ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2006. Серия 1. Том 13, № 2. 11–20

УДК 519.8

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ С ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ 3/4 ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ДВУХ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА*)

А. А. Агеев, А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Рассматривается задача отыскания в полном неориентированном взвешенном графе двух (рёберно) непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса. Известно, что данная задача NP-трудна в сильном смысле. Построен алгоритм решения задачи с временно́й сложностью $O(n^3)$ и гарантированной оценкой точности 3/4.

Введение

Во многих задачах оптимизации в заданном взвешенном графе требуется отыскать подграф (клику, доминирующее множество, остовное дерево, гамильтонов цикл, вершинное покрытие и т. п.) минимального или максимального веса. Естественными модификациями подобных задач являются задачи, в которых требуется найти несколько (вершинно или рёберно) непересекающихся подграфов определённого типа минимального или максимального суммарного веса. Одной из первых задач этого типа, привлекших внимание исследователей, является задача о m бродячих торговцах (m-peripatetic salesman problem [14], далее m-PSP). В задаче m-PSP задан полный n-вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$ с неотрицательной весовой функцией рёбер $w : E \to \mathbb{R}_+$. Требуется найти m таких непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов $H_1, \dots, H_m \subset E$, что величина $\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{e \in H_k} w(e)$ минимальна или максимальна.

В [9] показано, что задача о существовании двух непересекающихся гамильтоновых циклов NP-полна, что влечет NP-трудность 2-PSP (как на минимум, так и на максимум).

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00395, 05–01–00960, 06–01–00255) и INTAS (грант 04–77–7193).

В [9] рассмотрены некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи 2-PSP на минимум. Работы [9–11] посвящены построению и анализу нижних и верхних оценок в задаче 2-PSP на минимум с целью использования этих оценок в методе ветвей и границ. В [2] применяется полиэдральный подход к решению m-PSP. В [1, 2, 5] для решения метрической задачи 2-PSP на минимум предложены два приближённых алгоритма с временно́й сложностью $O(n^3)$ в случае, когда на рёбрах графа задана одна или две весовые функции. Показано, что соответствующие оценки точности асимптотически (с ростом n) равны 9/4 и 12/5. При построении алгоритмов существенно использовалась широко известная эвристика Кристофидеса-Сердюкова для метрической задачи коммивояжёра с оценкой точности 3/2 (см. [3, 6]). Позднее оценка 9/4 для задачи с одной весовой функцией была также анонсирована в [7].

В настоящей статье рассматривается задача 2-PSP на максимум (далее под 2-PSP понимается только эта задача). Для нахождения приближённого решения задачи построен алгоритм с временно́й сложностью $O(n^3)$ и гарантированной оценкой точности 3/4.

В основе алгоритма лежит общая идея, впервые реализованная А. И. Сердюковым [4] при построении приближённого алгоритма для нахождения одного гамильтонова цикла максимального веса в полном неориентированном взвешенном графе с теми же оценками временно́й сложности и точности. Алгоритм Сердюкова в исходном графе находит два подграфа — 2-фактор и паросочетание, суммарный вес которых не менее чем в 3/2 раза больше веса оптимального решения. Затем рёбра этих подграфов перераспределяются между двумя частичными турами, произвольно дополняемыми до гамильтоновых циклов. Максимальный из построенных циклов (по весу входящих в него рёбер) даёт решение с оценкой точности 3/4. Нетрудно понять, что прямое применение этой схемы к задаче 2-PSP не приводит к успеху, поскольку построенные таким образом частичные туры могут содержать одинаковые рёбра. В настоящей статье предлагается алгоритм, в котором в качестве исходного подграфа, подвергающегося разбиению на два непересекающихся по рёбрам частичных тура, используется либо кубический подграф (при чётном n), либо "почти кубический"подграф (при нечётном n) максимального веса. Более того найденные рёберно непересекающиеся частичные туры в дальнейшем удаётся дополнить до непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов, что далеко не всегда возможно в случае произвольных рёберно непересекающихся частичных туров.

В процессе работы алгоритм обращается к процедуре отыскания в полном взвешенном графе $G = (V, E)$ такого подграфа H максимального суммарного рёберного веса, что степени его вершин удовлетворяют следующим ограничениям снизу и сверху: $l_v \leqslant d(v) \leqslant u_v,\ v \in V$. В качестве такой процедуры используется алгоритм Габова из [13] с временно́й сложностью $O\Big(\min(|E|\log n, n^2)\sum\limits_{v=1}^{n} u_v\Big)$.

