ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2006. Серия 1. Том 13, № 2. 59–96

УДК 519.716

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ БУЛЕВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*)

А. Д. Яшунский

Рассматриваются случайные булевы выражения, получаемые случайной и независимой подстановкой констант 1, 0 соответственно с вероятностями p, $1-p$ в случайные бесповторные формулы над заданным базисом. Изучается вероятность, с которой указанные выражения принимают значение 1. Показано, что для любого конечного базиса при любом p, $0<p<1$, эта вероятность стремится с ростом длины выражений к некоторому конечному пределу $P_1(p)$. Получено явное представление функции вероятности $P_1(p)$ для всех конечных базисов, изучены аналитические свойства этой функции, исследовано её поведение в зависимости от свойств базиса.

Введение

В статье изучаются вероятности значений случайных булевых выражений, составленных из символов булевых функций, принадлежащих некоторому базису, и констант 0 и 1. Под сложностью булева выражения понимается число входящих в него символов базисных функций. Случайное выражение заданной сложности n будем рассматривать как результат случайной подстановки констант вместо переменных бесповторной булевой формулы сложности n, выбранной случайно среди равновероятных бесповторных формул той же сложности. Константы подставляются вместо переменных бесповторной формулы случайно и независимо: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$.

Каждое булево выражение принимает значение 0 или 1. Пусть $P_{1,n}(p)$ — вероятность того, что случайное выражение сложности n над заданным базисом принимает значение 1. В статье исследуется предел величины $P_{1,n}(p)$ при $n\to\infty$. Этот предел, обозначаемый через $P_1(p)$, называется *функцией вероятности* базиса.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кмбернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

В статье получено явное выражение для функции вероятности произвольного базиса и исследованы его важнейшие свойства. Результаты статьи частично анонсированы автором в [9].

Задачи, имеющие сходную природу, рассматривались в работах [5] и [8]. В них исследуются вероятности, с которыми булевы функции реализуются случайными булевыми формулами в базисе $\{\&, \vee\}$ с литералами x_i и $\bar{x}_i$. Результаты работ [5] и [8] относятся к реализации булевых функций формулами и не перекрываются результатами данной статьи, в которой основным объектом являются булевы выражения.

Статья имеет следующую структуру: в разделе 1 вводятся основные определения, необходимые для формулировки задачи; в разделе 2 приводятся необходимые сведения из теории формальных языков и задача формулируется в терминах производящих функций; в разделе 3 устанавливается явный вид функции вероятности на открытом интервале $(0, 1)$ для произвольного базиса; в разделе 4 исследуется непрерывность функции $P_1(p)$ на интервале $(0, 1)$ и её поведение в граничных точках этого интервала; наконец, в разделе 5 исследуется случай базисов, состоящих из функций одной переменной.

1. Постановка задачи

Начнём с определения понятия базиса. В качестве базисов будут рассматриваться множества и мультимножества булевых функций. Под *мультимножеством* понимаем множество, когда для каждого элемента x задана кратность $k(x)$ его вхождения в мультимножество. Для мультимножества X полагаем $|X| = \sum\limits_{x \in X} k(x)$.

Определение 1. *Базисом* будем называть любое конечное множество (мультимножество) B булевых функций.

Любой базис B представляется в виде

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r, \tag{1}$$

где B_m, $1 \leqslant m \leqslant r$, — множество (мультимножество) булевых функций от m переменных, возможно пустое, причём B_r непусто. Число r называется *порядком* базиса B. Случай базисов B порядка $r \leqslant 1$ является в определённом смысле тривиальным и рассматривается отдельно в разделе 5. Далее мы предполагаем, что любой рассматриваемый базис имеет порядок $r \geqslant 2$.

Приведём определение формулы в формулировке [4].

Определение 2. Пусть B — базис и $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётный алфавит символов переменных. Пусть f — такой символ функции из B, что $f \in B_m$. Тогда слово $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ — символы из X, называется *формулой над базисом* B. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — либо формулы, либо символы переменных из алфавита X. Тогда слово $f(A_1, \ldots, A_m)$ является *формулой над базисом* B.

Формула называется *бесповторной*, если любой из символов переменных встречается в ней не более одного раза.

Аналогично формуле определим булево выражение.

Определение 3. Пусть задан базис B. Символы констант 0 и 1, рассмотренные как слова, являются *булевыми выражениями над базисом* B. Если $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ — булевы выражения над базисом B и $f \in B_m$, то слово $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$ есть *булево выражение над базисом* B.

Для формул и булевых выражений определим понятие сложности.

Определение 4. *Сложностью* формулы (булева выражения) над базисом B называется число символов функций из B, входящих в эту формулу (выражение). Сложность выражения Φ обозначается через $|\Phi|$.

