ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2006. Серия 1. Том 13, № 2. 21–37

УДК 519.714

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА БЕСПОВТОРНЫХ СЛОВ *)

Р. М. Колпаков

Изучается известная проблема оценки числа бесповторных слов двух типов: бесквадратных слов над трёхбуквенным алфавитом и бескубных слов над двухбуквенным алфавитом.

Введение

В статье изучается известная проблема оценки числа бесповторных слов двух типов: бесквадратных слов над трёхбуквенным алфавитом и бескубных слов над двухбуквенным алфавитом. Под словом понимается произвольная конечная последовательность $w = a_1 \cdots a_n$ символов из некоторого алфавита. Число n называется *длиной* слова w и обозначается через $|w|$. Символ a_i слова w обозначается через $w[i]$. Слово $a_i \cdots a_j$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, называется *подсловом* слова w и обозначается через $w[i : j]$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ подслово $w[1 : i]$ ($w[i : n]$) называется *преффиксом* (*суффиксом*) слова w. Натуральное число p называется *периодом* слова w, если $a_i = a_{i+p}$ для каждого $i = 1, \ldots, n - p$. Если p — минимальный период слова w, отношение n/p называется *порядком* слова w.

Квадратом называется слово вида uu, где u — произвольное непустое слово. Избегая двусмысленности, под *периодом* квадрата uu мы будем понимать длину слова u. (Отметим, что период квадрата, вообще говоря, может не быть минимальным периодом этого слова.) Аналогичным образом, *кубом* называется слово вида uuu для произвольного непустого слова u. Под *периодом* куба uuu мы также будем понимать длину слова u. Слово называется *бесквадратным* (*бескубным*), если оно не содержит в качестве подслов квадратов (кубов). Нетрудно заметить, что не существует бесквадратных слов над двухбуквенным алфавитом, имеющих длину, большую 3. С другой стороны, согласно классическим результатам из [12, 13] существуют сколь угодно длинные бесквадратные слова над трёхбуквенным алфавитом и сколько угодно длинные бескубные

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ (грант МД–3635.2005.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994).

слова над двухбуквенным алфавитом. Таким образом, если обозначить через $S^{\langle \mathrm{sf}\rangle}(n)$ число различных бесквадратных слов длины n над трёхбуквенным алфавитом и через $S^{\langle \mathrm{cf}\rangle}(n)$ число различных бескубных слов длины n над двухбуквенным алфавитом, то $S^{\langle \mathrm{sf}\rangle}(n) > 0$ и $S^{\langle \mathrm{cf}\rangle}(n) > 0$ для любого натурального n. Кроме того, нетрудно показать (см., например, [4, 7]), что существуют пределы

$$\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S^{\langle \mathrm{sf}\rangle}(n)}, \quad \gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S^{\langle \mathrm{cf}\rangle}(n)},$$

которые мы называем предельными экспонентами роста числа бесквадратных трёхбуквенных слов и бескубных двухбуквенных слов соответственно. В [6] было получено, что с ростом n величины $S^{\langle \mathrm{sf}\rangle}(n)$ и $S^{\langle \mathrm{cf}\rangle}(n)$ растут экспоненциально: $S^{\langle \mathrm{sf}\rangle}(n) \geqslant 6\cdot(1,032)^n$ и $S^{\langle \mathrm{cf}\rangle}(n) \geqslant 2\cdot(1,080)^n$, т. е. $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} \geqslant 1,032$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle} \geqslant 1,080$. В дальнейшем в ряде работ* нижняя оценка для $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle}$ последовательно усиливалась. Согласно [5] наилучшая на сегодняшний день нижняя оценка $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} \geqslant (110)^{1/42} \approx 1,11842$ для $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle}$ получена в [11]. Наилучшими к настоящему времени верхними оценками для $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle}$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle}$ являются оценки $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} < 1,30193812$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle} < 1,4576$, полученные в работах [8] и [10] соответственно (в ноябре 2005 года французским исследователем Ошамом (Ochem) заявлена новая оценка $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} < 1,30178858$).

В статье предлагается новый метод оценки снизу числа бесповторных слов, который основывается, по существу, на индуктивной оценке сверху числа слов, которые могут содержать повторы. Отметим, что базовая идея этого метода взята нами из [2], однако для эффективной реализации этой идеи потребовалось проведение серьёзных научных исследований. Используя предложенный метод, мы получаем оценки $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle} \geqslant 1,30125$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle} \geqslant 1,456975$. Из сравнения полученных оценок с известными верхними оценками для $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle}$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle}$ вытекает, что нам удалось оценить $\gamma^{\langle \mathrm{sf}\rangle}$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf}\rangle}$ с точностью до $0,001$, что говорит о высокой эффективности предложенного метода.

Далее используются следующие вспомогательные понятия и обозначения. Для любого множества A через $|A|$ обозначается число элементов этого множества. Пусть $\mathcal{L}$ — произвольное множество слов над некоторым алфавитом Σ. Для любого натурального n через $\mathcal{L}(n)$ будем обозначать подмножество всех слов длины n множества $\mathcal{L}$. Для любого слова w над алфавитом Σ и натурального числа $n \geqslant |w|$ обозначим через $\mathcal{L}_w(n)$

*Обзор работ, посвященных оценке числа бесповторных слов, можно найти в [5].