1. Описание алгоритма

Этап 0. При $n \leqslant 13$ задача решается полным перебором. На этом алгоритм заканчивает свою работу. Иначе осуществляется переход на этап 1.

Этап 1. Вводится новая весовая функция рёбер $\widetilde{w}(e) = w(e) - L$, где

$$L = \sum_{e \in E} w(e) + 1.$$

С использованием процедуры из [13] к графу G с весовой функцией $\widetilde{w}$ находится подграф максимального веса $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$ такой, что $3 \leqslant d_{\widetilde{G}}(v) \leqslant 4,\ v \in V$. Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ – другой такой подграф и $|\overline{E}| > |\widetilde{E}|$. Тогда

$$w(\widetilde{E}) - w(\overline{E}) = \sum_{e \in \widetilde{E}} w(e) - \sum_{e \in \overline{E}} w(e) + L(|\overline{E}| - |\widetilde{E}|) \geqslant L - \sum_{e \in \overline{E}} w(e) \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что подграф $\widetilde{G}$ имеет минимально возможное число рёбер. Значит, в случае чётного n подграф $\widetilde{G}$ является кубическим, а в случае нечётного n он имеет только одну вершину степени 4, а степени остальных его вершин равны 3. Так как вес подграфа $\widetilde{G}$ относительно весовой функции $\widetilde{w}$ равен $\sum\limits_{e \in E} w(e) - L|\widetilde{E}|$, то этот подграф будет иметь максимальный вес относительно весовой функции w среди всех таких графов. Переход на этап 2.

Этап 2. В графе $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$ веса рёбер $w'(e)$ переопределяются следующим образом:

$$w'(e) = \begin{cases} -1, & \text{если } e = (v', v'') \in \widetilde{E},\ d_{\widetilde{G}}(v') = 3 \text{ и } d_{\widetilde{G}}(v'') = 3, \\ 1, & \text{если } e = (v', v'') \in \widetilde{E} \text{ и } d_{\widetilde{G}}(v') + d_{\widetilde{G}}(v'') = 7. \end{cases}$$

В графе $\widetilde{G}$ с такими весами рёбер находится подграф $T_1 = (V, \widetilde{E}_1)$ максимального рёберного веса при условии, что степень вершины v, $v \in V$, удовлетворяет ограничению $1 \leqslant d_{T_1}(v) \leqslant 2$. Отыскание T_1 выполняется с помощью упомянутой выше процедуры из [13]. По лемме 1 этот граф не содержит циклов.

Положим $\widetilde{E}_2 = \widetilde{E} \setminus \widetilde{E}_1$ и определим подграф $G_2 = (V, \widetilde{E}_2)$. Легко видеть, что степень вершины v графа G_2 удовлетворяет неравенству $1 \leqslant d_{G_2}(v) \leqslant 2$. Число циклов в графе G_2 обозначим через S. Переход на этап 3.

Этап 3. Если в графе G_2 каждый цикл содержит ребро, которое инцидентно концам разных цепей из T_1, то делается переход на этап 4.

Если в графе G_2 имеется цикл C, в котором нет двух соседних вершин, являющихся концами разных цепей из T_1 (см. рис. 1) , то полученная пара рёберно непересекающихся остовных подграфов (T_1, G_2) преобразуется следующим образом.

По лемме 2 в цикле C имеются только три вершины, одна из которых (обозначим ее через v_3) имеет степень 4 в графе $\widetilde{G}$ (и степень 2 в графе T_1), а остальные две вершины v_1 и v_2 являются концами одной цепи P в графе T_1. Кроме того, согласно лемме 2 вершина v_3 не лежит на цепи P, которая, в свою очередь, состоит из трёх вершин v_1, v_4 и v_2 и двух рёбер (см. рис. 1). Рёбра графа $\widetilde{G}$ перераспределим между T_1 и G_2 так, как это показано на рис. 1; при этом объединение рёбер будет по-прежнему равно $\widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_2$, число цепей в G_2 увеличится на 1, число циклов в G_2 уменьшится на 1, а число цепей в T_1 останется прежним. Заметим, что в каждом цикле преобразованного графа G_2 имеется ребро, инцидентное концам разных цепей из T_1.

