times 2)$-кода принадлежат одной орбите относительно группы преобразований $\mathrm{Aut}_K(H^{15})$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые имена.*

Доказательство. Рассмотрим перестановку $\pi_0 \in \mathrm{Sym}_K(H^{15})$, для которой $\pi_0(13) = 15$, $\pi_0(15) = 13$, $\pi_0(8) = 8$, $\pi_0(1) = 1$. Запишем также циклическое представление этой перестановки $\pi_0 = (4,6)(5,7)(12,14)(13,15)$. Применяя к семейству компонент $\mathcal{B}_5 = \{R_s^{\mathbf{u}_{0,s}} \big| s = 1,8,11,13,15\}$ эту перестановку координат, а также перенос на вектор $\mathbf{u}_0$ с носителем $[\mathbf{u}_0] = \{4,7,12,15\}$, получаем семейство $\{R_1^{\mathbf{u}_{0,1}}, R_8^{\mathbf{u}_{0,8}}, R_{11}^{\mathbf{u}_{0,11}}, R_{13}^{\mathbf{u}_{0,13}},$

$R_{15}^{\mathbf{u}_{1,15}}\}$, отличающееся от исходного семейства $\mathcal{B}_5$ тем, что в нём компонента $R_{15}^{\mathbf{u}_{0,15}}$ заменена на антиподальную компоненту $R_{15}^{\mathbf{u}_{1,15}}$. Теперь рассмотрим любое семейство компонент $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{10}$ такое, что $|I_{\mathcal{B}}| = 5$. Если кроме этого выполняется неравенство $|I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}}| \geqslant 2$, то для любого $i \in I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}}$ с помощью подходящего преобразования из группы $\mathrm{Aut}_K(H^{15})$ $i$-компоненту из семейства $\mathcal{B}$ можно заменить на антиподальную ей компоненту, не меняя остальных компонент семейства $\mathcal{B}$. Пусть $j \in I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}}$ и $j \neq i$. Применим перестановку $\pi \in \mathrm{Sym}_K(H^{15})$, переводящую $i$ в 15 и $j$ в 13. После переноса на подходящий вектор $\mathbf{u} \in H^{15}$ получим новое семейство $\mathcal{B}_1$, входящее в первоначальный тупиковый набор $\mathcal{B}_{10}$. Применим к нему указанную выше перестановку $\pi_0$ и перенос на вектор $\mathbf{u}_0$. Применив повторно перенос на $\mathbf{u}$ и перестановку $\pi^{-1}$, получим требуемое семейство $\mathcal{B}_2$. В случае, когда множество $I_{\mathcal{B}} \setminus J_{\mathcal{B}}$ состоит из единственного элемента $i$, предыдущий способ не годится, так как перестановка $\pi_0$ переставляет координаты 13 и 15. В этом случае просто осуществляем перенос на вектор $\mathbf{h} \in O_7^1$ веса 7, в котором $i$-я координата равна нулю. Такой перенос, очевидно, не изменит тупикового набора $\mathcal{B}_{10}$ и заменит $i$-компоненту семейства $\mathcal{B}$ на антиподальную. Лемма 2 доказана.

Мы доказали, что семейство всех $(5 \times 2)$-кодов разбивается на шесть орбит $Z5$, $Z51$, $Z52$, $Z53$, $Z54$ и $Z55$.

В итоге семейство всех кодов ранга 15, получаемых из кода Хемминга $H^{15}$ сдвигами его непересекающихся компонент, с помощью группы $\mathrm{Aut}(H^{15})$ разбилось на 52 орбиты.

## 3. Доказательство неэквивалентности кодов из различных орбит относительно группы хемминговых автоморфизмов

Пусть $\mathcal{B}$ – семейство непересекающихся компонент кода $H^{15}$. Код $C = H^{15}(\mathcal{B})$ будем называть *невырожденным*, если при любом $i \in \{1, \ldots, 15\}$ любая линейная $i$-компонента является переносом на подходящий вектор некоторой $i$-компоненты кода Хемминга $H^{15}$, в противном случае код $C$ называем *вырожденным*. Из определения следует, что в вырожденном коде существует хотя бы одна $i$-компонента $S_i$, принадлежащая другому коду Хемминга, отличному от $H^{15}$, которую с помощью какого-либо переноса невозможно перевести в $i$-компоненту кода $H^{15}$. В этом случае будем говорить, что $i$-компонента $S_i$ *не параллельна* $i$-компонентам кода $H^{15}$.

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{B}$ – такое семейство непересекающихся компонент кода $H^{15}$, что код $C = H^{15}(\mathcal{B})$ является вырожденным, и пусть линейная $i$-компонента $S_i$ кода $C$ не параллельна $i$-компонентам кода $H^{15}$. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений*:

(a) *для некоторого* $p \neq i$ *существуют такие четыре* $p$*-компоненты* $R_p^s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ *из семейства* $\mathcal{B}$ *и такие четыре* $p$*-компоненты* $R_p^s$ $(s = 5, 6, 7, 8)$, *не пересекающиеся с множеством* $\cup\mathcal{B}$, *что объединение* $\bigcup\limits_{s=1}^{8} R_p^s$ *является подпространством (или смежным классом по подпространству) и* $S_i \subset \bigcup\limits_{s=1}^{4} (R_p^s \oplus \mathbf{e}_p) \cup \bigcup\limits_{s=5}^{8} R_p^s$;