множество всех слов из $\mathcal{L}(n)$, суффиксом которых является слово w. Два слова w', w'' над алфавитом Σ, имеющих одинаковую длину n, будем называть *изоморфными*, если существует биекция $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ такая, что $w''[i] = \sigma(w'[i])$, $i = 1, \dots, n$.

1. Оценка числа бесквадратных трёхбуквенных слов

Для получения нижней оценки предельной экспоненты $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle}$ роста числа бесквадратных трёхбуквенных слов мы будем рассматривать слова над алфавитом $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Множество всех таких слов будем обозначать через $\mathcal{L}$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех бесквадратных слов из $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{F}'(n)$ для $n \geqslant 2$ обозначим множество всех слов w из $\mathcal{F}(n)$ таких, что $w[1] = 0$ и $w[2] = 1$. Очевидно, что для любого слова из $\mathcal{F}(n)$ существует единственное изоморфное этому слову слово из $\mathcal{F}'(n)$. Отметим следующий очевидный факт.

Утверждение 1. *Для любых изоморфных слов w', w'' и любого $n \geqslant |w'|$ справедливо равенство $|\mathcal{F}_{w'}(n)| = |\mathcal{F}_{w''}(n)|$.*

Пусть m — натуральное число, $m > 2$, и w', w'' — два слова из $\mathcal{F}'(m)$. Слово w'' назовём *потомком* слова w', если найдется символ $a \in \Sigma$ такой, что $w'a \in \mathcal{F}(m+1)$, и слово $w'[2 : m]a$ изоморфно слову w''. Слово w' назовём *предком* слова w'', если найдётся символ $a \in \Sigma$ такой, что $aw'' \in \mathcal{F}(m+1)$, и слово $aw''[1 : m-1]$ изоморфно слову w'. Нетрудно заметить, что слово w'' является потомком слова w' тогда и только тогда, когда слово w' является предком слова w''. Отметим, что если $a = w'[m]$, то $w'a \notin \mathcal{F}(m+1)$. Поэтому любое слово имеет не более двух потомков. Аналогичным образом, любое слово может иметь не более двух предков. Индуктивным образом введём понятие тупиковых слов. Слово w из $\mathcal{F}'(m)$ назовём *тупиковым справа* (*тупиковым слева*) в том и только том случае, если это слово удовлетворяет одному из следующих условий:

a) *Базис индукции.* Слово w не имеет ни одного потомка (предка).

b) *Индуктивный переход.* Все потомки (предки) слова w являются тупиковыми справа (тупиковыми слева).

Для тупиковых слева слов введём также индуктивным образом понятие *глубины* слова.

a) *Базис индукции.* Если слово не имеет ни одного предка, то его глубина равна 0.

b) *Индуктивный переход.* Если все предки слова являются тупиковыми слева, то его глубина на единицу больше максимальной глубины его предков.

Нетрудно заметить, что для тупиковых слева слов справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для любого тупикового слева слова w глубины d и любого $n > |w| + d$ множество $\mathcal{F}_w(n)$ является пустым.*

Обозначим через $\tau(m)$ максимальную глубину тупиковых слева слов из $\mathcal{F}'(m)$ (если таких слов не существует, положим $\tau(m) = 0$).

Под *тупиковым* словом будем понимать слово, являющееся тупиковым справа или тупиковым слева. Через $\mathcal{F}''(m)$ обозначим множество всех слов из $\mathcal{F}'(m)$, не являющихся тупиковыми. В силу существования сколько угодно длинных бесквадратных слов над Σ это множество непусто для любого m. Положим $s = |\mathcal{F}''(m)|$. Занумеруем числами от 1 до s все слова из $\mathcal{F}''(m)$ в лексикографическом порядке. Определим матрицу $\Delta_m = (\delta_{ij})$ размера $s \times s$ следующим образом: $\delta_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда i-е слово множества $\mathcal{F}''(m)$ является предком j-го слова множества $\mathcal{F}''(m)$, в противном случае $\delta_{ij} = 0$. Так как все элементы матрицы Δ_m являются неотрицательными числами, то (см., например, [1]) среди её собственных значений найдётся максимальное по модулю неотрицательное вещественное значение r, которому соответствует некоторый собственный вектор $\tilde{x} = (x_1; \ldots; x_s)$ с неотрицательными компонентами. Допустим, что $r > 1$ и все компоненты вектора $\tilde{x}$ положительны*. Обозначим i-е слово множества $\mathcal{F}''(m)$ через w_i, $i = 1, \ldots, s$. Для $n \geqslant m$ положим $S'_m(n) = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_{w_i}(n)|$ и оценим снизу эту величину. Для этого индуктивным образом оценим снизу величину $S'_m(n+1)$ через $S'_m(n)$.

Пример. Пусть $m = 4$. Множество $\mathcal{F}'(4)$ состоит из трёх слов: $w_1 = 0102$, $w_2 = 0120$ и $w_3 = 0121$. Ни одно из этих слов не является тупиковым. Поэтому все три слова содержатся также в множестве $\mathcal{F}''(4)$ и $\tau(4) = 0$. Матрица Δ_4 имеет следующий вид:

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальным по модулю собственным значением этой матрицы является «золотое сечение» $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$. Этому значению соответствует собственный вектор $(1; 1; 1/\varphi)$. Таким образом, $S'_4(n) = |\mathcal{F}_{w_1}(n)| + |\mathcal{F}_{w_2}(n)| + |\mathcal{F}_{w_3}(n)|/\varphi$.