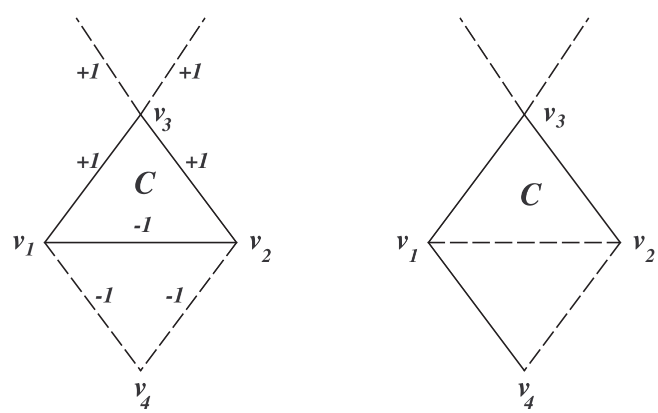

Рис. 1. Цикл C, в котором нет двух соседних вершин, являющихся концами разных цепей из T_1

Этап 4. Пара непересекающихся по рёбрам остовных подграфов (T_1, G_2) преобразуется в пару $(\widetilde{T_1}, \widetilde{G_2})$ следующим образом: из каждого цикла графа G_2 удаляется по ребру, соединяющему концевые вершины разных цепей в T_1, и эти ребра добавляются в T_1.

Заметим, что полученные графы $\widetilde{T_1}$ и $\widetilde{G_2}$ являются частичными турами. При этом число цепей в $\widetilde{G_2}$ не меньше S, а число цепей в $\widetilde{T_1}$ меньше числа цепей в T_1 не больше чем на S. Переход на этап 5.

Этап 5. Если $S \geqslant 3$, то полагается $T_1 = \widetilde{G}_2$, $T_2 = \widetilde{T}_1$, иначе полагается $T_1 = \widetilde{T}_1$, $T_2 = \widetilde{G}_2$. Переход на этап 6.

Этап 6. По очереди соединяются цепи тура T_2 в гамильтонов цикл H_2 и добавляются недостающие рёбра в T_2 произвольным образом. Если какие-то из этих рёбер присутствуют в T_1, то удаляем их из T_1. При этом в T_1 не появляются изолированные вершины (лемма 3). Переход на этап 7.

Этап 7. По лемме 4 в графе T_1 имеется не менее трёх цепей. Очевидно, что из любой трёх таких цепей можно выбрать такие две цепи, что существует ребро, объединяющее эти две цепи в одну цепь и не входящее в гамильтонов цикл H_2. Последовательно в граф T_1 добавляются такие рёбра до тех пор, пока полученный граф не будет состоять ровно из трёх цепей. Затем осуществляется переход на этап 8.

Этап 8. В начале этапа в графе T_1 имеются ровно три цепи. Возможные взаимные расположения их концов $v_1, \ldots, v_6$ на цикле H_2 изображены на рис. 2.

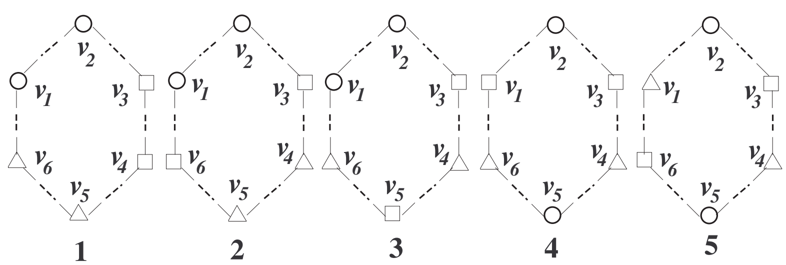

Рис. 2. Возможные конфигурации концевых вершин цепей T_1

В каждом случае концевые вершины одной цепи обозначены одной геометрической фигурой (треугольником, квадратом или кругом).

Если возникла одна из первых четырёх конфигураций, то, добавляя в T_1 следующие наборы рёбер, не входящие в H_2, получаем гамильтонов цикл H_1.

А именно:

1) ребра $(v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_6)$ для конфигурации 1.

2) рёбра $(v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_4, v_6)$ для конфигурации 2.

3) рёбра $(v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_6)$ для конфигурации 3.

4) рёбра $(v_1, v_4), (v_2, v_6), (v_3, v_5)$ для конфигурации 4.

В случае, когда $n > 6$ и имеет место конфигурация 5, в гамильтоновом цикле H_2 есть хотя бы одна вершина, отличная от концевых вершин цепей T_1. В силу симметричности конфигурации 5 достаточно рассмотреть случай, когда эта вершина лежит на любом из сегментов цикла H_2, например между v_1 и v_2. Тогда при добавлении в граф T_1 рёбер $(v_1, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_6)$, которые не входят в H_2, получается гамильтонов цикл H_1.

