ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2006. Серия 1. Том 13, № 2. 3–10

УДК 519.8

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СУММИРОВАНИЯ ВЕКТОРОВ*)

А. Е. Бабурин, А. В. Пяткин

Исследуется задача максимизации взвешенной суммы заданного конечного множества векторов из конечномерного нормированного пространства $\mathbb{R}^k$. Приводятся и анализируются полиномиальные алгоритмы её решения в случае, когда в пространстве $\mathbb{R}^k$ задана конечная полиэдральная норма, а также норма l_2.

Введение

Пусть в векторном пространстве $\mathbb{R}^k$ с нормой $\|.\|_*$, которое будем обозначать через $(\mathbb{R}^k, \|.\|_*)$, задано конечное семейство ненулевых векторов $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Определим функцию $S_V(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i x_i$ от переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Объектом исследования в настоящей статье являются следующие задачи.

Задача 1. Для заданного семейства входных векторов V требуется найти вектор $x \in \{0,1\}^n$, на котором достигается максимум функции $\|S_V(x)\|_*$.

Эта задача может иметь содержательный смысл как задача выбора оптимального (максимизирующего прибыль) производства на предприятии, когда некоторые характеристики выбираемых компонент могут иметь отрицательный знак (затраты на ресурсы). Тогда каждая компонента может быть представлена вектором, где её характеристики — координаты вектора. При суммировании векторов (одновременном выборе ряда компонент производства) соответствующие координаты складываются (как и соответствующие им характеристики компонент). Роль целевой функции играет оценка эффективности производства.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395), INTAS (грант 04–77–7173) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–313.2003.1)

В формальной постановке задачи 1 значение переменной x_i отвечает за выбор или не выбор вектора v_i. Например, если $x = (1, 1, \ldots, 1)$, то все векторы будут выбраны, а если $x = (0, 0, \ldots, 0)$ — не выбраны.

Задачей $1'$ назовем задачу 1 с дополнительным условием, когда сумма входных векторов равна 0.

Задача 2. Для заданного семейства входных векторов V требуется найти вектор $x \in \{-1, 1\}^n$, на котором достигается максимум функции $\|S_V(x)\|_*$.

Нетрудно заметить, что задача 1 полиномиально сводится к задаче 2: её решение легко строится из решения задачи 2 с набором векторов $V' = V \cup \{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\}$.

В то же время задача 2 полиномиально сводится к задаче $1'$ (частному случаю задачи 1): её решение строится из решения задачи $1'$ с набором векторов $V'' = V \cup \{-v_1, \ldots - v_n\}$.

Тем самым, задачи 1, $1'$ и 2 полиномиально эквивалентны.

Задача $1'$ упоминается в статье [2], в которой исследуется условная сходимость векторных рядов в конечномерном евклидовом пространстве. Однако вопрос об отыскании эффективного алгоритма решения этой задачи в ней не рассматривается. Вопрос о его эффективности рассмотрен в [1]. В ней декларируется возможность достижения временно́й сложности алгоритма $O(n^{k-1})$, хотя сам алгоритм не приводится.

Отметим, что минимизационный вариант задачи 2 исследовался в [4] и в ней сформулирована проблема нахождения функции

$$f(k) = \sup\{\min_{x \in \{-1,1\}^n} \|S_V(x)\|_2 \mid V \in \mathbb{R}^k, \max_{v \in V} ||v||_2 \leqslant 1\}.$$

Эта проблема до сих пор открыта. С подходами к приближённому решению задачи 2 на минимум можно ознакомиться в [3].

Учитывая эквивалентность задач 1, 2, $1'$, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только задачи 2.

Обозначим через $\langle a, b\rangle$ скалярное произведение векторов a и b из $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим выпуклый полиэдр $B = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle \lambda_i, x\rangle \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ с m гранями F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, такими, что $F_i \subset \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle \lambda_i, x\rangle = 1\}$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$. *Полиэдральной нормой* вектора $x \in \mathbb{R}^k$ называется величина

$$c(x) = \max\Big\{0, \langle \lambda_1, x\rangle, \ldots, \langle \lambda_m, x\rangle\Big\}. \qquad (1)$$

Заметим, что если полиэдр B несимметричен, то полиэдральная норма не является нормой в классическом понимании, так как аксиома

$\|ax\| = |a|\|x\|$ может нарушаться для отрицательных значений a. Такие нормы иногда называют *несимметричными* нормами. Более подробную информацию о них можно найти в [5]. Если полиэдр B симметричен, то полиэдральная норма удовлетворяет всем аксиомам нормы. Примерами полиэдральных норм являются нормы l_1 и l_∞.