(b) *для некоторых* $p$ *и* $q$, *не равных* $i$, *существуют такие четыре* $p$*-компоненты* $R_p^s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ *и четыре* $q$*-компоненты* $R_q^s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ *из семейства* $\mathcal{B}$, *что* $S_i \subset \bigcup\limits_{s=1}^{4} (R_p^s \oplus \mathbf{e}_p) \cup \bigcup\limits_{s=1}^{4} (R_q^s \oplus \mathbf{e}_q)$; *при этом компоненты* $R_p^s$, $R_q^s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ *должны принадлежать некоторому* $(4 \times 4)$*-разбиению кода* $H^{15}$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого $p$ и любого $q$, $q \neq p$, $i$-компонента $S_i$ не пересекается ни с одной $q$-компонентой $R_q^{\mathbf{u}} \oplus \mathbf{e}_q$ при $R_q^{\mathbf{u}} \in \mathcal{B}$. Следовательно, компонента $S_i$ пересекается только с $p$-компонентами $R_p^{\mathbf{u}_s} \oplus \mathbf{e}_p$, где $R_p^{\mathbf{u}_s} \in \mathcal{B}$ $(s = 1, \ldots, r$ при некотором $r)$. Поэтому $S_i$ является $i$-компонентой кода Васильева $V$ длины 15, который получен из кода $H^{15}$ сдвигами всех $p$-компонент $R_p^{\mathbf{u}_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$. Из линейности $S_i$ следует, что объединение всех компонент $R_p^{\mathbf{u}_s}$ является подпространством (или смежным классом по подпространству). Отсюда следует, в частности, что $r$ может быть равно одному из чисел 1, 2, 4 (случаи $r = 8$ и $r = 16$ не рассматриваются, так как в предыдущей классификации кодов значение $r$ не превосходит 6). Компонента $S_i$ не может полностью входить в объединение компонент $R_p^{\mathbf{u}_s} \oplus \mathbf{e}_p$ $(s = 1, \ldots, r)$, иначе она будет параллельна $i$-компонентам кода $H^{15}$. Поэтому существует ещё столько же $p$-компонент $R_p^{\mathbf{v}_s}$ $(s = 1, \ldots, r)$ кода $H^{15}$, с которыми пересекается компонента $S_i$. Все $p$-компоненты кода $H^{15}$ разобьем на смежные классы по подпространству $\bigcup\limits_{s=1}^{r} (R_p^{\mathbf{u}_s} \cup R_p^{\mathbf{v}_s})$. Смежные классы являются переносами этого подпространства на некоторые векторы $\mathbf{w}_j$ $(j = 1, \ldots, 8/r)$. Компоненты из $j$-го смежного класса обозначим через $R_p^{\mathbf{u}_s \oplus \mathbf{w}_j}$, $R_p^{\mathbf{v}_s \oplus \mathbf{w}_j}$ $(p = 1, \ldots, r)$. Теперь ясно, что $S_i$ является $i$-компонентой линейного кода $\widetilde{H} = \bigcup\limits_{s=1}^{r} \bigcup\limits_{j=1}^{8/r} \Big( (R_p^{\mathbf{u}_s \oplus \mathbf{w}_j} \oplus \mathbf{e}_p) \cup R_p^{\mathbf{v}_s \oplus \mathbf{w}_j} \Big)$. Так как компоненты $S_i$ и $R_p^{\mathbf{u}_s}$ принадлежат одному и тому же линейному коду, то размерность их пересечения должна быть равна 4. Отсюда следует равенство $r = 4$, что доказывает случай (a).

Теперь допустим, что при некоторых $p$ и $q$ $(p \neq q)$ компонента $S_i$ пересекается с компонентами $R_p^{\mathbf{u}} \oplus \mathbf{e}_p$ и $R_q^{\mathbf{v}} \oplus \mathbf{e}_q$, где $R_p^{\mathbf{u}}, R_q^{\mathbf{v}} \in \mathcal{B}$ и $\mathbf{u} \oplus \mathbf{e}_p, \mathbf{v} \oplus \mathbf{e}_q \in S_i$. Пусть $\mathbf{w} \in S_i \cap H^{15}$. Из линейности компоненты $S_i$ следует, что $\mathbf{z} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w} \oplus \mathbf{e}_p \oplus \mathbf{e}_q \in S_i \subset C$. С другой стороны, $\mathbf{z} \in H^{15} \oplus \mathbf{e}_p \oplus \mathbf{e}_q$. Поэтому множество сдвигаемых координат кода $H^{15}$ содержит кодовую тройку $\{p, q, p\oplus q\}$. В приведённой выше классификации такие коды не встречаются (см. также [9, леммы 2 и 3]). Следовательно, $S_i \cap H^{15} = \varnothing$.

Предположим, что существуют векторы $\mathbf{w}_s \in S_i \cap (R_{p_s}^{\mathbf{u}_s} \oplus \mathbf{e}_{p_s})$ для некоторых $R_{p_s}^{\mathbf{u}_s} \in \mathcal{B}$ $(s = 1, 2, 3, 4)$, где четвёрка координат $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ является независимой (в пространстве $\{0, 1\}^4$). Тогда каждая сумма любых трёх элементов из множества $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ принадлежит компоненте $S_i$ и коду $C = H^{15}(\mathcal{B})$. Так как для любой независимой тройки координат $\{p, q, r\}$ имеем равенство $H^{15} \oplus \mathbf{e}_p \oplus \mathbf{e}_q \oplus \mathbf{e}_r = H^{15} \oplus \mathbf{e}_{p\oplus q\oplus r}$, то в семействе $\mathcal{B}$ должны быть $p$-компоненты для $p$, пробегающем восемь различных значений. Следовательно, дополняя семейство компонент $\mathcal{B}$ до $(8 \times 2)$-разбиения, можно считать, что компонента $S_i$ входит в код из орбиты $Y88$. В обозначениях раздела 2 $\mathcal{B} = \{R_{s+8}^{\mathbf{v}_s}, R_{s+8}^{\mathbf{v}_{\overline{s}}} \mid s = 0, \ldots, 7\}$. С помощью подходящего переноса на вектор из $R_8^{\mathbf{v}_0}$ можно добиться того, чтобы выполнялось включение $\mathbf{e}_8 \in S_i$. При этом разбиение $\mathcal{B}$ перейдёт в одно из восьми $(8 \times 2)$-разбиений, приведённых в таблице 4 из [9]. Делая затем перестановку $\pi$ из группы $\mathrm{Sym}_J(H^{15})$ (определённой в разделе 2) такую, что $\pi(8) = 8$, приходим к исходному разбиению $\mathcal{B}$. Чтобы в этом убедиться, приведём циклическое представление семи перестановок, переводящих разбиение $\mathcal{B}$ в остальные семь разбиений: $(1, 2)(5, 6)(9, 10)(13, 14)$; $(2, 3)(6, 7)(10, 11)(14, 15)$; $(1, 5)(2, 6)(9, 13)(10, 14)$; $(1, 5)(3, 7)(9, 13)(11, 15)$; $(1, 6)(2, 5)(9, 14)(10, 13)$; $(4, 5)(6, 7)(12, 13)(14, 15)$; $(2, 6)(3, 7)(10, 14)(11, 15)$. Так как две пересекающиеся $i$-компоненты должны совпадать, и $S_i$ пересекается с $p$-компонентами при $p = 8, \ldots, 15$, то $i \in \{1, \ldots, 7\}$. Пусть $i = 1$. Рассмотрим два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ веса 3 с носителями $\{1, 8, 9\}$ и $\{1, 5, 7\}$. Очевидно, что $\mathbf{u} \in R_8^{\mathbf{v}_0}$ и $\mathbf{v} \oplus \mathbf{e}_8 \oplus \mathbf{e}_{11} \in R_{11}^{\mathbf{v}_3}$. Поэтому векторы $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \oplus \mathbf{e}_8$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \oplus \mathbf{e}_8$ принадлежат коду $H^{15}(\mathcal{B})$. Так как $\mathbf{e}_8 \in S_i$, то $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$ должны принадлежать компоненте $S_i$ (поскольку $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{e}_8$ и $\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{e}_8$ являются векторами веса 3 с первой координатой, равной 1). Из линейности $S_i$ следует, что сумма $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{e}_8$ тоже должна принадлежать $S_i$. Так как $[\mathbf{w}] = \{5, 7, 9\}$ и $5 \oplus 7 \oplus 9 = 11$, то должно выполняться включение $\mathbf{w} \oplus \mathbf{e}_{11} \in R_{11}^{\mathbf{v}_3} \cup R_{11}^{\mathbf{v}_{\overline{3}}}$. Но векторы $\mathbf{w} \oplus \mathbf{v}_3 \oplus \mathbf{e}_{11}$ и $\mathbf{w} \oplus \mathbf{v}_{\overline{3}} \oplus \mathbf{e}_{11}$ имеют носители $\{1, 3, 9, 11\}$ и $\{2, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$. Поэтому они не принадлежат $R_{11}^{\mathbf{0}}$. Это противоречие показывает, что $i \neq 1$. Перестановка с циклическим представлением