В результате работы алгоритм строит непересекающиеся по рёбрам гамильтоновы циклы H_1 и H_2, суммарный вес которых не меньше $(3/4)W^*$. Описание алгоритма закончено.

2. Обоснование алгоритма

Лемма 1. *Построенный на этапе 2 граф T_1 не содержит циклов и изолированных вершин, а, значит, является частичным туром.*

Доказательство. Построенный подграф не содержит циклов, так как в любом таком цикле нашлось бы ребро с весом -1, которое можно было бы удалить из графа T_1 для получения подграфа с теми же ограничениями на степени вершин, но бо́льшего веса. Так как степени вершин этого графа не меньше 1, то в нём нет изолированных вершин. Следовательно, граф T_1 является частичным туром (набором вершинно непересекающихся цепей, покрывающих все вершины исходного графа). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть в начале этапа 2 алгоритма в графе G_2 имеется цикл C, в котором нет двух соседних вершин, являющихся концами разных цепей из T_1. Тогда n нечётно и цикл C состоит из трёх вершин, по крайней мере две из которых лежат в разных цепях из T_1.*

Доказательство. Очевидно, что в цикле C имеется всего три вершины, одна из которых (обозначим её через v_3) имеет степень 4 в графе $\widetilde{G}$ (и степень 2 в графе T_1), а остальные две (v_1 и v_2) являются концами одной цепи $P = (v_1, v_4, \ldots, v_5, v_2)$ в графе T_1. Понятно, что вершина степени 4 в графе G возникает только при нечётном n.

Предположим, что все три вершины цикла C лежат в цепи P. Это означает, что цепь P имеет не менее пяти вершин, а в графе $\widetilde{G}$ имеется ребро, соединяющее концы этой цепи (как часть цикла C). Но тогда данную компоненту связности графа T_1 можно заменить на две цепи с большим суммарным весом, что противоречит определению T_1. На рис. 3 представлена описанная ситуация. Сплошные линии изображают рёбра цикла C, пунктирные — цепи из T_1. На рисунке показано преобразование компоненты P графа T_1 в две компоненты с большим суммарным весом.

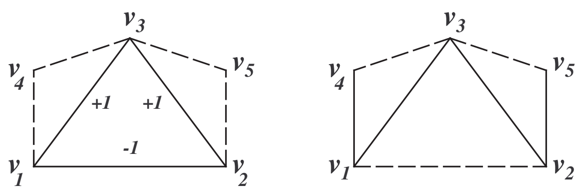

Рис. 3. Преобразование компоненты P графа T_1 в две компоненты с бо́льшим суммарным весом

Из полученного противоречия вытекает, что вершина v_3 не лежит на цепи P. Цепь P при этом соединяет другие две вершины цикла C. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При замыкании на этапе* 6 *частичного тура* T_2 *до гамильтонова цикла* H_2 *в графе* T_1 *не образуется изолированных вершин.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное ребро e, которое на этапе 6 удаляется из T_1. Предположим, что при удалении ребра e из T_1 в этом графе возникает изолированная вершина. Это означает, что одна из концевых вершин ребра e имела степень 1 в T_1. Более того, эта же вершина имела степень 2 в графе T_2. Следовательно, эта вершина не была концом цепи в T_2. Поэтому ребро e не могло быть использовано на этапе 6 для замыкания частичного тура T_2 до гамильтонова цикла H_2. Противоречие. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *К началу этапа* 7 *в графе* T_1 *содержится не менее* 3 *цепей.*

Доказательство. Обратимся к этапу 2. По построению рёбра графа T_1 имеют веса либо 1, либо -1. При этом в нём содержится не более двух рёбер веса 1, и если такие два ребра есть, то они смежны (Напомним, что рёбра веса 1 возникают только в случае графа G с нечётным числом вершин). Вершины графа T_1 имеют степени 1 или 2, а суммарный вес его рёбер минимален среди всех подграфов такого вида в графе G'. Из сказанного следует, что граф T_1 состоит из цепей с количеством вершин от 2 до 5 в каждой, причём в нём имеется не более одной цепи (которая опять же может возникнуть только в случае нечётного n) с числом вершин более трёх. Обозначим число концов цепей в T_1 через k.

Принимая во внимание вышесказанное, заключаем, что если $n > 13$, то $k \geqslant 10$.

Если $S \geqslant 3$, то число цепей в графе T_1, полученном после выполнения этапа 5, не меньше S.