В дальнейшем под полиэдральным пространством размерности k будем понимать пару $(\mathbb{R}^k, c)$. Полиэдр B в норме c является единичным шаром. Если B — ограниченное множество, то полиэдральную норму c будем называть *конечной*.

В настоящей статье также исследуется задача 2 в k-мерном евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^k, l_2)$.

Напомним, что для $u \in \mathbb{R}^k$ эта норма определяются следующим образом: $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Основным результатом статьи являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Задача* 2 *является полиномиально разрешимой в* k*-мерном полиэдральном пространстве* $(\mathbb{R}^k, c)$ *с конечной нормой* c.

Теорема 2. *Задача* 2 *является полиномиально разрешимой в пространстве* $(\mathbb{R}^k, l_2)$.

Справедливость этих теорем следует из утверждений, которые доказываются в следующих двух разделах.

1. Решение задачи 2 в полиэдральном пространстве $(\mathbb{R}^k, c)$ с конечной нормой

В этом разделе описывается алгоритм A_1, находящий решение задачи 2 в полиэдральном пространстве $(\mathbb{R}^k, c)$ с конечной нормой.

Пусть m — число граней размерности $k-1$ единичного шара в пространстве $(\mathbb{R}^k, c)$. Пусть задано множество входных векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Алгоритм находит m решений, из которых выбирается наилучшее. Перейдём к формальному описанию алгоритма A_1.

Шаг 1. Полагается $j = 1$.

Шаг 2. Строится такой вектор $x_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle \lambda_j, v_i\rangle \geqslant 0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 3. Если $j < m$, то полагается $j = j + 1$ и выполняется шаг 2. Иначе выполняется шаг 4.

Шаг 4. Выбирается такой вектор $x \in \{-1, 1\}^n$ из $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, что

$$c(S_V(x)) = \max_{j=1,\ldots,m} c(S_V(x_m)).$$

Вектор x является результатом работы алгоритма A_1.

Утверждение 1. *Алгоритм A_1 находит оптимальное решение задачи 2 в пространстве $(\mathbb{R}^k, c)$ за время $O(nkm)$.*

Доказательство. Временна́я сложность алгоритма равна $O(nkm)$, так как в ходе его работы m раз выполняется шаг 2 с временно́й сложностью $O(nk)$, что является определяющим в суммарной временно́й сложности алгоритма.

Пусть x^* — оптимальное решение задачи, а F_j — грань единичного шара, на которой достигается максимум нормы вектора $S_V(x^*)$, т. е.

$$\langle \lambda_j, S_V(x^*)\rangle = \max\Big\{\langle \lambda_1, S_V(x^*)\rangle, \dots, \langle \lambda_m, S_V(x^*)\rangle\Big\} = c(S_V(x^*)).$$

Пусть x — решение, найденное алгоритмом A_1. Тогда

$$c(S_V(x)) \geqslant c(S_V(x_j)) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\langle \lambda_j, v_i\rangle| \geqslant \langle \lambda_j, S_V(x^*)\rangle = c(S_V(x^*)).$$

Следовательно, $c(S_V(x^*)) = c(S_V(x))$. Утверждение 1 доказано.

2. Решение задачи 2 в k-мерном евклидовом пространстве

Полиномиальный алгоритм решения задачи 2 в k-мерном евклидовом пространстве оказывается более сложным, чем в полиэдральных пространствах с конечной нормой. Сначала нам потребуется ввести определение областей принадлежности решения, доказать некоторые свойства этих областей и затем описать алгоритм решения.

2.1. Области принадлежности решения

Ортогональной гиперплоскостью для ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^k$ называется гиперплоскость, заданная уравнением $\langle v, x\rangle = 0$. Она является $(k-1)$-мерным подпространством, состоящим из векторов, ортогональных вектору v. *Семейством областей принадлежности решения* (ОПР) для данных ненулевых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ назовем семейство максимальных по включению связных подмножеств пространства $\mathbb{R}^k$, не пересекающихся с ортогональными гиперплоскостями векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$. Заметим, что области принадлежности решения являются конусами в пространстве $\mathbb{R}^k$. Набор векторов пространства $\mathbb{R}^k$, содержащий ровно по одному вектору из каждой области семейства ОПР, назовем *семейством представителей областей принадлежности решения* для векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Лемма 1. *Семейство представителей* ОПР *для ненулевых векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *в пространстве* $\mathbb{R}^k$ *может быть найдено за время* $O(k^2 n^k)$.

