ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2006. Серия 1. Том 13, № 1. 99–108

УДК 519.176

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАФА С ЗАДАННЫМ РАЗНООБРАЗИЕМ ШАРОВ*)

К. Л. Рычков

Доказано, что для любого натурального d и любого целочисленного набора $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$ такого, что $\tau_0 \geqslant \tau_1 \geqslant ... \geqslant \tau_d = 1$ и $\tau_{d-1} \geqslant d^2+1$, существует граф диаметра d, вектор разнообразия шаров которого равен $\overline{\tau}$; если $d \geqslant 3$, то не существует графа диаметра d, вектор разнообразия шаров которого $(\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$ удовлетворяет условию $\tau_0 = \tau_1 = ... = \tau_{d-1} \leqslant 2d-1$.

Рассматриваются обыкновенные связные графы $G(V, E)$ с множеством вершин V, множеством рёбер E, диаметра $d(G)$ и с обычным расстоянием $\rho_G(x, y) = \min |P(x, y)|$, где минимум берется по всевозможным простым цепям $P(x, y)$ между вершинами x и y в графе G, а $|P|$ — длина цепи P . Графу G диаметра d поставим в соответствие набор $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$, где τ_i — число различных шаров радиуса i в G. Набор $\overline{\tau}(G)$ называется *вектором разнообразия шаров* в графе G [4]. Ясно, что компоненты вектора $\overline{\tau}(G)$ связаны соотношениями

$$|V(G)| = \tau_0 \geqslant \tau_1 \geqslant ... \geqslant \tau_d = 1.$$

Шар радиуса i с центром в вершине v будем обозначать через $S_i(v)$. Будем говорить, что вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d)$ *графически реализуем*, если существует такой граф G, что $\overline{\lambda} = \overline{\tau}(G)$. Через M_d обозначим множество таких целочисленных векторов $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$, что $\tau_0 \geqslant \tau_1 \geqslant ... \geqslant \tau_d = 1$. Через $m(d)$ обозначим минимальное натуральное число k, которое удовлетворяет следующему условию: любой вектор $\overline{\tau} \in M_d$ такой, что $\tau_{d-1} \geqslant k$, графически реализуем. Если для некоторого d такого k не существует, то считаем, что $m_d = \infty$. Через $M_d(n)$ обозначим множество векторов из M_d, у которых $\tau_0 \leqslant n$. Через $R_d(n)$ обозначим множество тех векторов из $M_d(n)$, которые графически реализуемы. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|R_d(n)|}{|M_d(n)|} = 1$, то будем говорить, что почти все векторы из множества M_d графически реализуемы.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00364).

В [1, 2] исследовалась метрическая структура графов на основе разнообразия и пересекаемости шаров в графе. Характеризация векторов разнообразия шаров в графах — одна из задач, возникающих при таком подходе. В работе [4] дано необходимое и достаточное условие графической реализуемости вектора $\overline{\tau}$ деревом. В настоящей статье устанавливаются следующие факты.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:
1) $m(1) = 2$;
2) $m(2) = 3$;
3) *если* $d \geqslant 3$, *то* $2d \leqslant m(d) \leqslant 2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1$.

Теорема 2. *При любом натуральном d почти все векторы из множества M_d графически реализуемы.*

Доказательство теоремы 1. Граф G имеет диаметр 1 тогда и только тогда, когда $G = K_n$ и $n \geqslant 2$, где K_n — полный n-вершинный граф. Ясно, что $\overline{\tau}(K_n) = (n, 1)$. Поэтому $m(1) = 2$ и первое утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем, что $m(2) = 3$. Очевидно, что в любом графе диаметра 2 имеется не менее 3 вершин. Поэтому вектор $(2, 2, 1)$ из M_2 графически не реализуем. Следовательно, $m(2) \geqslant 3$.