$(1,2,4)(3,6,5)(9,10,12)(11,14,13)$ принадлежит группе $\mathrm{Sym}_J(H^{15})$ и не меняет разбиения $\mathcal{B}$. При этом 1-компонента $S_1$ перейдёт в некоторую 2-компоненту; на этом основании можно считать доказанным, что $i \neq 2$. Применяя эту перестановку дважды, получаем, что $i \neq 4$. Перестановка $(2,6,5)(4,3,7)(10,14,13)(12,11,15)$ тоже не меняет разбиения $\mathcal{B}$. Применив её дважды к компоненте $S_i$, где $i = 2, 4$, мы докажем, что $i \notin \{1,\ldots,7\}$. Получили противоречие.

Рассмотрим случай, когда существуют самое большее три независимые координаты $p_1, p_2, p_3$ такие, что компонента $S_i$ пересекается с некоторыми компонентами $R_{p_s}^{\mathbf{u}_s} \oplus \mathbf{e}_{p_s}$, где $R_{p_s}^{\mathbf{u}_s} \in \mathcal{B}$ $(s = 1,2,3)$. Так же как и в предыдущем случае можно доказать, что компонента $S_i$ должна пересекаться с некоторой компонентой $R_{p_4}^{\mathbf{u}_4} \oplus \mathbf{e}_{p_4}$, где $R_{p_4}^{\mathbf{u}_4} \in \mathcal{B}$ и $p_4 = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$. Удалим из семейства $\mathcal{B}$ все $p$-компоненты, сдвиги которых на векторы $\mathbf{e}_p$ не пересекаются с $S_i$, и полученное семейство дополним до $(4 \times 4)$-разбиения. В результате получаем некоторый код из орбиты $W4444$, содержащий компоненту $S_i$. Осуществляя перенос и перестановку координат, можно считать, что $\mathbf{e}_8 \in S_i$, и семейство $\mathcal{B}$ совпадает с первым $(4 \times 4)$-разбиением, приведённым в таблице 3 из [9]. В данном случае нам потребуется перестановка из группы $\mathrm{Sym}_I(H^{15})$, переводящая одно $(4 \times 4)$-разбиение в другое $(4 \times 4)$-разбиение. Её циклическое представление имеет вид $(2,4)(3,5)(10,12)(11,13)$. В частности можно считать, что $p_1 = 8$, $p_2 = 10$, $p_3 = 12$ и $p_4 = 14$. Так же как и в предыдущем случае доказывается, что $i$ не может быть равно ни одному нечётному числу из $\{1,\ldots,15\}$. Детали мы опускаем. Кроме этого, $i \notin \{8,10,12,14\}$, так как компонента $S_i$ пересекается с $p_s$-компонентами $R_{p_s}^{\mathbf{u}_s} \oplus \mathbf{e}_{p_s}$ при $p_s = 8,10,12,14$. Осталось рассмотреть координаты $i = 2,4,6$. Пусть $C_8 = H^{15}(\mathcal{B}) \oplus \mathbf{e}_8$. Этот код получается из кода $H^{15}$ сдвигами при каждом $s = 2,4,6$ четырех $(s+8)$-компонент $R_{s+8}^{\mathbf{u}_s}$, $R_{s+8}^{\mathbf{u}_{s+1}}$, $R_{s+8}^{\mathbf{u}_{\overline{s}}}$, $R_{s+8}^{\mathbf{u}_{\overline{s+1}}}$ на вектор $\mathbf{e}_s$. Кроме этого, в коде есть линейная $i$-компонента $S_i \oplus \mathbf{e}_8$, содержащая вектор $\mathbf{0}$. Такая компонента должна содержать семь векторов веса 3, у которых $i$-я координата равна единице. Пусть $i = 2$. Носители этих семи векторов имеют вид: $[\mathbf{w}_1] = \{2,8,10\}$, $[\mathbf{w}_2] = \{2,4,6\}$, $[\mathbf{w}_3] = \{2,12,14\}$, $[\mathbf{w}_4] = \{2,3,7\}$, $[\mathbf{w}_5] = \{1,2,5\}$, $[\mathbf{w}_6] = \{2,11,15\}$, $[\mathbf{w}_7] = \{2,9,13\}$. Вычислив сумму (в пространстве $\{0,1\}^4$) элементов каждой тройки, убеждаемся, что $\mathbf{w}_s \in H^{15}$ при $s = 1,2,3$ и $\mathbf{w}_s \in (H^{15} \oplus \mathbf{e}_6)$ при $s = 4,5,6,7$. Компонента $S_2 \oplus \mathbf{e}_8$ является линейной оболочкой векторов $\mathbf{w}_s$ $(s = 1,\ldots,7)$. Это означает, что любой элемент такой компоненты либо принадлежит одной из компонент $R_8^{\mathbf{u}_r} \subset H^{15}$ $(r = 0,1,\overline{0},\overline{1})$, либо одной из компонент $(R_{14}^{\mathbf{u}_r} \oplus \mathbf{e}_6) \subset (H^{15} \oplus \mathbf{e}_6)$ $(r = 6,7,\overline{6},\overline{7})$. Это противоречит тому, что компонента $S_2 \oplus \mathbf{e}_8$ должна пересекаться с одной из компонент $R_{10}^{\mathbf{u}_r} \oplus \mathbf{e}_2$ $(r = 2, 3, \overline{2}, \overline{3})$. Поэтому случай $i = 2$ невозможен. Перестановка с циклическим представлением $(2,6,4)(1,3,5)(10,14,12)(9,11,13)$ из группы $\mathrm{Sym}_I(H^{15})$ не меняет разбиения $\mathcal{B}$ и переводит 2-компоненту $S_2$ в 6-компоненту, а 6-компоненту в 4-компоненту. Отсюда следует, что случаи $i = 6$ и $i = 4$ невозможны.