Сначала получим оценки для $|\mathcal{F}_{w_i}(n+1)|$ при $i = 1, \ldots, s$. Очевидно,

*Для определенности будем полагать $x_1 = 1$.

что
$$|\mathcal{F}_{w_i}(n+1)| = |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| - |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)|, \tag{1}$$
где $\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)$ — множество всех слов w из $\mathcal{L}_{w_i}(n+1)$ таких, что слова $w[1:n]$ и $w[n-m+1:n+1]$ являются бесквадратными, и $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ — подмножество всех слов множества $\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)$, содержащих в качестве суффикса некоторый квадрат. Обозначим через $\pi(i)$ множество всех предков слова w_i. Учитывая утверждение 1, легко заметить, что
$$|\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| = \sum_{w\in\pi(i)} |\mathcal{F}_w(n)|. \tag{2}$$

Отметим, что множество $\pi(i)$ не может содержать тупиковых справа слов, поскольку в противном случае w_i является тупиковым справа. Кроме того, в случае $n > m+\tau(m)$ для любого тупикового слева слова w из $\pi(i)$ согласно утверждению 2 имеем $|\mathcal{F}_w(n)| = 0$. Таким образом, обозначив через $\pi'(i)$ множество всех предков слова w_i, не являющихся тупиковыми, из равенства (2) получаем, что при $n > m+\tau(m)$ выполняется равенство
$$|\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| = \sum_{w\in\pi'(i)} |\mathcal{F}_w(n)|. \tag{3}$$

Теперь оценим $|\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)|$. Для любого слова w из $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ среди всех квадратов, являющихся суффиксами слова w, можно выбрать минимальный квадрат. Период этого квадрата обозначим через $\lambda(w)$. Очевидно, что $\lfloor(m+1)/2\rfloor < \lambda(w) \leqslant \lfloor(n+1)/2\rfloor$. Обозначим через $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$ подмножество всех слов w из $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ таких, что $\lambda(w) = j$. Тогда
$$|\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| = \sum_{\lfloor(m+1)/2\rfloor<j\leqslant\lfloor(n+1)/2\rfloor} |\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)|. \tag{4}$$

Выберем некоторое натуральное $p \geqslant m$ и допустим, что $n > 2p+\tau(m)$. Рассмотрим множество $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$, где $j \leqslant p$. Пусть w — произвольное слово из этого множества. Тогда суффикс $w[n-2j+2:n+1]$ этого слова является квадратом, не содержащим в качестве подслов других квадратов и содержащим слово w_i в качестве суффикса. Пусть $v_1,\dots,v_t$ — всевозможные квадраты периода j, удовлетворяющие данным условиям. Обозначим через $\mathcal{L}^{(j,k)}_{w_i}(n+1)$ подмножество всех слов из $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$, имеющих в качестве суффикса квадрат v_k, $k=1,\dots,t$. Пусть $w \in \mathcal{L}^{(j,k)}_{w_i}(n+1)$. Поскольку префикс $w[1:n]$ является бесквадратным, в этом случае имеем $w[n-2j+1] \neq w[n-2j+2] = v_k[1]$ и $w[n-2j+1] \neq w[n-$

$j+1] = v_k[j]$; при этом $v_k[1] = w[n-j+2] \neq w[n-j+1] = v_k[j]$. Следовательно, символ $w[n-2j+1]$ однозначно определяется квадратом v_k как символ из алфавита Σ, отличный от двух различных символов $v_k[1]$ и $v_k[j]$. Обозначив этот символ через b_k, получаем, что квадрат v_k однозначно определяет подслово $w[n-2j+1 : n]$ как слово $b_k v_k[1 : 2j-1]$. Таким образом, если это слово не является бесквадратным, то $\mathcal{L}_{w_i}^{(j,k)}(n+1)$ пусто. Пусть слово $b_k v_k[1 : 2j-1]$ является бесквадратным. Положим $u_k = b_k v_k[1 : m-1] = w[n-2j+1 : n-2j+m]$. Поскольку слово w как элемент множества $\mathcal{L}_{w_i}^{(j,k)}(n+1)$ однозначно определяется своим префиксом $w[1 : n-2j]$, имеем $|\mathcal{L}_{w_i}^{(j,k)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_{u_k}(n-2j+m)|$. Обозначим через u'_k слово из $\mathcal{F}'(n)$, изоморфное слову u_k. Тогда в силу утверждения 1 имеем

$$|\mathcal{L}_{w_i}^{(j,k)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_{u'_k}(n-2j+m)|. \tag{5}$$

Отметим, что слово u'_k не может быть тупиковым справа, поскольку в противном случае w_i также должно быть тупиковым справа. Более того, если u'_k является тупиковым слева, то согласно утверждению 2 имеем $|\mathcal{F}_{u'_k}(n-2j+m)| = 0$. Таким образом, обозначив через $U_j(w_i)$ множество всех тех слов u'_k, которые не являются тупиковыми*, в силу неравенства (5) получаем

$$|\mathcal{L}_{w_i}^{(j)}(n+1)| = \sum_{k=1}^{t} |\mathcal{L}_{w_i}^{(j,k)}(n+1)| \leqslant \sum_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_u(n-2j+m)|. \tag{6}$$

Пример. Пусть $m = 4$, $p = 7$ и $n > 2p + \tau(m) = 14$. Рассмотрим множество $\mathcal{L}_{w_2}^{(6)}(n+1)$. Нетрудно проверить, что единственным квадратом периода 6 над Σ, содержащим в качестве суффикса слово w_2 и не содержащим в качестве подслов других квадратов, является квадрат $v_1 = 210120210120$. Отметим, что для этого квадрата слово

$$b_1 v_1[1 : 11] = 121012021012$$

является бесквадратным. Поэтому мы рассматриваем слово $u_1 = 1210$, для которого $u'_1 = w_1 = 0102$. Таким образом, $U_6(w_2) = \{w_1\}$ и $|\mathcal{L}_{w_2}^{(6)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_{w_1}(n-8)|$.