Пусть теперь $(\tau_0, \tau_1, 1)$ — произвольный вектор из M_2 такой, что $\tau_1 \geqslant 3$. Построим такой граф G, что выполнено равенство $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, 1)$. Для этого рассмотрим граф $G'(V', E')$, где $V' = \{a, b, v_1, v_2, ..., v_{\tau_1 - 2}\}$ и $E' = \{(v_1, a), (v_1, b), ..., (v_{\tau_1-2}, a), (v_{\tau_1-2}, b)\}$. Очевидно, что G' имеет диаметр 2 и для компонент вектора $\overline{\tau}(G') = (\tau'_0, \tau'_1, 1)$ справедливо равенство $\tau'_0 = \tau'_1 = \tau_1$. Если $\tau_0 = \tau_1$, то в качестве графа G можно взять G'. Если же $\tau_0 > \tau_1$, то к графу G' добавим $\tau_0 - \tau_1$ новых вершин. Все добавленные вершины соединим между собой рёбрами. В результате получим полный граф $K_{\tau_0 - \tau_1}$. Кроме того, каждую из добавленных вершин соединим рёбрами с вершиной a и со всеми теми вершинами графа G', с которыми смежна a. Полученный граф возьмём в качестве графа G. Ясно, что G имеет диаметр 2 и $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, 1)$. Второе утверждение теоремы 1 доказано.

Третье утверждение теоремы 1 состоит из двух утверждений, которые назовём леммой 1 и леммой 2.

Лемма 1. *При любом натуральном $d \geqslant 3$ справедливо неравенство $m(d) \geqslant 2d$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $d \geqslant 3$ не существует графа G диаметра d, вектор разнообразия шаров которого

$\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$ удовлетворяет условию $\tau_0 = \tau_1 = ... = \tau_{d-1} \leqslant 2d - 1$. Предположим, что для некоторого $d \geqslant 3$ такой граф G существует. Рассмотрим четыре возможных случая.

1) G двусвязен. Пусть u и v — две вершины графа G, расстояние между которыми равно d, и пусть C — простой цикл в графе G, в котором содержатся u и v. Поскольку G двусвязен, такой цикл существует [3]. Ясно, что в C имеется не менее $2d$ вершин. Это противоречит тому, что в графе G имеется не более $2d - 1$ вершин, поскольку $\tau_0 \leqslant 2d - 1$.

2) В G имеется не менее двух точек сочленения. Поскольку диаметр графа G равен d, для любой точки сочленения v в шаре $S_{d-1}(v)$ содержатся все вершины графа G. Поэтому для любых двух точек сочленения u, v шары $S_{d-1}(u)$ и $S_{d-1}(v)$ совпадают. Это противоречит тому, что $\tau_0 = \tau_{d-1}$.

3) В G имеется ровно одна точка сочленения v и в шаре $S_{d-2}(v)$ содержатся все вершины графа G. Пусть u — произвольная вершина, смежная с v. Тогда в шаре $S_{d-1}(u)$ содержатся все вершины графа G. Следовательно, шары $S_{d-1}(v)$ и $S_{d-1}(u)$ совпадают. Это противоречит тому, что $\tau_0 = \tau_{d-1}$.

4) В G имеются ровно одна точка сочленения v и такая вершина u, что $\rho(u, v) = d - 1$. Рассмотрим совокупность блоков графа G (т. е. максимальных по включению связных подграфов графа G без точек сочленения). Известно [3], что совокупность блоков графа покрывает как все вершины, так и все рёбра графа. При этом любые два блока либо не пересекаются, либо имеют единственную общую вершину. Кроме того, вершина графа является точкой сочленения тогда и только тогда, когда она принадлежит двум или более блокам.

Поскольку граф G связен, v принадлежит всем блокам графа G. Обозначим через B такой блок графа G, в котором содержится вершина u, и пусть t — произвольная смежная с v вершина из блока B. Покажем, что в шаре $S_{d-1}(t)$ содержатся все вершины графа G. Так как диаметр G равен d и $\rho(u, v) = d - 1$, то в шаре $S_1(v)$ содержатся все вершины блоков графа G, отличных от B. Следовательно, в шаре $S_2(t)$ содержатся все вершины блоков графа G, отличных от B. Далее, так как блок B двусвязен и в нём содержится не более $2d - 1$ вершин, то расстояние между любыми двумя вершинами из B не превосходит $d - 1$. Следовательно, в шаре $S_{d-1}(t)$ содержатся все вершины блока B. Так как $d \geqslant 3$, то $S_2(t) \subseteq S_{d-1}(t)$. Поэтому в шаре $S_{d-1}(t)$ содержатся все вершины графа G. Следовательно, $S_{d-1}(t) = S_{d-1}(v)$, что противоречит равенству $\tau_0 = \tau_{d-1}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При любом целом $d \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$m(d) \leqslant 2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1.$$