Выражения ненулевой сложности над базисом B можно рассматривать как результат подстановки констант 0 и 1 вместо переменных в бесповторные формулы над базисом B. Если выражение Φ получается из бесповторной формулы $\hat{\Phi}$ в результате некоторой подстановки констант вместо переменных этой формулы, то будем говорить, что выражение Φ *порождается* формулой $\hat{\Phi}$. При этом различные формулы могут порождать одно и то же выражение, а именно: если какая-то бесповторная формула $\hat{\Phi}$ порождает выражение Φ, то любая бесповторная формула, получающаяся из $\hat{\Phi}$ переименованием переменных, также порождает выражение Φ.

При порождении булевых выражений будем рассматривать бесповторные формулы с точностью до переименования переменных и будем считать, что для каждого булева выражения существует единственная порождающая его бесповторная формула. Число бесповторных формул заданной сложности n, рассматриваемых с точностью до переименования переменных, конечно; обозначим его через s_n.

Пример 1. Найдём значение s_n для базиса $B = \{\&, \vee\}$. В данном случае, величина s_n есть число правильных скобочных последовательностей длины n, т. е. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (см. [2]), умноженное на 2^n, поскольку каждой бесповторной формуле соответствует правильная скобочная последовательность, у которой каждой паре скобок приписан один из двух функциональных символов. Следовательно, имеет место равенство

$s_n = \frac{2^n}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Считаем, что случайное выражение Φ есть результат случайной и независимой подстановки констант вместо переменных в случайно выбранной бесповторной формуле $\hat{\Phi}$ сложности n. Все бесповторные формулы сложности n полагаем равновероятными. Тогда каждая формула имеет вероятность $1/s_n$.

Константы подставляются вместо переменных формулы независимо, вероятность подстановки единицы равна p, вероятность подстановки нуля равна $1-p$. Определим для булевых выражений величину $\pi(\Phi)$.

Определение 5. Положим $\pi(1) = p$, $\pi(0) = 1-p$. Если булево выражение Φ имеет вид $f(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$, то $\pi(\Phi) = \pi(\Phi_1)\pi(\Phi_2)\ldots\pi(\Phi_m)$.

Отсюда следует, что для каждой фиксированной формулы $\hat{\Phi}$ имеет место равенство $\sum\limits_{\Phi \text{ порожд. } \hat{\Phi}} \pi(\Phi) = 1$, из которого непосредственно получаем соотношение $s_n = \sum\limits_{|\Phi|=n} \pi(\Phi)$.

Каждое булево выражение принимает значение 0 или 1. Множество всех выражений сложности n представляется в виде объединения двух непересекающихся подмножеств: совокупности выражений со значением 1 и совокупности выражений со значением 0. Введём обозначения для вероятностей этих подмножеств.

Положим $P_{1,n}(p) = \sum\limits_{|\Phi|=n, \Phi=1} P(\Phi)$ и $P_{0,n}(p) = \sum\limits_{|\Phi|=n, \Phi=0} P(\Phi)$. Согласно определению 6 имеют место следующие представления:

$$P_{1,n}(p) = \frac{\sum\limits_{|\Phi|=n, \Phi=1} \pi(\Phi)}{s_n}, \quad P_{0,n}(p) = \frac{\sum\limits_{|\Phi|=n, \Phi=0} \pi(\Phi)}{s_n}. \tag{2}$$

При каждом фиксированном n и любом $p \in [0,1]$ имеет место очевидное равенство

$$P_{1,n}(p) + P_{0,n}(p) = 1. \tag{3}$$

Положим $P_1(p) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$ ($P_0(p) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{0,n}(p)$), если предел существует, и будем говорить, что значение $P_1(p)$ ($P_0(p)$) не определено в противном случае.

При любом $p \in [0,1]$ в случае, когда значения $P_1(p)$ и $P_0(p)$ определены, справедливо равенство $P_1(p) + P_0(p) = 1$, получающееся из равенства (3) предельным переходом при $n \to \infty$. Функцию $P_1(p)$ будем называть *функцией вероятности* базиса B.

Пример 2. Найдём в явном виде функцию $P_{1,n}(p)$ для базиса $B = \{\&, \vee\}$. Покажем индукцией по n, что $P_{1,n}(p) = p$ при любом n.