Теперь рассмотрим множество $\mathcal{L}_{w_i}^{(j)}(n+1)$ при $j > p$. Отметим, что в этом случае $j > m$. Пусть w — произвольное слово из $\mathcal{L}_{w_i}^{(j)}(n+1)$.

*Отметим, что среди слов u'_k могут встречаться одинаковые слова, т. е. одно и тоже слово может содержаться в множестве $U_j(w_i)$ несколько раз.

Тогда для w имеем $w[n-2j+2:n-j+1] = w[n-j+2:n+1]$, т. е. $w[n-j-m+2:n-j+1] = w_i$ и слово w однозначно определяется своим префиксом $w[1:n-j-m+1]$. Следовательно, в этом случае справедливо неравенство

$$|\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_{w_i}(n-j+1)|. \tag{7}$$

Из (4) с учётом неравенств (6) и (7) вытекает, что

$$|\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| \leqslant A^{(p)}_{w_i}(n+1) + B^{(p)}_{w_i}(n+1), \tag{8}$$

где $A^{(p)}_{w_i}(n+1) = \sum\limits_{\lfloor (m+1)/2\rfloor < j \leqslant p} \left(\sum\limits_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_u(n-2j+m)| \right)$, $B^{(p)}_{w_i}(n+1) = \sum\limits_{p<j\leqslant \lfloor (n+1)/2 \rfloor} |\mathcal{F}_{w_i}(n-j+1)|$.

Теперь получим оценку для $S'_m(n+1)$. Используя равенство (1), имеем

$$S'_m(n+1) = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| - \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)|. \tag{9}$$

Применяя равенство (3) и учитывая, что вектор $\tilde{x}$ является собственным вектором матрицы Δ_m, соответствующим собственному значению r, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| &= \sum_{i=1}^{s} \bigl(x_i \sum_{w \in \pi'(i)} |\mathcal{F}_w(n)| \bigr) \\
&= (x_1; x_2; \ldots; x_s) \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \ldots & \delta_{s1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1s} & \delta_{2s} & \ldots & \delta_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathcal{F}_{w_1}(n)| \\ |\mathcal{F}_{w_2}(n)| \\ \vdots \\ |\mathcal{F}_{w_s}(n)| \end{pmatrix} \\
&= r \cdot (x_1; x_2; \ldots; x_s) \begin{pmatrix} |\mathcal{F}_{w_1}(n)| \\ |\mathcal{F}_{w_2}(n)| \\ \vdots \\ |\mathcal{F}_{w_s}(n)| \end{pmatrix} = r \cdot S'_m(n).
\end{aligned} \tag{10}$$

Для оценки второй суммы в правой части равенства (9) используем равенство (8):

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A^{(p)}_{w_i}(n+1) + \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B^{(p)}_{w_i}(n+1), \tag{11}$$

где

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B_{w_i}^{(p)}(n+1) = \sum_{p<j\leqslant\lfloor(n+1)/2\rfloor} \left(\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_{w_i}(n-j+1)|\right) = \sum_{p<j\leqslant\lfloor(n+1)/2\rfloor} S'_m(n-j+1). \quad (12)$$

Обозначив через $\zeta_j^{(k)}(w_i)$ число слов из множества $U_j(w_i)$, совпадающих с w_k, положим $\eta_k(j) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot \zeta_j^{(k)}(w_i)$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A_{w_i}^{(p)}(n+1) = \sum_{\lfloor(m+1)/2\rfloor<j\leqslant p} \sum_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{u\in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_u(n-2j+m)|\right) = \sum_{\lfloor(m+1)/2\rfloor<j\leqslant p} \sum_{k=1}^{s} \eta_k(j) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-2j+m)|. \quad (13)$$

Фиксируем некоторое натуральное $q \geqslant 2p - m$ и допустим, что $n > q + m + \tau(m)$. Для удобства сумму (13) представим в виде

$$\sum_{d=d_0}^{q} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d)|,$$

где $\eta'_k(d) = \eta_k\bigl((d+m)/2\bigr)$ в случае, если $d+m$ четно, $\eta'_k(d) = 0$ в противном случае и $d_0 = 2 \cdot \lfloor(m+3)/2\rfloor - m$. Оценим эту сумму сверху суммой вида $\sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot S'_m(n-d)$ следующим образом. Будем последовательно вычислять коэффициенты ρ_d этой суммы при $d = d_0, d_0+1, \ldots, q$. Для каждого $d = d_0, d_0+1, \ldots, q-1$ наряду с числом ρ_d будем также вычислять числа $\eta''_1(d+1), \ldots, \eta''_s(d+1)$ такие, что

$$\sum_{j=d_0}^{d+1} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(j) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-j)| \leqslant \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d+1) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d-1)| + \sum_{j=d_0}^{d} \rho_j \cdot S'_m(n-j). \quad (14)$$