Осталось исследовать случай, когда при некоторых фиксированных $p$ и $q$ $i$-компонента $S_i$ пересекается только со сдвигами $p$-компонент и $q$-компонент семейства $\mathcal{B}$. Переставляя координаты, можно считать, что $p = 8$, $q = 14$. Кроме этого, осуществляя перенос, можно считать, что $\mathbf{e}_8 \in S_i$. Тогда в семейство $\mathcal{B}$ входит некоторые компоненты $R_8^{\mathbf{u}_q}$, $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 0,1,2,3$ и некоторые компоненты $R_{14}^{\mathbf{u}_q}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{q}}}$ при $q = 4,5,6,7$. Это означает, что компонента $S_i$ входит в линейный код

$$\widetilde{H}^{15} = \bigcup_{q=0}^{3} \Big( (R_8^{\mathbf{u}_q} \oplus \mathbf{e}_8) \cup (R_8^{\mathbf{u}_{\overline{q}}} \oplus \mathbf{e}_8) \cup (R_{14}^{\mathbf{u}_{q+4}} \oplus \mathbf{e}_{14}) \cup (R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{q+4}}} \oplus \mathbf{e}_{14}) \Big).$$

По лемме 8 из [9] компонента $S_i$ пересекается с парами взаимно антиподальных 8-компонент и с парами взаимно антиподальных 14-компонент. Известно, что пересечение двух различных компонент совершенного линейного кода длины 15 либо пусто, либо является подпространством размерности 4. Отсюда следует, что если компонента $S_i$ пересекается со всеми 8-компонентами рассматриваемого $(2 \times 8)$-разбиения, то $S_i$ не пересекается ни с одной 14-компонентой. Поэтому компонента $S_i$ пересекается с четырьмя 8-компонентами и с четырьмя 14-компонентами. Далее удобно будет перейти к коду $H^{15}$, сдвинув в коде $\widetilde{H}^{15}$ все 8-компоненты из рассматриваемого $(2 \times 8)$-разбиения на вектор $\mathbf{e}_8$ и все 14-компоненты на вектор $\mathbf{e}_{14}$. При этом $i$-компонента $S_i$ перейдёт в $i$-компоненту $S_i' \subset H^{15}$. Отсюда следует, в частности, что $i \neq 6$ (в этом случае $i = 8 \oplus 14$ и $S_i' = R_6 \subset R_8 \oplus R_{14}$; поэтому компонента $S_i'$ будет пересекаться со всеми 8-компонентами из $(2 \times 8)$-разбиения). Допустим, что $S_i'$ пересекается с 8-компонентой $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{1}}}$ и с 14-компонентой $R_{14}^{\mathbf{u}_6}$; этого можно добиться с помощью перестановок $(1,2)(4,7)(9,10)(12,15)$, $(2,3)(4,5)(10,11)(12,13)$, $(1,3)(5,7)(9,11)(13,15)$ и $(2,4)(3,5)(10,12)(11,13)$ из группы $\mathrm{Sym}_{\{8,14\}}(H^{15})$ (при этом значение $i$ может измениться). Если $i$ нечётно, то по лемме 5 из [9] компонента $S_i' = R_i$ не может пересекаться с компонентой $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{1}}}$. Поэтому новое значение $i$ принадлежит множеству $\{2,4,10,12\}$. Так как $\mathbf{0} \in S_i'$, то компоненте $S_i'$ должен принадлежать вектор $\mathbf{u} \in R_8^{\mathbf{u}_{\overline{1}}}$ веса 3, у которого $i$-я координата равна 1 и носитель которого равен одному из множеств $\{2,4,6\}$,

$\{10, 12, 6\}$. Пусть $\mathbf{v} \in R_{14}^{\mathbf{u}_6} \cap S'_i$. Из линейности компоненты $S'_i$ следует, что вектор $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ тоже принадлежит $S'_i$. Легко показывается, что $\mathbf{w} \in R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{7}}}$. По лемме 8 из [9] компонента $S'_i$ пересекается с компонентами $R_8^{\mathbf{u}_0}$, $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{0}}}$, $R_8^{\mathbf{u}_1}$, $R_8^{\mathbf{u}_{\overline{1}}}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_6}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{6}}}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_7}$, $R_{14}^{\mathbf{u}_{\overline{7}}}$, которые являются частью $(4 \times 4)$-разбиения. Лемма 3 доказана.