Доказательство. Обозначим через $f(n,k)$ максимальное число ОПР, которое в k-мерном пространстве может быть порождено n гиперплоскостями. Сначала оценим сверху значение функции $f(n,k)$ через $O(kn^{k-1})$, а затем покажем, что семейство представителей ОПР может быть найдено за время $O(nkf(n,k))$.

Для любого целого числа m через $r(m)$ будем обозначать остаток от деления m на 2. Очевидно, что $f(n,1) = 2$ при любом n и $f(n,k) = 2^n \leqslant 2^k$ при $n \leqslant k$. Индукцией по n докажем, что при $n \geqslant k$ имеет место неравенство

$$f(n,k) \leqslant 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k-3} + \ldots + 2\binom{n}{r(k-1)}.$$

Нетрудно видеть, что выражение из правой части этого неравенства ограничено сверху величиной $O(kn^{k-1})$, а при $n = k$ оно равно 2^k.

Рассмотрим некоторое семейство ОПР W мощности $f(n,k)$ для гиперплоскостей $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ и удалим из него гиперплоскость F_n. В получившемся семействе W' содержится не более $f(n-1,k)$ областей. Допустим, что гиперплоскость F_n пересекает a и не пересекает b таких областей. Каждая из пересекаемых областей порождает две ОПР в семействе W, а непересекаемые области остаются неизменными. Таким образом, W содержит ровно $2a+b$ областей. Чтобы оценить a, рассмотрим $(k-1)$-мерное подпространство, порожденное гиперплоскостью F_n. Пересечение семейства ОПР W' с гиперплоскостью F_n порождает в этом подпространстве некоторое семейство ОПР W'', причем его размер не превосходит $f(n-1,k-1)$, так как оно образовано $n-1$ гиперплоскостью в $(k-1)$-мерном пространстве. Следовательно, $a = |W''| \leqslant f(n-1,k-1)$. Поскольку $a+b = |W'| \leqslant f(n-1,k)$, имеем

$$\begin{aligned}
f(n,k) = |W| \leqslant 2a+b \leqslant f(n-1,k) + f(n-1,k-1)& \\
\leqslant 2\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-3} + \ldots + \binom{n-1}{r(k-1)}\right)& \\
+ 2\left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-4} + \ldots + \binom{n-1}{r(k-2)}\right)& \\
= 2\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k-3} + \ldots + 2\binom{n}{r(k-1)}&.
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того факта, что при любом $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ выполняется соотношение $\binom{n-1}{t} + \binom{n-1}{t-1} = \binom{n}{t}$, а $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1$.

Обозначим через $P(n,k)$ задачу построения семейства представителей ОПР для n исходных ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^k$. Теперь опишем схему решения задачи $P(n,k)$. Решением задачи $P(n,1)$ является пара разных по знаку скаляров (разных по направлению векторов в пространстве $\mathbb{R}^1$), а решением задачи $P(1,k)$ является пара векторов v_1 и $-v_1$. Индукцией по n покажем, что задача $P(n,k)$ решается за время $O(nkf(n,k))$.

Для решения задачи из $P(n,k)$ сначала построим семейство W представителей ОПР для гиперплоскостей $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$. Для этого необходимо решить задачу $P(n-1,k)$, что по индукции может быть сделано за время $O(nkf(n-1,k))$. Полученные векторы (представители ОПР) обозначим через $q_1, q_2, \dots, q_s$, где $s \leqslant f(n-1,k)$ есть число ОПР.

Далее построим семейство представителей ОПР, порожденных в гиперплоскости F_n гиперплоскостями $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$. По индукции это может быть сделано за время $O(nkf(n-1,k-1))$. Найденные векторы обозначим через $p_1, p_2, \dots, p_t$, где $t \leqslant f(n-1,k-1)$ равно числу областей в гиперплоскости F_n. Тогда векторы $p_i+\varepsilon*v_n$ и $p_i-\varepsilon*v_n$ при $i = 1, 2, \dots, t$ и достаточно малом ε будут представителями тех ОПР для исходной задачи, которые получаются при рассечении гиперплоскостью F_n некоторых ОПР из семейства W. Достаточно положить

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{i=1,\dots,n-1} \min_{j=1,\dots,m} \frac{\rho(F_i,p_j)}{\|v_n\|_2},$$

где $\rho(F_i,p_j)$ — расстояние от вектора p_j до гиперплоскости F_i.