При $d = d_0$ положим $\rho_{d_0} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant s} (\eta'_k(d_0)/x_k)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d_0) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0)| = \rho_{d_0} \cdot S'_m(n-d_0) + \sum_{k=1}^{s} \nu_k \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0)|,$$

где $\nu_k = \eta'_k(d_0) - \rho_{d_0} \cdot x_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, s$. Обозначим через $\tilde{\nu}$ вектор $(\nu_1; \ldots; \nu_s)$ и рассмотрим вектор $\tilde{\nu}' = \Delta_m \tilde{\nu}$. Пусть $\tilde{\nu}' = (\nu'_1; \ldots; \nu'_s)$. Из соотношений (1) и (3) вытекает, что

$$|\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0)| \leqslant |\mathcal{L}'_{w_k}(n-d_0)| = \sum_{w \in \pi'(k)} |\mathcal{F}_w(n-d_0-1)|$$

при любом $k = 1, \ldots, s$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s} \nu_k \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0)| \quad &\leqslant \quad \sum_{k=1}^{s} \left(\nu_k \cdot \sum_{w \in \pi'(k)} |\mathcal{F}_w(n-d_0-1)| \right) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{s} \nu'_k \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0-1)|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=d_0}^{d_0+1} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(j) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-j)| & \\ \leqslant \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d_0+1) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d_0-1)| &+ \rho_{d_0} \cdot S'_m(n-d_0), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\eta''_k(d_0+1) = \eta'_k(d_0+1) + \nu'_k$. Предположим, что для некоторого d такого, что $d_0 < d < q$, уже получены числа $\rho_{d_0}, \ldots, \rho_{d-1}$ и $\eta''_1(d), \ldots, \eta''_s(d)$. Тогда мы полагаем $\rho_d = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} (\eta''_k(d)/x_k)$, $\tilde{\nu} = (\eta''_1(d) - \rho_d \cdot x_1, \ldots, \eta''_s(d) - \rho_d \cdot x_s)$ и $\tilde{\nu}' = \Delta_m \tilde{\nu}$. Положим также $\eta''_k(d+1) = \eta'_k(d+1) + \nu'_k$, где ν'_k — k-я координата вектора $\tilde{\nu}'$, $k = 1, \ldots, s$. Аналогично неравенству (15) в этом случае имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} \big(\eta''_k(d) + \eta'_k(d+1) \big) \leqslant \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d+1) + \rho_d \cdot S'_m(n-d).$$

Из этого неравенства вытекает справедливость неравенства (14) для каждого d. При $d = q$ мы полагаем $\rho_q = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} (\eta''_k(q)/x_k)$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{s} x_i A^{(p)}_{w_i}(n+1) = \sum_{d=d_0}^{q} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-d)| \leqslant \sum_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot S'_m(n-d). \quad (16)$$

Для удобства обозначим через $\mathcal{P}_m^{(p,q)}(z)$ полином $\sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot z^d$ от переменной z.

Пример. Пусть $m=4$, $p=7$, $q=10$ и $n>q+m+\tau(m)=14$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{w_1}^{(7)}(n+1) &= |\mathcal{F}_{w_2}(n-8)|, \\ A_{w_2}^{(7)}(n+1) &= |\mathcal{F}_{w_1}(n-2)|+|\mathcal{F}_{w_1}(n-8)|, \\ A_{w_3}^{(7)}(n+1) &= |\mathcal{F}_{w_2}(n-4)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} A_{w_1}^{(7)}(n+1)+A_{w_2}^{(7)}(n+1)+A_{w_3}^{(7)}(n+1)/\varphi \\ =|\mathcal{F}_{w_1}(n-2)|+|\mathcal{F}_{w_2}(n-4)|/\varphi+|\mathcal{F}_{w_1}(n-8)|+|\mathcal{F}_{w_2}(n-8)|. \end{gathered}$$

Исходя из данного соотношения, вычисляем коэффициенты ρ_d для каждого $d=2,\dots,10$:

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} \rho_2 &=& 0, & \eta_1''(3) &=& 0, & \eta_2''(3) &=& 0, & \eta_3''(3) &=& 1, \\ \rho_3 &=& 0, & \eta_1''(4) &=& 1, & \eta_2''(4) &=& \varphi, & \eta_3''(4) &=& 0, \\ \rho_4 &=& 0, & \eta_1''(5) &=& \varphi, & \eta_2''(5) &=& \varphi, & \eta_3''(5) &=& 1, \\ \rho_5 &=& \varphi, & \eta_1''(6) &=& 0, & \eta_2''(6) &=& 0, & \eta_3''(6) &=& 0, \\ \rho_6 &=& 0, & \eta_1''(7) &=& 0, & \eta_2''(7) &=& 0, & \eta_3''(7) &=& 0, \\ \rho_7 &=& 0, & \eta_1''(8) &=& 1, & \eta_2''(8) &=& 1, & \eta_3''(8) &=& 0, \\ \rho_8 &=& 0, & \eta_1''(9) &=& 1, & \eta_2''(9) &=& 1, & \eta_3''(9) &=& 1, \\ \rho_9 &=& 1, & \eta_1''(10) &=& 1/\varphi^2, & \eta_2''(10) &=& 1/\varphi^2, & \eta_3''(10) &=& 0, \\ \rho_{10} &=& 1/\varphi^2. \end{array}$$

Таким образом, $\mathcal{P}_4^{(7,10)}(z)=\varphi\cdot z^5+z^9+z^{10}/\varphi^2$.