**Следствие 1.** *Все $(8 \times 2)$-коды и $(5 \times 2)$-коды являются невырожденными.*

Основным результатом является

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — семейства непересекающихся компонент кода $H^{15}$ такие, что коды $C_1 = H^{15}(\mathcal{B}_1)$, $C_2 = H^{15}(\mathcal{B}_2)$ являются либо $(8 \times 2)$-кодами, либо $(5 \times 2)$-кодами. Тогда коды $C_1$ и $C_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же орбите относительно группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(H^{15})$.

Доказательство. Если оба кода принадлежат одной орбите, то они, очевидно, эквивалентны. Наоборот, допустим, что коды $C_1$ и $C_2$ эквивалентны. Включим семейства $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ либо в содержащие их разбиения, либо в тупиковые наборы из десяти компонент $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$ кода $H^{15}$. Пусть $C_2 = A(C_1)$ при некотором преобразовании $A \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{15})$. В силу невырожденности в коде $C_2$ нет других линейных компонент, кроме компонент, параллельных компонентам кода $H^{15}$. Допустим, что компоненте $R_i^{\mathbf{u}}$ (где либо $R_i^{\mathbf{u}} \in \mathcal{B}'_1$, либо $R_i^{\mathbf{u}} \oplus \mathbf{e}_i \in \mathcal{B}'_1$) кода $C_1$ при отображении эквивалентности $A$ соответствует некоторая компонента $R_j^{\mathbf{v}} = A(R_i^{\mathbf{u}})$ кода $C_2$. Если эта компонента не входит в код $H^{15}$, то она входит в объединение компонент $R_p^{\mathbf{v}_p} \oplus \mathbf{e}_p$ ($R_p^{\mathbf{v}_p} \in \mathcal{B}_2$) (иначе будет выполняться условие (а) леммы 3, что противоречит параллельности компоненты $R_j^{\mathbf{v}}$ компонентам кода $H^{15}$). Такая компонента должна совпадать с одной из компонент $R_p^{\mathbf{v}_p} \oplus \mathbf{e}_p$. Это следует из того, что при любом фиксированном $p$ в семействе $\mathcal{B}_2$ (являющегося частью $(8 \times 2)$-разбиения либо частью тупикового $(5 \times 2)$-набора) содержится не более двух $p$-компонент. Поэтому при $q \neq p$ компонента $R_j^{\mathbf{v}}$ должна пересекаться с некоторой $q$-компонентой $R_q^{\mathbf{v}_q} \oplus \mathbf{e}_q$ ($R_q^{\mathbf{v}_q} \in \mathcal{B}_2$). Это противоречит тому, что компонента $R_j^{\mathbf{v}}$ параллельна компонентам кода $H^{15}$. В частности, мы доказали, что при отображении $A$ координате $i$ соответствует координата $j = p$; при этом оставшиеся $i$-компоненты семейства $\mathcal{B}'_1$ (параллельные компоненте $R_i^{\mathbf{u}}$) при отображении $A$ будут соответствовать $j$-компонентам, параллельным компоненте $R_j^{\mathbf{v}}$. В случае, когда семейство $\mathcal{B}'_1$ является разбиением кода $H^{15}$, это соответствие можно установить для каждой компоненты $R_p^{\mathbf{v}_p} \oplus \mathbf{e}_p$, где $R_p^{\mathbf{v}_p} \in \mathcal{B}_2$ (при отображении $A$ образ хотя бы одной компоненты из разбиения кода $C_1$ будет пересекаться с компонентой $R_p^{\mathbf{v}_p} \oplus \mathbf{e}_p$). Если некоторая $p$-компонента кода $H^{15}$ параллельна $p$-компоненте из семейства $\mathcal{B}_2$ и не принадлежит семейству $\mathcal{B}_2'$, то она обязательно пересекается при некотором $q \neq p$ хотя бы с одной $q$-компонентой семейства $\mathcal{B}_2$. Это следует из того, что семейство $\mathcal{B}_2$ единственным образом включается в максимальное семейство $\mathcal{B}_2'$ (см. доказательство теоремы 2 из [9]). Поэтому с помощью отображения $A$ можно установить соответствие между всеми компонентами из $\mathcal{B}_2'$, параллельными компонентам семейства $\mathcal{B}_2$, и некоторыми компонентами (или их сдвигами на векторы $\mathbf{e}_i$) из разбиения $\mathcal{B}_1'$.

Для установления полного соответствия между всеми компонентами из $\mathcal{B}_2'$ допустим, что $i$-компоненте $R_i^{\mathbf{u}}$ кода $C_1$ соответствует $j$-компонента $R_j^{\mathbf{v}} \subset H^{15}$. Если такая компонента пересекается с одной из компонент $R_p^{\mathbf{v}_p}$ семейства $\mathcal{B}_2'$ и не совпадает с $R_p^{\mathbf{v}_p}$, то она пересекается с антиподальной ей компонентой $R_p^{\mathbf{v}_{\overline{p}}}$. Следовательно, $R_p^{\mathbf{v}_p}, R_p^{\mathbf{v}_{\overline{p}}} \notin \mathcal{B}_2$ (так как по условию $R_j^{\mathbf{v}} \subset H^{15}$). Это невозможно в случае, когда $\mathcal{B}_2$ порождает $(5 \times 2)$-код (в таком семействе должны быть $i$-компоненты для $i$, принимающим по крайней мере пять значений). В случае, когда $\mathcal{B}_2'$ является $(8 \times 2)$-разбиением, такая ситуация возможна тогда, когда множество $I_{\mathcal{B}_2}$ тех $p$, для которых существуют $p$-комопоненты из семейства $\mathcal{B}_2$, является четырёхэлементным. При этом в пространстве $\{0,1\}^4$ элементы из $I_{\mathcal{B}_2}$ должны быть линейно независимы (иначе $\mathcal{B}_2'$ является $(4 \times 4)$-разбиением). Для $j$, равного сумме (в пространстве $\{0,1\}^4$) всех четырех элементов из $I_{\mathcal{B}_2}$, существует пара взаимно антиподальных $j$-компонент, не пересекающихся со всеми компонентами из $\mathcal{B}_2$. Это означает, что семейство компонент из $\mathcal{B}_2$ можно включить единственным образом и в некоторый тупиковый набор из десяти компонент. Так как предполагается, что $\mathcal{B}_1'$ является разбиением на 16 компонент, то такая ситуация невозможна.