Доказательство. Пусть $d \geqslant 3$ и $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$ — произвольный вектор из M_d, удовлетворяющий условию $\tau_{d-1} \geqslant 2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1$. Построим граф G диаметра d такой, что $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d)$. Для этого вектору $\overline{\tau}$ поставим в соответствие последовательность векторов $\tau^0, \tau^1, ..., \tau^d$ таких, что компоненты вектора $\overline{\tau}^0 = (\tau_0^0, \tau_1^0, ..., \tau_d^0)$ определены равенствами

$$\tau_0^0 = \tau_1^0 = ... = \tau_{d-1}^0 = 2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1, \quad \tau_d^0 = 1,$$

и при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant d$, компоненты вектора $\overline{\tau}^i = (\tau_0^i, \tau_1^i, ..., \tau_d^i)$ определены равенствами

$$\tau_0^i = \tau_1^i = ... = \tau_{d-i}^i = \tau_{d-i},\ \tau_{d-i+1}^i = \tau_{d-i+1},\ \ldots,\ \tau_d^i = \tau_d.$$

Отметим, что вектор $\overline{\tau}^d$ совпадает с вектором $\overline{\tau}$. Процедура построения графа G состоит из $d+1$ шагов. На шаге i, $0 \leqslant i \leqslant d$, строится такой граф G_i диаметра d, что $\overline{\tau}(G_i) = \overline{\tau}^i$. Таким образом, в качестве искомого графа G можно взять построенный на последнем шаге граф G_d.

Для большей наглядности и с целью классификации вершин графы $G_0, G_1, ...G_d$ будем изображать на плоскости. Для этого на евклидовой плоскости зафиксируем прямоугольную систему координат XOY. Для каждого целого z прямую, проходящую через точку $(0, z)$ параллельно оси OX, назовём *горизонтальным уровнем* с номером z (для краткости просто *уровнем* с номером z) и обозначим её через L_z. Отметим, что вершины графов $G_0, G_1, ..., G_d$ будут располагаться только на уровнях $L_0, L_1, ..., L_{2(d-1)}$.

Простую цепь $P(V, E)$, где $V = \{v_0, v_1, ..., v_k\}$ и $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\}$, будем обозначать через $(v_0, v_1, ..., v_k)$ и для краткости называть цепью. При этом под длиной цепи понимается число рёбер в ней; цепь $(v_0, v_1, ..., v_k)$ соединяет вершины v_0, v_k, которые называются концами цепи; вершины $v_1, ..., v_{k-1}$ называются внутренними; подцепь цепи $(v_0, v_1, ..., v_k)$, соединяющая вершины v_i и v_j, есть цепь $(v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$.

Будем говорить, что *граф G получен из графа H добавлением цепей* $P_1, ..., P_k$, если $G = H \cup P_1 \cup ... \cup P_k$ и выполнены следующие условия:

a) концы цепей $P_1, ..., P_k$ принадлежат H;

b) внутренние вершины цепей $P_1, ..., P_k$ не принадлежат H;

c) общими вершинами для цепей $P_1, ..., P_k$ могут быть только их концы.

Нулевой шаг. Через $\widehat{\widehat{G_0}}$ обозначим граф, состоящий из следующих двух компонент связности. Первая компонента — это одновершинный граф с вершиной a, лежащей на уровне L_0. Вторая компонента — это полный граф с $\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1$ вершинами $b_0, b_1, ..., b_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$, причём все вершины принадлежат уровню $L_{2(d-1)}$. Через $\widehat{G_0}$ обозначим граф, который получен из графа $\widehat{\widehat{G_0}}$ посредством добавления $\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1$ цепей $C_0, C_1, ..., C_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$, где при каждом j, $0 \leqslant j \leqslant \lfloor (d-1)/2 \rfloor$, цепь $C_j = (v_0^j, v_1^j, ..., v_{d-1}^j)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant d-1$, имеет место включение $v_l^j \in L_{2l}$;

b) $v_0^j = a$;

c) $v_{d-1}^j = b_j$.

В дальнейшем цепи $C_0, C_1, ..., C_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$ будем называть *основными* цепями.

Цепь $P = (x_0, x_1, ..., x_m)$, $m \geqslant 2$, будем называть *вспомогательной*, если выполнены следующие условия:

a) $x_0 \in L_{2k}$, где k — некоторое целое число;

b) $x_m \in L_{2k+2(m-1)}$;

c) для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, имеет место включение $x_l \in L_{2k-1+2l}$.