Пусть при некотором $\alpha>1$ и каждом $i=m,m+1,\dots,n-1$ выполняется неравенство $S'_m(i+1)\geqslant \alpha S'_m(i)$. Тогда $S'_m(i)\leqslant S'_m(n)/\alpha^{n-i}$ для каждого $i=m,m+1,\dots,n-1$. Поэтому из (16) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{s} x_i A_{w_i}^{(p)}(n+1) \leqslant \sum_{d=d_0}^{q} \rho_d\cdot(S'_m(n)/\alpha^d)=\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)\cdot S'_m(n).$$

Аналогичным образом из (12) следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} x_i B_{w_i}^{(p)}(n+1) \leqslant \sum_{p<j\leqslant\lfloor(n+1)/2\rfloor} S'_m(n)/\alpha^{j-1} < S'_m(n)\cdot\sum_{j=p}^{\infty}\frac{1}{\alpha^j}=\frac{S'_m(n)}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}.$$

Таким образом, из (11) имеем

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| < S'_m(n) \cdot \left(\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) + \frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}\right).$$

Учитывая данное неравенство в совокупности с равенством (10) в соотношении (9), получим

$$S'_m(n+1) > S'_m(n) \cdot \left(r - \mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}\right).$$

Следовательно, если α удовлетворяет неравенству

$$r - \mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)} \geqslant \alpha,$$

мы индуктивным образом получаем справедливость неравенства $S'_m(n+1) \geqslant \alpha S'_m(n)$ для любого n. Таким образом, в этом случае имеем $S'_m(n) = \Omega(\alpha^n)$. Поскольку порядок роста величины $S^{\langle \mathrm{sf} \rangle}(n)$ при $n \to \infty$, очевидно, не меньше $S'_m(n)$, из $S'_m(n) = \Omega(\alpha^n)$ вытекает равенство $S^{\langle \mathrm{sf} \rangle}(n) = \Omega(\alpha^n)$. Поэтому $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle} \geqslant \alpha$.

Для получения конкретной оценки величины $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle}$ мы, используя компьютерные вычисления, рассмотрели параметры $m = 35$, $p = 39$, $q = 44$. Было получено, что $\tau(35) = 2$, множество $\mathcal{F}''(35)$ состоит из 19819 различных слов, максимальное по модулю собственное значение r матрицы Δ_{35} равно* $1,302860$ и все компоненты соответствующего этому значению собственного вектора положительны. Далее, мы получили, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{35}^{(39,44)}(z) &= 3,022247 \cdot z^{36} + 4,394962 \cdot z^{38} + 2,348900 \cdot z^{40} \\ &+ 0,541430 \cdot z^{41} + 21,114080 \cdot z^{42} + 66,292154 \cdot z^{44}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = 1,30125$. Непосредственно проверяется, что

$$r - \mathcal{P}_{35}^{(39,44)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{38}(\alpha-1)} \geqslant \alpha,$$

и $S'_{35}(n+1) \geqslant \alpha S'_{35}(n)$ для каждого $n = 35, 36, \ldots, q+m+\tau(m) = 81$. Поэтому $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle} \geqslant 1,30125$.

*Здесь и далее мы приводим полученные числовые результаты с точностью до шести знаков после запятой.

2. Оценка числа бескубных двухбуквенных слов

Аналогично оценке для $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ мы также можем получить нижнюю оценку предельной экспоненты $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle}$ роста числа бескубных двухбуквенных слов. Для этого обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех слов над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$ и через $\mathcal{F}$ множество всех бескубных слов из $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{F}'(n)$ при $n \geqslant 1$ будем обозначать множество всех слов w из $\mathcal{F}(n)$ таких, что $w[1] = 0$. Тогда для любого слова из $\mathcal{F}(n)$ существует единственное изоморфное этому слову слово из $\mathcal{F}'(n)$.

Аналогично случаю бесквадратных слов, для бескубных слов мы также можем ввести понятия потомка, предка, тупикового слова и глубины тупикового слева слова. Соответственно, через $\tau(m)$ обозначим максимальную глубину тупикового слева слова из $\mathcal{F}'(m)$, если такое слово существует (в противном случае $\tau(m) = 0$).

Пусть $\mathcal{F}''(m)$ — множество всех слов из $\mathcal{F}'(m)$, не являющихся тупиковыми. Также аналогично случаю бесквадратных слов, для этого множества мы можем определить матрицу Δ_m размера $s \times s$, где $s = |\mathcal{F}''(m)|$, и вычислить максимальное по модулю неотрицательное собственное значение r этой матрицы. Если $r > 1$ и и все компоненты соответствующего этому значению собственного вектора $\tilde{x} = (x_1; \ldots ; x_s)$ положительны*, то положим $S''_m(n) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_{w_i}(n)|$, где w_i — i-е слово множества $\mathcal{F}''(m)$, $i = 1, \ldots, s$.

Аналогично равенству (1) при $i = 1, \ldots, s$ имеем

$$|\mathcal{F}_{w_i}(n+1)| = |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| - |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)|, \tag{17}$$

где $\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)$ — множество всех слов w из $\mathcal{L}_{w_i}(n+1)$ таких, что слова $w[1:n]$ и $w[n-m+1:n+1]$ являются бескубными, и $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ — подмножество всех слов множества $\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)$, содержащих в качестве суффикса некоторый куб. Аналогично равенству (3) при $n > m + \tau(m)$ выполняется равенство

$$|\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| = \sum_{w \in \pi'(i)} |\mathcal{F}_w(n)|,$$

где $\pi'(i)$ — множество всех предков слова w_i, не являющихся тупиковыми. Для любого слова w из $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ обозначим через $\lambda(w)$ период минимального куба, являющегося суффиксом слова w. Тогда аналогично

*Для определенности будем также полагать $x_1 = 1$.