Базис индукции. Выражениями сложности $n = 0$ являются константы 1 и 0, поэтому $P_{1,0}(p) = p$. Рассмотрим случай выражений сложности $n = 1$. Выпишем все выражения сложности 1:

$$\begin{array}{llll} \&(0,0), & \&(0,1), & \&(1,0), & \&(1,1), \\ \vee(0,0), & \vee(0,1), & \vee(1,0), & \vee(1,1). \end{array}$$

Сумма $\pi(\Phi)$ по всем выражениям сложности 1 со значением 1 равна $\sum\limits_{\Phi=1} \pi(\Phi) = p^2 + (2p(1-p) + p^2) = 2p$. Учитывая, что $s_1 = 2$, имеем $P_{1,1}(p) = p$.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при всех $n < m$. Рассмотрим $n = m$. Имеем

$$P_{1,m}(p) = \sum_{\Phi_1,\Phi_2} P(\&(\Phi_1,\Phi_2) = 1) + \sum_{\Phi_1,\Phi_2} P(\vee(\Phi_1,\Phi_2) = 1), \tag{4}$$

где суммирование в каждом случае ведётся по всевозможным Φ_1 и Φ_2 таким, что их суммарная сложность равна $m - 1$.

Рассмотрим отдельно первую сумму:

$$\sum_{\Phi_1,\Phi_2} P(\&(\Phi_1,\Phi_2) = 1) = \sum_{\Phi_1=1,\Phi_2=1} \frac{\pi(\&(\Phi_1,\Phi_2))}{s_m} = \frac{1}{s_m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\Phi_1=1} \sum_{\Phi_2=1} \pi(\Phi_1)\pi(\Phi_2),$$

где в последнем случае суммирование ведётся по выражениям Φ_1 сложности k и выражениям Φ_2 сложности $m - 1 - k$. Преобразуя эту сумму, получим

$$\frac{1}{s_m} \sum_k \left(\sum_{\Phi_1=1} \pi(\Phi_1) \right) \left(\sum_{\Phi_2=1} \pi(\Phi_2) \right) = \frac{1}{s_m} \sum_k P_{1,k}(p) s_k P_{1,m-1-k}(p) s_{m-1-k}.$$

Из предположения индукции следует, что $P_{1,k}(p) = p$ и $P_{1,m-1-k}(p) = p$. С учётом соотношения $s_n = \frac{2^n}{n+1}\binom{2n}{n}$ (см. пример 1) приходим к заключению, что рассматриваемая сумма равна

$$\frac{p^2}{s_m} \sum_k s_k s_{m-1-k} = \frac{p^2}{s_m} \sum_k \frac{2^k}{k+1} \binom{2k}{k} \frac{2^{m-1-k}}{m-1-k+1} \binom{2(m-1-k)}{m-1-k}.$$

Воспользуемся известным тождеством [2]

$$\sum_k \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\frac{1}{m-1-k+1}\binom{2(m-1-k)}{m-1-k} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

С его использованием рассматриваемое выражение приводится к виду

$$\frac{p^2}{s_m}\cdot\frac{2^{m-1}}{m+1}\binom{2m}{m} = \frac{p^2}{2}.$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что вторая сумма в соотношении (4) равна $(2p(1-p)+p^2)/2$. Следовательно, $P_{1,m} = \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}(2p(1-p)+p^2) = p$.

В примере 2 явное выражение величины $P_{1,n}(p)$ для всех n было получено путём непосредственного вычисления. Однако подобные вычисления практически осуществимы далеко не всегда. Поэтому в общем случае рассматривается функция вероятности базиса, т. е. предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$. Как будет показано ниже, этот предел может быть вычислен без прямого нахождения самих функций $P_{1,n}(p)$.

2. Производящие функции

2.1. Определения

Положим $t_n = \sum\limits_{|\Phi|=n,\Phi=1} \pi(\Phi)$. Тогда в силу соотношений (2) имеем $P_{1,n}(p) = t_n/s_n$.

Далее, пусть $f_n = \sum\limits_{|\Phi|=n,\Phi=0} \pi(\Phi)$. Тогда величина $P_{n,0}(p)$ представляется в виде $P_{n,0}(p) = f_n/s_n$.

Введём формальные степенные ряды:

$$T(z) = \sum_{n\geqslant 0} t_n z^n; \quad F(z) = \sum_{n\geqslant 0} f_n z^n; \quad S(z) = \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n.$$

Эти степенные ряды являются производящими функциями последовательностей t_n, f_n и s_n, а именно, воспользовавшись стандартным обозначением (см. [2]), можно записать, что $[z^n]T(z) = t_n$ (аналогично для $F(z)$ и $S(z)$), т. е. n-й коэффициент степенного ряда совпадает с n-м членом соответствующей последовательности. Подробнее о формальных степенных рядах и производящих функциях см. [2].

Отметим одно полезное свойство производящих функций $T(z)$ и $F(z)$. Пусть базис B^* является двойственным базису B, т. е. получается из B

заменой каждой функции на двойственную*. Непосредственно из рассмотрения производящих функций для базисов B и B^* вытекают следующие соотношения для функций вероятности двойственных базисов.