Итак, мы показали, что $\mathcal{B}_2'$ является разбиением на 16 компонент, и с помощью отображения $A$ каждой компоненте из $\mathcal{B}_1$ сопоставляется некоторая компонента из разбиения $\mathcal{B}_2'$. Сдвинем ещё раз в коде $C_1$ каждую компоненту $R_i^{\mathbf{u}} \oplus \mathbf{e}_i$, где $R_i^{\mathbf{u}} \in \mathcal{B}_1$. В результате получим исходный линейный код $H^{15}$. При этом отображение эквивалентности $A$ в коде $C_2$ индуцирует сдвиги некоторых линейных компонент, являющихся сдвигами компонент из $\mathcal{B}_2'$. Индуцированные сдвиги компонент должны перевести код $C_2$ в некоторый линейный код $H_1$. Но все коды, которые получаются из $(4 \times 4)$-разбиения, $(8 \times 2)$-разбиения, или тупикового набора сдвигами хотя бы одной компоненты, являются нелинейными (см. [9, следствие из леммы 11]). Это означает, что индуцированные сдвиги должны вернуть все сдвинутые компоненты семейства $\mathcal{B}_2$ в исходное положение. Следовательно, $H_1 = H^{15}$. Поэтому $A \in \mathrm{Aut}(H^{15})$. А это означает, что коды $C_1$ и $C_2$ лежат в одной орбите относительно группы хемминговых автоморфизмов. Аналогичным образом разбирается случай, когда семейства $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ включаются в некоторые тупиковые наборы семейств $\mathcal{B}'_1$ и $\mathcal{B}'_2$ из 10 компонент. Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Порядки групп автоморфизмов всех* $(8 \times 2)$*-кодов и всех* $(5 \times 2)$*-кодов совпадают с порядками их групп хемминговых автоморфизмов.*

## 4. Некоторые итоги классификации

Рассмотрим коды с экстремальными характеристиками. Минимальный порядок группы автоморфизмов, равный 8, имеют три кода $Y72$, $Y62^1$, $Y61$. Пока неизвестно, существуют ли совершенные коды длины 15, имеющие порядок группы автоморфизмов меньше восьми. Следует отметить, что для любого $n > 15$ $(n = 2^k - 1)$ существуют совершенные коды длины $n$ с тривиальной группой автоморфизмов [19, 24]. Максимальную размерность ядра среди кодов ранга 15, равную 5, имеют 5 кодов $Y44$, $Y55$, $Y66$, $Y77$, $Z55$. Вопрос о существовании таких кодов с размерностью ядра 6 остается открытым [3]. Тривиальное ядро имеют коды $Y4$, $Y5$, $Y5^1$, $Y6$, $Y6^1$, $Y62^0$, $Y62^1$, $Y7$, $Y71$, $Y72$, $Y73^1$, $Y8^0$, $Y8^1$, $Y81$, $Y82$, $Y83$, $Y84^1$, $Z5$, $Z51$.

Рассмотрим несистематические коды. Такие коды длины $n \geqslant 255$ впервые были построены в [1]. Далее несистематические коды изучались в [11, 12, 16, 27]. Методы построения несистематических кодов длины $n \geqslant 31$, предложенные в [1, 27], не применимы для кодов длины 15, так как в коде Хемминга $H^{15}$ не существует семейства непересекающихся $i$-компонент $R_i^{\mathbf{v}_i}$ $(i = 1, \ldots, 15)$. Такие коды впервые были построены в [16, 27] с применением компьютеров. В [12, теорема 4] доказано, что все такие коды являются $(8\times2)$-кодами. Условиям теоремы 4 из [12] удовлетворяют 12 неэквивалентных несистематических кодов $Y7$, $Y71$, $Y72$, $Y73^0$, $Y73^1$, $Y74^1$, $Y8^0$, $Y8^1$, $Y81$, $Y82$, $Y83$, $Y84^1$. Это полный список несистематических кодов длины 15, которые можно построить из кода Хемминга сдвигами непересекающихся компонент. Несистематические коды $Y7$ и $Y8^0$ были найдены в [16, 27]. Вопрос о существовании несистематических кодов длины 15, которые не эквивалентны ни одному из приведенных выше двенадцати несистематических кодов, остаётся открытым.

## 5. Таблица кодов

Ниже приводится таблица описанных кодов. Дадим некоторые пояснения для пользования этой таблицей. В первой колонке таблицы содержатся порядковые номера перечисляемых кодов.

Во второй колонке помещается название кода. Название начинается с одной из букв $Y$, $Z$, после которой идет ряд цифр (некоторые цифры имеют показатели 0 или 1). Эта последовательность в какой-то мере отражает способ построения кода.

В третьей колонке содержится более подробная информация о методе построения. В целях экономии места в таблице при описании метода построения введены некоторые сокращения. Для построения $(8 \times 2)$-кодов используется набор векторов $\{\mathbf{v}_p \big| p = 0, \ldots, 7, \overline{0}, \ldots, \overline{7}\}$, описание которого приводится в разделе 2. На самом деле этот набор является перестановкой векторов $\mathbf{u}_p$. Для построения кодов этой серии используются компоненты $R_{p+8}^{\mathbf{v}_p}$, $R_{p+8}^{\mathbf{v}_{\overline{p}}}$ $(p = 0, \ldots, 7)$. Так как при этом требуется большое число координат, то в описании конструкции введено ещё одно сокращение. Две сдвигаемые взаимно антиподальные $i$-компоненты $R_i^{\mathbf{v}_p}$, $R_i^{\mathbf{v}_{\overline{p}}}$ в таблице обозначены одним символом $[p]_i$. Например, для построения кода из орбиты $Y42$ требуется сдвинуть пару антиподальных компонент $R_8^{\mathbf{v}_0}$, $R_8^{\mathbf{v}_{\overline{0}}}$ на вектор $\mathbf{e}_8$, антиподальную пару $R_9^{\mathbf{v}_1}$, $R_9^{\mathbf{v}_{\overline{1}}}$ на вектор $\mathbf{e}_9$, компоненту $R_{10}^{\mathbf{v}_2}$ на вектор $\mathbf{e}_{10}$ и компоненту $R_{12}^{\mathbf{v}_4}$ на вектор $\mathbf{e}_{12}$. В таблице эта конструкция записана следующим образом: $[0]_8[1]_9 2_{10} 4_{12}$. Единственный $(8 \times 2)$-код $Y88$ ранга 14 в таблицу не включен.