Другими словами, цепь P называется вспомогательной, если её концы принадлежат разным уровням с чётными номерами, а внутренние вершины принадлежат последовательно всем промежуточным уровням с нечётными номерами.

Далее, если d чётно, то в качестве графа G_0 берётся граф, полученный из $\widehat{G_0}$ добавлением $d-1$ цепей $P_1, ..., P_{d-1}$: если d нечётно — добавлением $d-1$ цепей $P_1, ..., P_{d-1}$ и одной цепи $P'_{(d-1)/2}$, где при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant (d-1)/2$, цепь P_j — вспомогательная цепь, соединяющая вершины v_0^j и v_j^j основной цепи C_j; при каждом j, $1 \leqslant j < (d-1)/2$, цепь P_{d-1-j} — вспомогательная цепь, соединяющая вершины v_j^j и v_{d-1}^j основной цепи C_j; P_{d-1} — вспомогательная цепь, соединяющая вершины v_0^0 и v_{d-1}^0 основной цепи C_0; если d нечётно, то $P'_{(d-1)/2}$ — вспомогательная цепь, соединяющая вершины $v_{(d-1)/2}^{(d-1)/2}$ и $v_{d-1}^{(d-1)/2}$ основной цепи $C_{(d-1)/2}$.

Отметим, что для каждой вспомогательной цепи P_j, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, существует ровно одна основная цепь, которой принадлежат оба конца цепи P_j. Подцепь этой основной цепи, соединяющая концы цепи P_j, обозначим через D_j. Отметим также, что длина цепи D_j равна j.

Через H_j^0, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, обозначим подграф $P_j \cup D_j$ графа G_0. Далее считаем, что для каждого j вершины цепи D_j занумерованы числами

от 0 до j (снизу вверх). Вершину с номером l цепи D_j будем называть *полюсом* с номером l в графе H_j^0. Граф H_j^0 вместе с нумерацией его полюсов будем называть *фрагментом с номером* j графа G_0 или просто *фрагментом* H_j^0.

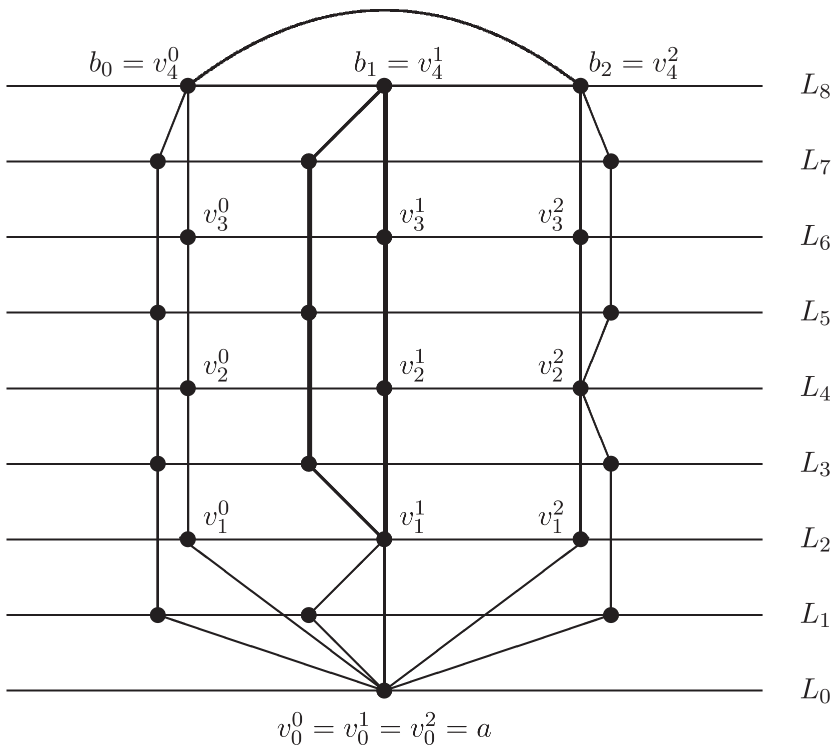

Рис. 1. Граф G_0 при $d = 5$. Жирными линиями выделен фрагмент H_3^0

Через B_j^0, $1 \leqslant j < (d-1)/2$, обозначим подграф $H_j^0 \cup H_{d-1-j}^0$ графа G_0 и будем называть его *полосой* с номером j в графе G_0 или просто полосой B_j^0. Если d нечётно, то полосой $B_{(d-1)/2}^0$ будем называть подграф $C_{(d-1)/2} \cup P_{(d-1)/2} \cup P'_{(d-1)/2}$ графа G_0. Полосой B_0^0 будем называть фрагмент H_{d-1}^0. На рис. 1 изображён граф G_0 при $d = 5$.