Теорема 1. *Пусть B и B^* — двойственные базисы, а $P_1(p)$ и $P_1^*(p)$ — соответствующие им функции вероятности. Тогда при любом фиксированном p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, значения $P_1(p)$ и $P_1^*(p)$ одновременно определены или не определены, и в случае, если значения определены, имеет место равенство $P_1(p) = 1 - P_1^*(1-p)$.*

Для самодвойственных базисов естественным образом получаем

Следствие 1. *Пусть B — самодвойственный базис (т. е. $B = B^*$) и $P_1(p)$ — соответствующая ему функция вероятности. Тогда для $0 \leqslant p \leqslant 1$ значения $P_1(p)$ и $P_1(1-p)$ одновременно определены или не определены, и в случае, если оба значения определены, имеет место равенство $P_1(p) = 1 - P_1(1-p)$.*

Чтобы избежать возможных неясностей, уточним, что самодвойственный базис не обязательно состоит из самодвойственных функций. Например, базис $\{\&, \vee\}$ — самодвойственный.

2.2. Язык булевых выражений

Далее для множества булевых выражений в произвольном базисе B будет построено описание в терминах теории формальных языков, которое, в свою очередь, позволит легко получить уравнения для производящих функций $S(z)$, $T(z)$ и $F(z)$. Проводимое построение является применением к случаю булевых выражений общего подхода М. П. Шютценберже [6].

В принципе, можно было бы обойтись без ссылки на теорию формальных языков и получить такие уравнения каким-либо другим способом, но это только затемнило бы существо дела и исказило представление о рассматриваемой задаче и о её месте в системе подобных комбинаторных задач.

Введём некоторые понятия из теории формальных языков (см., например, [1]), необходимые для дальнейших построений.

Пусть задано некоторое конечное множество, называемое *алфавитом*. Элементы алфавита называют *буквами* или *символами*. Конечный упорядоченный набор букв (возможно с повторениями) называется *словом*.

---

*Функция f^* называется *двойственной* функции f, если $f^*(x_1, \ldots, x_k) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)}$ [4].

Для слов определена операция *конкатенации*: образование нового слова путем приписывания одного слова в конец другого. Запись w_1w_2 обозначает конкатенацию слов w_1 и w_2.

Любое множество слов над некоторым алфавитом называется *языком*.

Операция конкатенации определяется и для языков. Пусть S_1 и S_2 — два языка над одним и тем же алфавитом. Тогда их конкатенация обозначается через S_1S_2 и определяется как:

$$S_1S_2 = \{w \mid w = w_1w_2, \text{ где } w_1 \in S_1, w_2 \in S_2\},$$

т. е. как множество всех слов w, являющихся конкатенациями слов w_1, w_2 из языков S_1 и S_2 соответственно. Также рассматривается конкатенация слова и языка: запись wS_1, где w — слово, а S_1 — некоторый язык, следует понимать как $\{w\}S_1$, т. е. как конкатенацию языка состоящего из единственного слова w и языка S_1.

Для языков определена теоретико-множественная операция объединения. Как и для конкатенации, запись $w \cup S$, где w — слово, а S — язык, следует понимать как $\{w\} \cup S$.

Используя операции конкатенации и объединения, можно записывать равенства, содержащие языки. В частности, будем рассматривать уравнения с неизвестными языками; при этом некоторый язык является решением уравнения, если при его подстановке в уравнение оно обращается в верное равенство.

Отметим, что рассматриваемые далее уравнения в языках имеют вид $S_i = \Lambda_i(S_1, \ldots, S_m)$, где Λ_i — некоторые отображения языков, выражаемые через конкатенацию и объединение. Языки $S_1, \ldots, S_m$, образующие решение системы уравнений $\{S_i = \Lambda_i(S_1, \ldots, S_m)\}_{i=1}^m$, являются, фактически, неподвижной точкой векторного отображения языков $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$. Отсюда, в частности, следует, что все языки S_i являются контекстно-свободными (см. [1]). Благодаря этому удается получить решение задачи в замкнутом виде. Однако в рассматриваемом случае возможность непосредственной проверки равенств (5) и (6) позволяет избежать введения дополнительных понятий из теории формальных языков и обойтись существенно более простыми средствами.

Пусть задан базис B. Тогда множество всех булевых выражений над базисом B можно рассматривать как язык над алфавитом, состоящим из символов функций базиса B, символов констант 0 и 1, а также символов левой и правой скобки и запятой.