Если $S < 3$, то в процессе преобразований на этапах 3–4 число цепей в $\widetilde{T_1}$ уменьшилось не более чем на 2, а изначально в T_1 было по-крайней мере 5 цепей (так как $k \geqslant 10$). Лемма 4 доказана.

Обозначим через OPT оптимальное значение целевой функции в задаче 2-PSP.

Лемма 5. $w(\widetilde{E}) \geqslant (3/4)\mathrm{OPT}$.

Доказательство. Пусть гамильтоновы циклы H_1 и H_2 образуют оптимальное решение задачи, и пусть $w(H_1) \leqslant w(H_2)$. Тогда $w(H_1) \leqslant (1/2)$ OPT. Рассмотрим паросочетание M, лежащее в цикле H_1, и два множества рёбер: $E' = H_2 \cup (H_1 \setminus M)$ и $E'' = H_2 \cup M \cup \{e\}$, где e — произвольное ребро из $H_1 \setminus M$. Заметим, что E' и E'' образуют в графе G остовные подграфы, в которых степень каждой вершины равна 3, кроме, возможно, одной вершины степени 4 (в случае нечётного n). Следовательно, $w(\widetilde{E}) \geqslant \max\{w(E'), w(E'')\}$ OPT.

Возможны два случая: $w(M) \leqslant (1/2)$ OPT и $w(M) > (1/2)$ OPT. В первом случае справедливо неравенство $w(E') \geqslant (3/4)$ OPT, во втором случае — $w(E'') \geqslant (3/4)$ OPT, что вместе с вышеприведенной нижней оценкой для $w(\widetilde{E})$ доказывает утверждение леммы.

Теорема 1. *Построенный алгоритм за время $O(n^3)$ находит допустимое решение задачи* 2-PSP, *вес которого составляет не менее* 3/4 *от веса оптимального решения.*

Доказательство. Можем ограничиться рассмотрением случая $n > 13$, так как при меньших значениях n алгоритм является точным. Очевидно, что временнáя сложность алгоритма в основном определяется временем выполнения этапов 1 и 2, когда используется процедура из работы [13]. Временнáя сложность этой процедуры в условиях рассматриваемой задачи равна $O(n^3)$, поскольку степени вершин подграфов, отыскиваемых алгоритмом, ограничены константой 3, если число вершин n графа G чётно, и 4, если n нечётно.

Пусть W^*—суммарный вес двух гамильтоновых циклов оптимального решения данной задачи. Оценка точности 3/4 следует из леммы и из того, что вес множества $\widetilde{E}$ в ходе выполнения алгоритма полностью распределяется между двумя рёберно непересекающимися гамильтоновыми циклами H_1 и H_2. Таким образом,

$$W(H_1) + W(H_2) \geqslant W(\widetilde{E}) \geqslant (3/4)\ \mathrm{OPT}.$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Алгоритмы с константными оценками точности для отыскания двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов экстремального веса // Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Материалы конференции (Омск, 1–5 июля 2003 г.). Омск: Изд-во Наследие, 2003. С. 9–12.
2. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближенные алгоритмы для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
3. **Сердюков А. И.** О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1978. С. 76–79.
4. **Сердюков А. И.** Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 80–86.
5. **Baburin A. Y., Gimadi E. Kh., Korkishko N. M.** Algorithms with performance guarantees for a metric problem of finding two edge-disjont Hamiltonian circuits of minimum total weight // Operations Research Proceedings. 2004. Berlin: Springer, 2004. P. 316–323.
6. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Technical Report CS-93-13, Carnegie Mellon University, 1976.
7. **Croce F. D., Pashos V. Th., Calvo R. W.** Approximating the 2-peripatetic salesman problem // 7th Workshop on Modelling and Algorithms for Planning and Scheduling Problems MAPS 2005. (Siena, Italy, June 6–10). 2005. P. 114–116.
8. **De Brey M. J. D., Volgenant A.** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. V. 39, N 3. P. 275–293.
9. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. V. 22, N 1. P. 113–122.
10. **De Kort J. B. J. M.** Upper bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1992. V. 23, N 4. P. 357–367.
11. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Res. 1993. V. 70, N 2. P. 229-243.
12. **Duchenne E., Laporte G., Semet F.** Branch-and-cut algorithms for the undirected m-peripatetic salesman problem // European J. Oper. Res. 2005. V. 162, N 3. P. 700–712.

13. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. of the 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25–27). New York: ACM Press, 1983. P. 448–456.

14. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). 1975. P. 173–178.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
27 сентября 2005 г.

Переработанный вариант —
5 апреля 2006 г.