Полученные векторы переобозначим через $u_1, u_2, \dots, u_m$, где $m = 2t + s$. Для того чтобы получить из них семейство представителей ОПР, необходимо исключить из них лишние векторы. Во-первых, таковыми являются те векторы из $q_1, q_2, \dots, q_s$, которые лежат в F_n (если таковые найдутся), и их можно исключить за время $O(sk)$. Во-вторых, для каждой ОПР нужно оставить только по одному представителю. Это может быть сделано на основе следующего наблюдения: векторы u и u' принадлежат одной и той же ОПР тогда и только тогда, когда $(u,v_i)*(u',v_i) > 0$ при любом $i = 1, 2, \dots, n$.

Покажем, что время, требуемое для указанного отсева, ограничено величиной $O(m(nk+\log m))$. Пусть $f_i(u) = 1$, если $(u,v_i) > 0$, и $f_i(u) = 0$ в противном случае. Положим $f(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(u)2^{i-1}$. Будем последовательно находить значения $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)$, упорядочивать их по возрастанию и исключать повторяющиеся. Ясно, что вычисление $f(u_i)$ требует $O(nk)$ операций, а определение его места среди уже найденнных значений $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_{i-1})$ — не более $O(\log m)$ операций. Следовательно, общее время выполнения процедуры отсева ограничено сверху величиной $O(m(nk + \log m))$.

Так как из ранее доказанного следует, что $m \leqslant 2f(n,k) \leqslant O(kn^{k-1})$, то задача $P(n,k)$ решается за время $O(m(nk + \log m)) \leqslant O(nkf(n,k)) \leqslant O(k^2n^k)$. Лемма 1 доказана.

Для последующего анализа алгоритма нам потребуется

Лемма 2. *Пусть x^* — оптимальное решение задачи 2 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Тогда $\langle S_V(x^*), x_i^* v_i\rangle > 0$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. для какого-то входного вектора v_i имеет место неравенство $\langle S_V(x^*), x_i^* v_i\rangle \leqslant 0$. Рассмотрим решение задачи x такое, что

$$x_j = \begin{cases} x_j^*, & \text{если } j \neq i, \\ -x_j^* & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\langle S_V(x), S_V(x)\rangle = \langle S_V(x^*), S_V(x^*)\rangle - 4\langle S_V(x^*), x_i^* v_i\rangle + 4\langle v_i, v_i\rangle > \langle S_V(x^*), S_V(x^*)\rangle$, поскольку $v_i \neq 0$ по условию задачи 2. Следовательно, решение x^* не оптимально. Лемма 2 доказана.

2.2. Описание алгоритма

Теперь дадим описание алгоритма A_2 решения задачи 2 в k-мерном евклидовом пространстве:

Шаг 1. Для исходных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ находится семейство W представителей ОПР.

Шаг 2. Для каждого вектора $w \in W$ находится решение x_w задачи 2 такое, что

$$x_{wi} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle w, v_i\rangle \geqslant 0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 3. Из набора построенных решений задачи выбирается такое решение x, что

$$\|S_V(x)\|_2 = \max_{w \in W} \|S_V(x_w)\|_2.$$

Это решение является результатом работы алгоритма A_2.

Утверждение 2. *Алгоритм A_2 находит оптимальное решение задачи 2 в k-мерном евклидовом пространстве за время $O(k^2n^k)$.*

Доказательство. Основной вклад во временну́ю сложность алгоритма вносит шаг 1, выполнение которого согласно лемме 1 требует $O(k^2n^k)$ операций.

Обозначим через x^* точное решение задачи. На основании леммы 2 заключаем, что $S_V(x^*)$ лежит внутри одной из областей принадлежности решения, а не на границе. Пусть для этой области рассматривался представитель w. Тогда из леммы 2 следует, что $x_w = x^*$. Поэтому решение x, полученное алгоритмом A_2, является оптимальным. Утверждение 2 доказано.

Авторы выражают благодарность Э. Х. Гимади за помощь при работе над статьей и С. В. Севастьянову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов И. С., Столин Я. Н.** Алгоритм в одномашинной задаче календарного планирования // Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. С. 248–259.
2. **Кадец М. И.** Об одном свойстве векторных ломанных в $n-$мерном пространстве // Успехи матем. наук. 1953. Т. 8, вып. 1. С. 139–143.
3. **Севастьянов С. В.** Геометрия в теории расписаний // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988, с. 226–261. (Тр/ АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт математики; Т. 10.)
4. **Dvoretzky A.** Some near-sphericity results // Proc. of symposium in pure Mathematics. V. 7. Convexity. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1963. P. 203-210.
5. **Schryver A.** Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. Berlin: Springer, 2003.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
16 ноября 2005 г.