Пусть для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, граф G_{i-1} уже построен и определены фрагменты $H_1^{i-1}, ..., H_{d-1}^{i-1}$ графа G_{i-1}, т. е. выполнены шаги с номерами $0, 1, ..., i-1$.

Шаг i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$. Вычисляются целые неотрицательные числа q_i, r_i, которые удовлетворяют соотношениям

$$\tau_{d-i} - \tau_{d-i+1} = q_i(d-i) + r_i, \quad r_i < d-i,$$

где τ_{d-i}, τ_{d-i+1} — компоненты вектора $\overline{\tau}$ с номерами $d-i, d-i+1$ соответственно. Если $r_i = 0$, то в качестве графа G_i возьмём граф, полученный из графа G_{i-1} добавлением вспомогательных цепей $T_1, ..., T_{q_i}$, соединяющих полюс с номером 0 и полюс с номером $d-i$ фрагмента H^{i-1}_{d-i} графа G_{i-1}; если $r_i > 0$, то в качестве графа G_i возьмём граф, полученный из графа G_{i-1} добавлением указанных цепей $T_1, ..., T_{q_i}$ и ещё одной вспомогательной цепи K, которая соединяет полюс с номером 0 и полюс с номером r_i фрагмента H^{i-1}_{d-i}. При этом если $j \neq d-i$ и $1 \leqslant j \leqslant d-1$, то фрагментом H^i_j графа G_i считаем фрагмент H^{i-1}_j графа G_{i-1}; фрагментом H^i_{d-i} считаем граф $H^{i-1}_{d-i} \cup T_1 \cup ... \cup T_{q_i}$, если $r_i = 0$, и граф $H^{i-1}_{d-i} \cup T_1 \cup ... \cup T_{q_i} \cup K$, если $r_i > 0$.

Определение полос $B^i_0, B^i_1, ..., B^i_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$ графа G_i отличается от определения полос графа G_0 только тем, что в последнем определении верхний индекс 0 у фрагментов $H^0_1, ..., H^0_{d-1}$ заменяется на i.

Шаг d. Пусть $\Delta = \tau_0 - \tau_1$, где τ_0 и τ_1 — компоненты вектора $\overline{\tau}$ с номерами 0 и 1 соответственно. Тогда в качестве графа G_d возьмём граф, полученный из графа G_{d-1} посредством замены вершины a (вершины с уровня L_0) на полный граф $K_{\Delta+1}$. Более точно, к графу G_{d-1} добавим Δ новых вершин $a_1, ..., a_\Delta$, каждая из которых лежит на уровне L_0. Добавленные вершины соединим между собой рёбрами и с вершиной a так, чтобы получился полный граф $K_{\Delta+1}$. Кроме того, каждую из добавленных вершин соединим рёбрами со всеми теми вершинами графа G_{d-1}, с которыми смежна a. Полученный граф и есть граф G_d. На рис. 2 изображён граф G_d при $d = 5$.

Ясно, что в силу выполненных построений диаметр каждого графа $G_0, G_1, ..., G_d$ равен d. Чтобы показать, что векторы разнообразия шаров этих графов есть соответственно векторы $\overline{\tau}^0, \overline{\tau}^1, ..., \overline{\tau}^d$, понадобятся следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Если две вершины u, v графа G_i, $0 \leqslant i \leqslant d$, принадлежат разным фрагментам графа G_i или разным уровням, то шары $S_{d-1}(u)$ и $S_{d-1}(v)$ графа G_i различны (а, значит, при каждом r, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, шары $S_r(u), S_r(v)$ графа G_i не совпадают).*

Доказательство. Предложение 1 очевидно, если заметить, что при каждом i, $0 \leqslant i \leqslant d$, шары радиуса $d-1$ в графе G_i устроены следующим образом.

1) Если вершина v принадлежит уровню L_0, то в шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся все вершины из G_i.