Пусть S есть множество всех булевых выражений над заданным базисом B. Используя операции объединения и конкатенации, в соответствии с определением 3 запишем уравнение, которому удовлетворяет множество S:

$$S = 1 \cup 0 \cup \bigcup_{f \in B} f(S, \ldots, S). \tag{5}$$

В (5) символы 1, 0, скобки (,) и запятая являются символами алфавита. Под f понимаются всевозможные символы функций из базиса B. Запись $f(S, \ldots, S)$ обозначает язык, получающийся конкатенацией символа некоторой функции f из базиса B, символов скобок и запятых, и нескольких экземпляров языка S (по числу аргументов функции f).

Непосредственно проверяется, что, с одной стороны, всякое булево выражение над базисом B входит в язык S, удовлетворяющий (5), а с другой — для любого языка, удовлетворяющего (5), всякое слово этого языка является булевым выражением над базисом B. Отсюда следуют единственность решения уравнения (5) и совпадение языка, являющегося решением уравнения (5), с языком S булевых выражений.

В множестве S всех булевых выражений над заданным базисом B выделим два подмножества (т. е. два подъязыка): совокупность всех выражений со значением 1 и совокупность всех выражений со значением 0. Эти подмножества будем обозначать через T и F соответственно. Кроме того, для удобства последующей записи введём обозначения $T^{(1)} = T$ и $T^{(0)} = F$. Запишем уравнения для языков T и F:

$$\begin{aligned} T &= 1 \cup \bigcup_{f \in B} \bigcup_{f(\tilde{\alpha})=1} f(T^{(\alpha_1)}, T^{(\alpha_2)}, \ldots, T^{(\alpha_k)}), \\ F &= 0 \cup \bigcup_{f \in B} \bigcup_{f(\tilde{\alpha})=0} f(T^{(\alpha_1)}, T^{(\alpha_2)}, \ldots, T^{(\alpha_k)}), \end{aligned} \tag{6}$$

где объединение производится по всем функциям из базиса B, и для каждой функции $f \in B_k$ по всевозможным наборам $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ таким, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$ (для множества T), или $f(\tilde{\alpha}) = 0$ (для множества F).

Пример 3. Пусть задан базис $B = \{\&, \vee\}$. Запишем уравнения для множеств S и T:

$$S = 1 \cup 0 \cup \bigcup_{f \in B} f(S, S) = 1 \cup 0 \cup \&(S, S) \cup \vee(S, S).$$

$$\begin{aligned} T &= 1 \cup \bigcup_{f \in B} \bigcup_{f(\tilde{\alpha})=1} f(T^{(\alpha_1)}, T^{(\alpha_2)}) \\ &= 1 \cup \&(T^{(1)}, T^{(1)}) \cup \vee(T^{(0)}, T^{(1)}) \cup \vee(T^{(1)}, T^{(0)}) \cup \vee(T^{(1)}, T^{(1)}) \\ &= 1 \cup \&(T, T) \cup \vee(F, T) \cup \vee(T, F) \cup \vee(T, T). \end{aligned}$$

Аналогично уравнению для T, для F получаем следующее уравнение

$$F = 0 \cup \&(F, F) \cup \&(F, T) \cup \&(T, F) \cup \vee(F, F).$$

2.3. Уравнения с производящими функциями

В соответствии с общим подходом Шютценберже переход от уравнений в языках к уравнениям для производящих функций осуществляется с помощью некоторого гомоморфизма языков. Такой подход весьма удобен: достаточно описать действие гомоморфизма на символах рассматриваемого языка, затем стандартным образом продолжить гомоморфизм на весь язык, после чего уравнения для производящих функций выписываются почти автоматически.

Построим гомоморфизм h языка булевых выражений в множество формальных степенных рядов переменной z (подробнее о гомоморфизмах языков см. [6]). Начнём с определения гомоморфизма h на буквах языка булевых выражений. Положим

$$\begin{array}{ll} h(1) = p, & h(''('') = 1, \\ h(0) = 1 - p, & h('')'') = 1, \\ h(f) = z, & h(\ '') = 1, \end{array}$$

где под f подразумеваются символы всевозможных функций из базиса B, а собственно буквы языка булевых выражений взяты в кавычки. Образами букв алфавита являются одночлены переменной z степени 0 для констант и вспомогательных символов, и степени 1 для символов функций. Для любых слов w_1, w_2 положим $h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$, т. е. отображение h гомоморфным образом продолжим с символов алфавита на слова в данном алфавите (умножение одночленов переменной z происходит обычным образом).

Пример 4. Под действием гомоморфизма h выражение $\vee(0, 1)$ переходит в $z \cdot 1 \cdot (1 - p) \cdot 1 \cdot p \cdot 1 = p(1 - p)z$.