Для построения $(5 \times 2)$-кодов используется набор векторов $\{\mathbf{u}_{r,s} | r = 0, 1;\ s = 1, 8, 11, 13, 15\}$, описание которого имеется в разделе 2. Здесь антиподальными парами компонент являются $R_s^{\mathbf{u}_{0,s}}$, $R_s^{\mathbf{u}_{1,s}}$. Так как эта серия кодов похожа на предыдущую, то для записи способа построения мы сохранили тот же принцип.

В пятой колонке записаны порядки групп автоморфизмов. В силу следствия 2 эти группы являются подгруппами группы автоморфизмов кода Хемминга $H^{15}$. Поэтому вычисление порядков групп автоморфизмов рассматриваемых кодов не представляет особого труда. В шестой колонке помещены размерности ядер. Седьмая колонка отведена под число троек $ST(C)$ кода $C$, т. е. число векторов веса 3 в множестве $C \oplus C$.

$(8 \times 2)$**-коды:**

| № | Имя | Конструкция | $\lvert\mathrm{Aut}(C)\rvert$ | Ядро | $\lvert ST(C)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Y87$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}[5]_{13}[6]_{14}7_{15}$ | 2688 | 4 | 336 |
| 2 | $Y86$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}[5]_{13}6_{14}7_{15}$ | 384 | 3 | 404 |
| 3 | $Y85$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 96 | 2 | 438 |
| 4 | $Y84^1$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}[4]_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 48 | 1 | 455 |
| 5 | $Y84^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}4_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 192 | 2 | 438 |
| 6 | $Y83$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 24 | 1 | 455 |
| 7 | $Y82$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 24 | 1 | 455 |
| 8 | $Y81$ | $[0]_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 42 | 1 | 455 |
| 9 | $Y8^1$ | $0_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}\overline{7}_{15}$ | 336 | 1 | 455 |
| 10 | $Y8^0$ | $0_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}7_{15}$ | 336 | 1 | 455 |
| 11 | $Y77$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}[5]_{13}[6]_{14}$ | 5376 | 5 | 336 |
| 12 | $Y76$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}[5]_{13}6_{14}$ | 384 | 4 | 388 |
| 13 | $Y75$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}5_{13}6_{14}$ | 64 | 3 | 414 |
| 14 | $Y74^1$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}[4]_{12}5_{13}6_{14}$ | 24 | 2 | 427 |
| 15 | $Y74^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}4_{12}5_{13}6_{14}$ | 96 | 2 | 414 |
| 16 | $Y73^1$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}$ | 12 | 1 | 427 |
| 17 | $Y73^0$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}[6]_{14}$ | 48 | 2 | 427 |
| 18 | $Y72$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}$ | 8 | 1 | 427 |
| 19 | $Y71$ | $[0]_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}$ | 12 | 1 | 427 |
| 20 | $Y7$ | $0_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}6_{14}$ | 42 | 1 | 427 |
| 21 | $Y66$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}[5]_{13}$ | 1536 | 5 | 348 |
| 22 | $Y65$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}5_{13}$ | 128 | 4 | 366 |
| 23 | $Y64^1$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}[4]_{12}5_{13}$ | 32 | 3 | 375 |
| 24 | $Y64^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}4_{12}5_{13}$ | 128 | 3 | 366 |
| 25 | $Y63^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}4_{12}5_{13}$ | 16 | 2 | 375 |
| 26 | $Y63^1$ | $[0]_81_9[2]_{10}3_{11}4_{12}[5]_{13}$ | 24 | 2 | 375 |
| 27 | $Y62^1$ | $[0]_81_9[2]_{10}3_{11}4_{12}5_{13}$ | 8 | 1 | 375 |
| 28 | $Y62^0$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}$ | 32 | 2 | 375 |
| 29 | $Y61$ | $[0]_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}$ | 8 | 1 | 375 |
| 30 | $Y6$ | $0_81_92_{10}3_{11}4_{12}5_{13}$ | 24 | 1 | 375 |
| 31 | $Y55$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}[4]_{12}$ | 768 | 5 | 306 |
| 32 | $Y54^1$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}[4]_{12}$ | 96 | 4 | 311 |
| 33 | $Y54^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}[3]_{11}4_{12}$ | 384 | 4 | 306 |
| 34 | $Y53^1$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}[4]_{12}$ | 32 | 3 | 311 |
| 35 | $Y53^0$ | $[0]_8[1]_9[2]_{10}3_{11}4_{12}$ | 48 | 3 | 311 |
| 36 | $Y52^1$ | $[0]_8[1]_92_{10}3_{11}4_{12}$ | 16 | 2 | 311 |

| № | Имя | Конструкция | $\lvert\mathrm{Aut}(C)\rvert$ | Ядро | $\lvert ST(C)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | $Y52^0$ | $[0]_8 1_9 2_{10} 3_{11} [4]_{12}$ | 24 | 2 | 311 |
| 38 | $Y51^1$ | $[0]_8 1_9 2_{10} 3_{11} 4_{12}$ | 12 | 1 | 311 |
| 39 | $Y51^0$ | $0_8 1_9 2_{10} 3_{11} [4]_{12}$ | 48 | 2 | 311 |
| 40 | $Y5$ | $0_8 1_9 2_{10} 3_{11} 4_{12}$ | 24 | 1 | 311 |
| 41 | $Y44$ | $[0]_8 [1]_9 [2]_{10} [4]_{12}$ | 768 | 5 | 243 |
| 42 | $Y43$ | $[0]_8 [1]_9 [2]_{10} 4_{12}$ | 96 | 4 | 243 |
| 43 | $Y42$ | $[0]_8 [1]_9 2_{10} 4_{12}$ | 32 | 3 | 243 |
| 44 | $Y41$ | $[0]_8 1_9 2_{10} 4_{12}$ | 24 | 2 | 243 |
| 45 | $Y4$ | $0_8 1_9 2_{10} 4_{12}$ | 48 | 1 | 243 |