равенству (4) имеем

$$|\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| = \sum_{\lfloor (m+1)/3 \rfloor < j \leqslant \lfloor (n+1)/3 \rfloor} |\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)|, \tag{18}$$

где $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$ — подмножество всех слов w из $\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)$ таких, что $\lambda(w){=}j$. Выберем некоторое натуральное $p \geqslant m$ и допустим, что $n > 3p + \tau(m)$. Пусть w — произвольное слово из множества $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$, где $j \leqslant p$. Тогда суффикс $w[n-3j+2 : n+1]$ этого слова является кубом, не содержащим в качестве подслов других кубов и содержащим в качестве суффикса слово w_i. Пусть $v_1, \dots, v_t$ — всевозможные кубы периода j, удовлетворяющие данным условиям. Обозначим через $\mathcal{L}^{(j,k)}_{w_i}(n+1)$ подмножество всех слов из $\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)$, имеющих в качестве суффикса куб v_k, $k = 1, \dots, t$. Пусть $w \in \mathcal{L}^{(j,k)}_{w_i}(n+1)$. Поскольку префикс $w[1:n]$ является бескубным, в этом случае имеем $w[n-3j+1] \neq w[n-2j+1] = v_k[j]$. Таким образом, куб v_k однозначно определяет подслово $w[n-3j+1:n]$ как слово $b_k v_k[1 : 3j-1]$, где b_k — символ из алфавита Σ, отличный от символа $v_k[j]$. Пусть это слово является бескубным. Обозначим тогда через u'_k слово из $\mathcal{F}'(n)$, изоморфное слову $b_k v_k[1 : m-1]$. Аналогично неравенству (6) можно получить неравенство

$$|\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)| \leqslant \sum_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_u(n-3j+m)|, \tag{19}$$

где $U_j(w_i)$ — множество всех тех слов u'_k, которые не являются тупиковыми*. При $j > p$ аналогично неравенству (7) имеем

$$|\mathcal{L}^{(j)}_{w_i}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_{w_i}(n-2j+1)|. \tag{20}$$

Таким образом, из соотношений (18), (19) и (20) получаем, что

$$|\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| \leqslant A^{(p)}_{w_i}(n+1) + B^{(p)}_{w_i}(n+1), \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} A^{(p)}_{w_i}(n+1) &= \sum_{\lfloor (m+1)/3 \rfloor < j \leqslant p} \left(\sum_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_u(n-3j+m)| \right), \\ B^{(p)}_{w_i}(n+1) &= \sum_{p < j \leqslant \lfloor (n+1)/3 \rfloor} |\mathcal{F}_{w_i}(n-2j+1)|. \end{aligned}$$

*Отметим, что так же, как и в случае бесквадратных слов, одно и тоже слово может содержаться в множестве $U_j(w_i)$ несколько раз.

Кроме того, аналогично равенствам (10) и (12), справедливы соответственно равенства

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| = r \cdot S''_m(n) \tag{22}$$

и

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B^{(p)}_{w_i}(n+1) = \sum_{p<j\leqslant\lfloor (n+1)/3\rfloor} S''_m(n-2j+1). \tag{23}$$

Положим $\eta_k(j) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot \zeta^{(k)}_j(w_i)$, где $\zeta^{(k)}_j(w_i)$ — число слов из множества $U_j(w_i)$, совпадающих с w_k, $k = 1, \ldots, s$. Тогда аналогично равенству (13) имеем

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A^{(p)}_{w_i}(n+1) = \sum_{\lfloor (m+1)/3\rfloor<j\leqslant p} \sum_{k=1}^{s} \eta_k(j) \cdot |\mathcal{F}_{w_k}(n-3j+m)|. \tag{24}$$

Фиксируем некоторое натуральное $q \geqslant 3p - m$ и допустим, что $n > q + m + \tau(m)$. Аналогично случаю бесквадратных слов сумму (24) можно оценить сверху суммой вида $\sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot S''_m(n-d)$, где $d_0 = 3\cdot\lfloor (m+4)/3\rfloor - m$.

Пусть для некоторого $\alpha > 1$ и каждого $i = m, m+1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство $S''_m(i+1) \geqslant \alpha S''_m(i)$, т. е. $S''_m(i) \leqslant S''_m(n)/\alpha^{n-i}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A^{(p)}_{w_i}(n+1) \leqslant \sum_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot (S''_m(n)/\alpha^d) = \mathcal{P}^{(p,q)}_m(1/\alpha) \cdot S''_m(n),$$

где $\mathcal{P}^{(p,q)}_m(z) = \sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot z^d$. Кроме того, из (23) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B^{(p)}_{w_i}(n+1) \leqslant \sum_{p<j\leqslant\lfloor (n+1)/3\rfloor} \frac{S''_m(n)}{\alpha^{2j-1}} < S''_m(n) \cdot \sum_{j=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2j+1}} = \frac{S''_m(n)}{\alpha^{2p-1}(\alpha^2-1)}.$$