Лемма 1. *Под действием гомоморфизма h булево выражение Φ переходит в одночлен $h(\Phi) = \pi(\Phi)z^{|\Phi|}$.*

Гомоморфизм h естественным образом распространяется на языки. Определим образ объединения двух множеств как сумму образов каждого из множеств. Образом конечного языка будет многочлен от переменной z, а образом бесконечного языка — формальный степенной ряд от переменной z. Из леммы 1 непосредственно следует

Лемма 2. *При любом фиксированном базисе B для языков S, T и F*

выполнены соотношения $h(S) = S(z)$, $h(T) = T(z)$ *и* $h(F) = F(z)$.

Применяя гомоморфизм h к обеим частям равенств (5) и (6), получим уравнения, связывающие производящие функции $S(z)$, $T(z)$ и $F(z)$. С учётом вида множества B, заданного соотношением (1), уравнение для функции $S(z)$ имеет вид $S(z) = p + (1-p) + \sum_{k=0}^{r} z|B_k|\left(S(z)\right)^k$. Для упрощения записи здесь и далее будем опускать аргумент z производящих функций, записывая S вместо $S(z)$, T вместо $T(z)$ и F вместо $F(z)$. Тогда имеем

$$S = 1 + z\sum_{k=0}^{r}|B_k|S^k. \tag{7}$$

Сумма в правой части уравнения представляет собой многочлен от S. Его будем обозначать через $B(S)$ и называть *базисным многочленом*. С использованием этого обозначения уравнение (7) переписывается в виде $S = 1 + zB(S)$.

Теперь рассмотрим результат применения гомоморфизма h к правой и левой части уравнения для T из (6):

$$T = p + z\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{k} a_{ki}T^iF^{k-i}. \tag{8}$$

Коэффициенты a_{ki} имеют следующий смысл. Пусть для функции $f \in B$ величина $a_i(f)$ есть число единиц среди значений функции f на наборах *веса* i, т. е. на наборах, содержащих ровно i единиц. Положим $a_{ki} = \sum_{f\in B_k} a_i(f)$. Заметим, что для функции $f \in B_k$ и набора $\tilde{\alpha}$ веса i выполняется соотношение $h(f(T^{(\alpha_1)},\dots,T^{(\alpha_k)})) = zT^iF^{k-i}$. Поэтому

$$h\left(\bigcup_{f\in B}\ \bigcup_{f(\tilde{\alpha})=1} f(T^{(\alpha_1)},T^{(\alpha_2)},\dots,T^{(\alpha_k)})\right) = z\sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{k} a_{ki}T^iF^{k-i}.$$

Сумма из правой части уравнения (8) является многочленом от переменных T и F. Этот многочлен будем обозначать через $A(T,F)$ и называть *характеристическим многочленом* базиса B. С использованием этого обозначения уравнение (8) можно переписать в виде $T = p + zA(T,F)$.

Отметим, что при любых i и k коэффициенты характеристического и базисного многочленов удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant a_{ki} \leqslant \binom{k}{i}|B_k|. \tag{9}$$

Пример 5. Рассмотрим базис $B = \{\&, \vee\}$. Используя полученные в примере 3 уравнения для языков S, T и F, запишем уравнения для производящих функций S и T:

$$S = 1 + z \cdot 2S^2, \quad T = p + z(2TF + 2T^2).$$

Учитывая справедливость равенства $S = T + F$, уравнение для F можно записать в виде $F = 1 - p + z(B(T+F) - A(T,F))$. Заметим, что в многочлене $B(T+F) - A(T,F)$ коэффициенты при одночленах $T^i F^{k-i}$ равны $\binom{k}{i}|B_k| - a_{ki}$ и в силу неравенств (9) неотрицательны при любых i и k.

3. Решение задачи об асимптотике

3.1. Асимптотика коэффициентов алгебраических производящих функций

Для получения асимптотики коэффициентов рядов $S(z)$, $T(z)$ и $F(z)$ далее эти ряды будут рассматриваться как разложения в степенные ряды в окрестности точки $z = 0$ комплексных функций $S(z)$, $T(z)$ и $F(z)$.

Метод исследования асимптотики коэффициентов рядов, заданных системой алгебраических уравнений, предложен в [7]. Основу этого метода составляет теорема об асимптотике коэффициентов алгебраических функций, именуемая в работе [7] теоремой Дрмота—Лэлли—Вудса и приведённая ниже как теорема 2.

Введём некоторые понятия, необходимые для формулировки теоремы 2. Пусть рассматривается система уравнений

$$y_j = G_j(z, y_1, \ldots, y_m), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где G_j — многочлены от указанных переменных.