2) Если вершина v принадлежит уровню L_{2k}, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, то в

шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся все вершины той полосы графа G_i, в которой лежит вершина v, и только такие вершины из остальных полос графа G_i, которые не принадлежат уровню $L_{2(d-1)-2k+1}$.

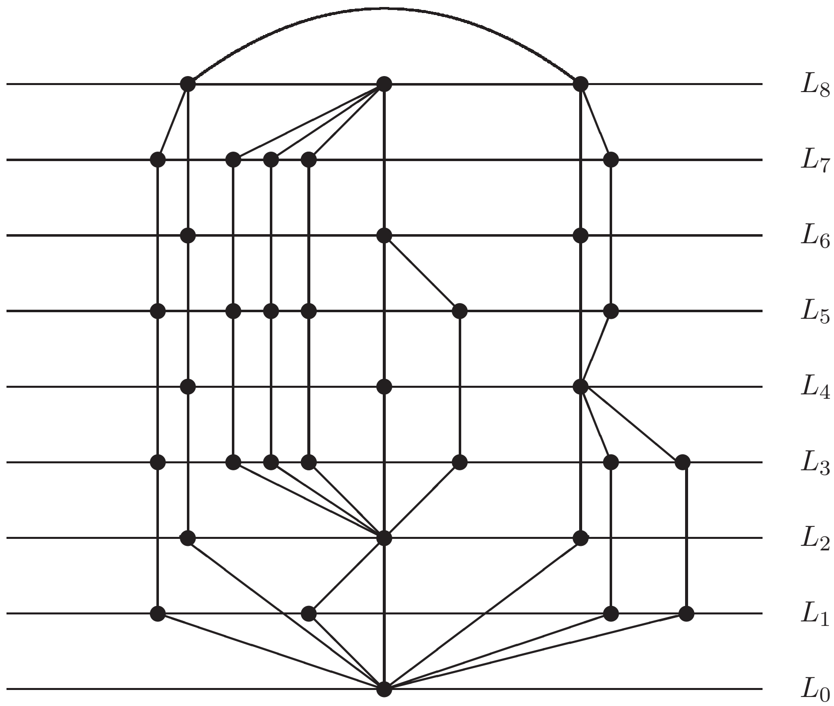

Рис. 2. Граф $G = G_d$ при $d = 5$ и $\overline{r} = (35, 35, 35, 33, 25, 1)$

3) Если вершина v принадлежит уровню L_1 и полосе B_0^i, то в шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся: все те вершины полосы B_0^i, которые не принадлежат уровню $L_{2(d-1)}$; одна вершина полосы B_0^i из уровня $L_{2(d-1)}$, которая принадлежит той же вспомогательной цепи, что и вершина v; только те вершины из остальных полос G_i, которые не принадлежат уровням $L_{2(d-1)-1}$ и $L_{2(d-1)}$.

4) Если вершина v принадлежит уровню L_1 и одной из полос $B_1^i, \ldots, B_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}^i$, то в шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся все вершины той полосы G_i, в которой лежит вершина v, и только те вершины из остальных полос G_i, которые не принадлежат уровням $L_{2(d-1)-1}$ и $L_{2(d-1)}$.

5) Если вершина v принадлежит уровню L_{2k-1}, $2 \leqslant k \leqslant d-1$, и полосе B_0^i, то в шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся: все те вершины полосы B_0^i, которые не принадлежат уровню $L_{2(d-1)-2k+1}$; одна вершина из полосы

B_0^i с уровня $L_{2(d-1)-2k+1}$, которая принадлежит той же вспомогательной цепи, что и вершина v; только те вершины из остальных полос G_i, которые не принадлежат уровням $L_{2(d-1)-2k+1}, L_{2(d-1)-2k+2}, L_{2(d-1)-2k+3}$.

6) Если вершина v принадлежит уровню L_{2k-1}, $2 \leqslant k \leqslant d-1$, и одной из полос $B_1^i, ..., B^i_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$, то в шаре $S_{d-1}(v)$ графа G_i содержатся все вершины той полосы G_i, в которой лежит вершина v, и только те вершины остальных полос G_i, которые не принадлежат уровням $L_{2(d-1)-2k+1}, L_{2(d-1)-2k+2}, L_{2(d-1)-2k+3}$. Утверждение 1 доказано.

Из аналогичных соображений вытекает утверждение 2.