$(5 \times 2)$**-коды:**

| № | Имя | Конструкция | $\lvert\mathrm{Aut}(C)\rvert$ | Ядро | $\lvert ST(C)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 46 | $Z5$ | $1_1 8_8 11_{11} 13_{13} 15_{15}$ | 120 | 1 | 335 |
| 47 | $Z51$ | $[1]_1 8_8 11_{11} 13_{13} 15_{15}$ | 48 | 1 | 335 |
| 48 | $Z52$ | $[1]_1 [8]_8 11_{11} 13_{13} 15_{15}$ | 48 | 2 | 335 |
| 49 | $Z53$ | $[1]_1 [8]_8 [11]_{11} 13_{13} 15_{15}$ | 96 | 3 | 335 |
| 50 | $Z54$ | $[1]_1 [8]_8 [11]_{11} [13]_{13} 15_{15}$ | 384 | 4 | 331 |
| 51 | $Z55$ | $[1]_1 [8]_8 [11]_{11} [13]_{13} [15]_{15}$ | 3840 | 5 | 315 |

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И.** О несистематических совершенных двоичных кодах // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, вып. 3. С. 47–50.
2. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И.** Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами $\widetilde{\alpha}$-компонент // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33, вып. 3. С. 15–21.
3. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И., Хеден У.** Совершенные коды полного ранга с ядрами больших размерностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 4. С. 3–8.
4. **Васильев Ю. Л.** О негрупповых плотно упакованных кодах // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 75–78.
5. **Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.** Двоичные расширенные совершенные коды длины 16, построенные обобщённой каскадной конструкцией // Проблемы передачи информации. 2002. Т. 38, вып. 4. С. 56–84.
6. **Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.** Двоичные совершенные коды длины 15, построенные обобщенной каскадной конструкцией // Проблемы передачи информации. 2004. Т. 40, вып. 1. С. 27–39.
7. **Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В.** Двоичные расширенные совершенные коды длины 16 ранга 14 // Проблемы передачи информации (в печати).

8. **Кротов Д. С.** Нижние оценки числа $m$-квазигрупп порядка 4 и числа совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 2. С. 47–53.

9. **Малюгин С. А.** О перечислении совершенных двоичных кодов длины 15 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 48–73.

10. **Малюгин С. А.** О нижней оценке числа совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций, Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 44–48.

11. **Малюгин С. А.** О критерии несистематичности совершенных двоичных кодов // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 1. С. 13–16.

12. **Малюгин С. А.** Несистематические совершенные двоичные коды// Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 1. С. 55–76.

13. **Малюгин С. А.** О классах эквивалентности совершенных двоичных кодов длины 15 // Новосибирск, 2004. – 34с. (Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики; № 138).

14. **Малюгин С. А., Романов А. М.** О разбиениях кодов Хемминга на непересекающиеся компоненты // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 42–48.

15. **Романов А. М.** О построении совершенных нелинейных двоичных кодов инверсией символов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 46–52.

16. **Романов А. М.** О несистематических совершенных кодах длины 15 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 75–78.

17. **Романов А. М.** О разбиениях $q$-ичных кодов на непересекающиеся компоненты// Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 3. С. 80–87.

18. **Соловьева Ф. И.** Геометрический подход к негрупповым плотно упакованным кодам (способы построения, свойства проекций).– Дисс. канд. физ.-мат.наук. Новосибирск, 1990.

19. **Avgustinovich S. V., Solov'eva F. I.** Perfect binary codes with trivial automorphism group // Proc. of IEEE Intern. Workshop on Inform. Theory. Killarney, Ireland, 1998 (June). P. 114–115.

20. **Cohen G., Honkala I., Litsyn S., Lobstein A.** Covering codes. North Holland: Elsevier, 1998.

21. **Etzion T., Vardy A.** Perfect binary codes: Constructions, properties and enumeration // IEEE Trans. Inform. Theory. 1994. V. 40, N 3. P. 754–763.

22. **Hergert F.** The equivalence classes of the Vasil'ev codes of length 15 // Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), Berlin: Springer, 1982. P. 176–186. (Lectures Notes in Math.; V. 969).

**23. Krotov D. S., Avgustinovich S. V.** On the number of 1-perfect binary codes. A lower bound // Российская конференция "Дискретный анализ и исследование операций": Материалы конференции. (Новосиборск, 28 июня–2 июля 2004.) Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 2004. С. 95.

**24. Malyugin S. A.** Perfect codes with trivial automorphism group // Proc. Second Intern. Workshop on Optimal Codes and Related Topics. Sozopol, Bulgaria, 1998 (June). P. 163–167.

**25. Phelps K. T.** An enumeration of 1-perfect binary codes // Australasian J. of Combinatorics. 2000. V. 21. P. 287–298.

**26. Phelps K. T., LeVan M. J.** Kernels of nonlinear Hamming codes // Designs, Codes and Cryptogr. 1995. V. 6, N 3. P. 247–257.

**27. Phelps K. T., LeVan M. J.** Non-sistematic perfect codes // SIAM J. Discrete Math. 1999. V. 12, N 1. P. 27–34.

**28. Solov'eva F. I.** Constructions of perfect binary codes // Preprint 98–042. Univ. Bielefeld, 1998. 12p.

**29. Solov'eva F. I.** Switchings and perfect codes // Numbers, Information and Complexity. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000. P. 311–324.

**30. Solov'eva F. I.** On perfect codes and related topics. Korea: Pohang, Combinatorial and Computational Mathematics Center. Pohang University of Science and Technology, 2004. 80 p. (Lecture Note Ser. 13).

**31. Vasil'ev Y. L., Solov'eva F. I.** Interdependence between perfect binary codes and their projections // Proc. Seventh Joint Swedish-Russian International Workshop on Information Theory. St.-Peterburg, Russia. (June 1995). Moscow, 1995. P. 239–242.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: mal@math.nsc.ru

Статья поступила
11 ноября 2005 г.