Решения $y_j(z)$ системы принадлежат пространству формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами $\mathbb{C}[[z]]$. Ряд $f \in \mathbb{C}[[z]]$ будем называть *периодичным*, если найдутся такие натуральные $k > 1$ и d, что f представляется в виде $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_{kn+d} z^{kn+d}$. Ряд, не являющийся периодичным, будем называть *апериодичным*. Отметим следующее свойство апериодичных рядов, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 3. *Формальный степенной ряд f, содержащий хотя бы три ненулевых члена, является апериодичным тогда и только тогда, когда он содержит три одночлена z^{e_1}, z^{e_2}, z^{e_3} с ненулевыми коэффициентами такие, что числа $e_2 - e_1$ и $e_3 - e_1$ взаимно просты.*

Система вида (10) может дополнительно обладать следующими свойствами:

1. *Нелинейность*. Она является нелинейной, если хотя бы один из многочленов G_j является нелинейным по переменным $y_1, \ldots, y_m$.

2. *Положительность*. Она является положительной, если все многочлены G_j имеют неотрицательные коэффициенты.

3. *Корректность*. Она является корректной, если отображение G является сжимающим в пространстве векторов из формальных степенных рядов с метрикой $d(\vec{y}, \vec{y}') = 2^{-\min\limits_j \mathrm{val}(y_j - y'_j)}$, где при $f \in \mathbb{C}[[z]]$ полагаем $\mathrm{val}(f) = \beta$, если $f = \sum\limits_{n \geqslant \beta} f_n z^n$ и $f_\beta \neq 0$. Условие корректности обеспечивает единственность решения системы $\vec{y} = G(\vec{y})$.

4. *Несводимость*. Она является несводимой, если ориентированный граф зависимости между переменными y_j является сильно связным*: вершинам графа соответствуют переменные y_j, из вершины y_j в вершину y_k проводится дуга, если многочлен G_j содержит переменную y_k.

5. *Апериодичность*. Она является апериодичной, если каждая компонента её решения $\{y_j(z)\}$ является апериодичной.

Теорема 2. *Пусть дана полиномиальная система уравнений $\vec{y} = G(z, \vec{y})$, являющаяся нелинейной, корректной, положительной и несводимой. Тогда все компоненты решения $y_j = y_j(z), 1 \leqslant j \leqslant m$, являются сходящимися рядами и имеют один и тот же радиус сходимости $\rho, 0 < \rho < \infty$. Кроме того, существуют аналитические в нуле функции h_j такие, что в некоторой окрестности точки ρ внутри круга сходимости (т. е. при $|z| < \rho$) имеет место представление*:

$$y_j(z) = h_j\left(\sqrt{1 - z/\rho}\right).$$

Далее, если система является апериодичной, то у всех $y_j(z)$ точка ρ является единственной особенностью на границе круга сходимости. В этом случае $y_j(z)$ представимо в виде

$$y_j(z) = y_j(\rho) + C_j\sqrt{\rho - z} + o(\sqrt{\rho - z}),$$

где C_j — некоторые отрицательные действительные числа, и при $n \to \infty$ коэффициенты рядов $y_j(z)$ имеют следующее асимптотическое разложе-

*Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любых его вершин v_1 и v_2 существует ориентированный путь из v_1 в v_2.

ние:

$$[z^n]y_j(z) \sim [z^n]C_j\sqrt{\rho - z} \sim \rho^{-n}\left(\sum_{k\geqslant 1} d_k n^{-1-k/2}\right),$$

где d_k *— некоторые действительные числа,* $k = 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем будет использована вытекающая из теоремы 2 более грубая асимптотика для $[z^n]y_j(z)$.

Следствие 2. *Пусть дана полиномиальная система уравнений* $\vec{y} = G(z, \vec{y})$, *являющаяся нелинейной, корректной, положительной, несводимой и апериодичной. Тогда* $y_j(z)$ *представимо в виде* $y_j(z) = y_j(\rho) + C_j\sqrt{\rho - z} + o(\sqrt{\rho - z})$ *и асимптотика коэффициентов* $y_j(z)$ *при* $n \to \infty$ *имеет вид* $[z^n]y_j(z) \sim \rho^{-n}d_1 n^{-3/2}$, *где* $d_1 = C_j\sqrt{\rho}/\Gamma(-1/2)$, *а* $\Gamma(-1/2)$ *есть значение гамма-функции в точке* $-1/2$, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

3.2. Функция вероятности на интервале $(0, 1)$

Воспользуемся следствием 2 для получения явного вида функции вероятности на интервале $0 < p < 1$. Производящие функции T и F связаны системой уравнений:

$$\begin{cases} T = p + zA(T, F), \\ F = 1 - p + z(B(T + F) - A(T, F)). \end{cases} \tag{11}$$

Установим некоторые свойства системы (11). Система уравнений (11), очевидно, является полиномиальной; нелинейность системы обеспечивается наличием в базисе B хотя бы одной функции от более чем одной переменной (в силу предположения о порядке базиса). В силу неравенств (9) коэффициенты характеристического многочлена и многочлена $B(T + F) - A(T, F)$ (как многочлена от переменных T и F) являются неотрицательными. Следовательно, система (11) является положительной.