Утверждение 2. *Если различные вершины u, v графа G_i, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, принадлежат фрагменту с номером j, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, графа G_i и лежат на одном уровне, то*

1) *шары $S_j(u)$ и $S_j(v)$ графа G_i не совпадают (а, значит, не совпадают шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$, $0 \leqslant r \leqslant j$);*

2) *если $r > j$, то шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ графа G_i совпадают.*

Теперь индукцией по i докажем, что для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, справедливо равенство $\overline{\tau}(G_i) = \overline{\tau}^i$. Так как в графе G_0 имеется $2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1$ вершин, и нет двух различных вершин, которые принадлежат одному и тому же фрагменту и одному и тому же уровню, то из предложения 1 следует справедливость равенства $\overline{\tau}(G_0) = \overline{\tau}^0$.

Пусть для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, установлено, что $\overline{\tau}(G_{i-1}) = \overline{\tau}^{i-1}$. Докажем, что тогда справедливо равенство $\overline{\tau}(G_i) = \overline{\tau^i}$. Заметим, что, во-первых, для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, кроме $j = d-i$, фрагмент с номером j графа G_i, т. е. граф H_j^i, совпадает с фрагментом H_j^{i-1} графа G_{i-1}. Во-вторых, фрагмент H_{d-i}^i отличается от фрагмента H_{d-i}^{i-1} тем, что на нечётных уровнях фрагмента H_{d-i}^i находятся новые вершины. На каждом из первых r_i нечётных уровней фрагмента H_{d-i}^i размещено по $q_i + 1$ новых вершин, а на остальных $d-i-r_i$ нечётных уровнях размещено по q_i новых вершин. Отсюда и из предложений 1, 2 следует, что компоненты вектора $\overline{\tau}(G_i)$ с номерами $0, 1, ..., d-i$ больше соответствующих компонент вектора $\overline{\tau}(G_{i-1})$ на $q_i(d-i) + r_i$. Кроме того, компоненты вектора $\overline{\tau}(G_i)$ с номерами $d-i+1, ..., d$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $\overline{\tau}(G_{i-1})$. Поскольку $\overline{\tau}(G_{i-1}) = \overline{\tau}^{i-1}$, из определения чисел q_i, r_i и векторов $\overline{\tau}^{i-1}, \overline{\tau}^i$ следует, что $\overline{\tau}(G_i) = \overline{\tau}^i$,$1 \leqslant i \leqslant d-1$.

Теперь докажем, что $\overline{\tau}(G_d) = \overline{\tau^d}$. Граф G_d отличается от графа G_{d-1} тем, что в графе G_d на уровне L_0 размещено Δ новых вершин. При этом для любых двух вершин $u, v \in L_0$ шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ графа G_d совпадают при каждом r, $1 \leqslant r \leqslant d-1$. Ясно, что для любых двух вершин u, v графа G_{d-1} и при любом r, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$

графа G_d совпадают тогда и только тогда, когда совпадают шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ графа G_{d-1}. Поэтому вектор $\overline{\tau}(G_d)$ отличается от вектора $\overline{\tau}(G_{d-1})$ только нулевой компонентой: нулевая компонента вектора $\overline{\tau}(G_d)$ больше нулевой компоненты вектора $\overline{\tau}(G_{d-1})$ на Δ. Так как $\overline{\tau}(G_{d-1}) = \overline{\tau}^{d-1}$, то из определения числа Δ и векторов $\overline{\tau}^{d-1}, \overline{\tau}^d$ следует равенство $\overline{\tau}(G_d) = \overline{\tau}^d$. Лемма 2 доказана. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть d, n — произвольные натуральные числа и $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_d) \in M_d(n)$. Обозначим через $x_1, ..., x_n$ соответственно число единиц, число двоек и т. д. в последовательности $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{d-1}$. Ясно, что мощность множества $M_d(n)$ совпадает с числом решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + ... + x_n = d$, которое, как известно [5], равно $\binom{n-1+d}{d}$. Кроме того, из теоремы 1 следует, что мощность множества $R_d(n)$ не меньше числа решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_{d^2+1} + x_{d^2+2} + ... + x_n = d$. Это число равно $\binom{n-(d^2+1)+d}{d}$. Поэтому для любого $d \geqslant 1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|R_d(n)|}{|M_d(n)|} = 1$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
2. **Евдокимов А. А.** Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
4. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.
5. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
27 октября 2005 г.