Таким образом, из неравенства (21) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| &\leqslant \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A^{(p)}_{w_i}(n+1) + \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B^{(p)}_{w_i}(n+1) \\ &< S''_m(n) \cdot \left(\mathcal{P}^{(p,q)}_m(1/\alpha) + \frac{1}{\alpha^{2p-1}(\alpha^2-1)}\right).\end{aligned}$$

Используя это неравенство и равенства (17) и (22), получим

$$\begin{aligned} S''_m(n+1) &= \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}'_{w_i}(n+1)| - \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{L}''_{w_i}(n+1)| \\ &> S''_m(n) \cdot \left(r - \mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{2p-1}(\alpha^2-1)} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, если $r - \mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) - \dfrac{1}{\alpha^{2p-1}(\alpha^2-1)} \geqslant \alpha$, то $S''_m(n+1) \geqslant \alpha S''_m(n)$ для любого n, т. е. $S''_m(n) = \Omega(\alpha^n)$. Поскольку порядок роста величины $S^{\langle \mathrm{cf} \rangle}(n)$ при $n \to \infty$ не меньше $S''_m(n)$, получаем равенство $S^{\langle \mathrm{cf} \rangle}(n) = \Omega(\alpha^n)$, т. е. $\gamma^{\langle \mathrm{cf} \rangle} \geqslant \alpha$.

Для получения конкретной оценки величины $\gamma^{\langle \mathrm{cf} \rangle}$ мы также использовали компьютерные вычисления с параметрами $m = 19$, $p = 19$, $q = 38$ и установили, что $\tau(19) = 1$, множество $\mathcal{F}''(19)$ состоит из 1763 различных слов, максимальное по модулю собственное значение r матрицы Δ_{19} равно $1,459674$ и все компоненты соответствующего этому значению собственного вектора положительны. Далее было получено

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{19}^{(19,38)}(z) = 3,496396 \cdot z^{22} + 4,200637 \cdot z^{25} + 7,386846 \cdot z^{26} \\ &+4,938129 \cdot z^{27} + 0,900386 \cdot z^{28} + 0,002892 \cdot z^{29} + 1,674845 \cdot z^{30} \\ &+7,391838 \cdot z^{31} + 2,959940 \cdot z^{32} + 20,258558 \cdot z^{34} + 22,701619 \cdot z^{35} \\ &+18,135905 \cdot z^{36} + 171,979974 \cdot z^{38}. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что для $\alpha = 1,456975$ выполняются неравенства

$$r - \mathcal{P}_{19}^{(19,38)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{37}(\alpha^2-1)} \geqslant \alpha$$

и $S''_{19}(n+1) \geqslant \alpha S''_{19}(n)$ при $n = 19, 20, \ldots, q + m + \tau(m) = 58$. Поэтому $\gamma^{\langle \mathrm{cf} \rangle} \geqslant 1,456975$.

3. Заключение

В заключение отметим, что согласно компьютерным экспериментам, увеличивая параметр m, можно, по-видимому, оценить снизу величины $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle}$ и $\gamma^{\langle \mathrm{cf} \rangle}$ с потенциально сколько угодно высокой точностью. Отметим также, что предложенный нами метод оценки предельных экспонент роста числа бесповторных слов является достаточно универсальным: он может быть применен для оценки предельных экспонент роста числа слов над любым конечным алфавитом с любым, в том числе дробным, минимальным порогом для порядка запретных подслов (при условии,

что рост числа слов является экспоненциальным). Более того, данный метод может быть легко модифицирован для случая, когда дополнительные ограничения накладываются на минимальное значение периода запретных подслов (см. [9]). Мы предполагаем, что данный метод может быть также обобщён для оценки предельных экспонент роста числа слов, не содержащих в качестве подслов слов из языков, задаваемых термами (см., например, [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
2. **Гуревич Г. А.** Бесповторные последовательности // Квант. 1975. № 9. С. 7–11.
3. **Зимин А. И.** Блокирующие множества термов // Математический сборник. 1982. Т. 119, № 3. С. 363–375.
4. **Baake M., Elser V., Grimm U.** The entropy of square-free words // Math. Comput. Modelling. 1997. V. 26, N 8–10. P. 13–26.
5. **Berstel J.** Growth of repetition-free words a review // Theoret. Comput. Science. 2005. V. 340, N 2. P. 280–290.
6. **Brandenburg F. J.** Uniformly growing k-th power-free homomorphisms // Theoret. Comput. Science. 1983. V. 23, N 1. P. 69–82.
7. **Brinkhuis J.** Nonrepetitive sequences on three symbols // Quart. J. Math. Oxford. 1983. V. 34, N 194. P. 145–149.
8. **Edlin A.** The number of binary cube-free words of length up to 47 and their numerical analysis // J. Differ. Equations and Appl. 1999. V. 5, N 3–5. C. 153–154.
9. **Ilie L., Ochem P., Shallit J.** A generalization of repetition threshold // Mathematical foundations of computer science (MFCS 2004). Berlin: Springer, 2004. P. 818–826. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 3153).
10. **Richard C., Grimm U.** On the entropy and letter frequencies of ternary square-free words // `http://arXiv:math.CO/0302302`. 2003.
11. **Sun X.** New lower bound on the number of ternary square-free words // J. Integer Sequences. 2003 (Article 03.2.2).
12. **Thue A.** Über unendliche Zeichenreihen // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiania. 1906. N 7. P. 1–22.

13. **Thue A.** Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiania. 1912. N 10. P. 1–67.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: foroman@mail.ru

Статья поступила
17 января 2006 г.