Лемма 4. *Система уравнений* (11) *является корректной.*

Доказательство. В качестве вектора-решения системы выступает пара рядов $\vec{y} = (T, F)$. Покажем, что система (11) задаёт векторное отображение $G(\vec{y})$ (с компонентами $G_1(\vec{y})$ и $G_2(\vec{y})$), являющееся сжимающим в метрике $d(\cdot, \cdot)$. Пусть $\vec{y} = (T, F)$ и $\vec{y}' = (T', F')$ — две произвольные пары рядов. Рассмотрим величину

$$d(G(\vec{y}), G(\vec{y}')) = 2^{-\min\{\mathrm{val}(G_1(\vec{y}) - G_1(\vec{y}')), \mathrm{val}(G_2(\vec{y}) - G_2(\vec{y}'))\}}.$$

Согласно уравнениям (11)

$$G_1(\vec{y}) = p + zA(T, F) \text{ и } G_2(\vec{y}) = 1 - p + zB(T + F) - zA(T, F).$$

Тогда

$$G_1(\vec{y}) - G_1(\vec{y}') = (p + zA(T, F)) - (p + zA(T', F')) \\ = z(A(T, F) - A(T', F')).$$

Следовательно,

$$\mathrm{val}(G_1(\vec{y}) - G_1(\vec{y}')) = \mathrm{val}(z(A(T, F) - A(T', F'))) \\ = 1 + \mathrm{val}(A(T, F) - A(T', F')).$$

Аналогично получаем, что

$$\mathrm{val}(G_2(\vec{y}) - G_2(\vec{y}')) = 1 + \mathrm{val}(B(T + F) - B(T' + F') - A(T, F) + A(T', F')).$$

Величина $\mathrm{val}(A(T, F) - A(T', F'))$ равна

$$\mathrm{val}(A(T, F) - A(T', F')) = \mathrm{val}\left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{k} a_{ki}(T^i F^{k-i} - T'^i F'^{k-i})\right) \\ \geqslant \min_{i,k}\{\mathrm{val}(T^i F^{k-i} - T'^i F'^{k-i})\} \\ \geqslant \min_{i,k}\{\mathrm{val}(T^i F^{k-i} - T^i F'^{k-i}), \mathrm{val}(T^i F'^{k-i} - T'^i F'^{k-i})\} \\ \geqslant \min\{\mathrm{val}(T - T'), \mathrm{val}(F - F')\}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{val}(B(T + F) - B(T' + F') - A(T, F) + A(T', F')) \\ \geqslant \min\{\mathrm{val}(T - T'), \mathrm{val}(F - F')\}.$$

В результате получаем

$$d(G(\vec{y}), G(\vec{y}')) \leqslant 2^{-1-\min\{\mathrm{val}(T-T'),\mathrm{val}(F-F')\}} \leqslant \frac{1}{2} d(\vec{y}, \vec{y}'),$$

т. е. отображение $G(\vec{y})$ является сжимающим и система (11) корректна. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть базис B содержит хотя бы одну функцию, отличную от конъюнкции переменных и тождественного нуля, а также функцию, отличную от дизъюнкции переменных и тождественной единицы. Тогда система* (11) *является несводимой.*

Доказательство. По условию леммы в базисе B найдётся функция, отличная от конъюнкции переменных и нуля. Поэтому в многочлене $A(T,F)$ есть слагаемое, отличное от T^k. Следовательно, уравнение для T содержит хотя бы одно вхождение F. Аналогично, наличие в базисе функции, отличной от дизъюнкции переменных и единицы, обеспечивает присутствие T в уравнении для F. Следовательно, система (11) является несводимой. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть B — базис, содержащий функцию, отличную от тождественного нуля, и функцию, отличную от тождественной единицы. Тогда при любом p, $0 < p < 1$, для любой наперед заданной величины сложности n найдутся выражения Φ_1 и Φ_0 со значениями 1 и 0 соответственно такие, что $|\Phi_1| = n$, $|\Phi_0| = n$ и $\pi(\Phi_1) \neq 0$, $\pi(\Phi_0) \neq 0$.*

Доказательство. Утверждение докажем индукцией по n. Действительно, при $n = 0$ выражения 1 и 0 имеют нулевую сложность и значения 1 и 0. В силу предположения $0 < p < 1$ имеем $\pi(1) = p > 0$ и $\pi(0) = 1 - p > 0$, что даёт базис индукции.

Опишем шаг индукции. Пусть утверждение верно для всех $n < m$. Покажем, что оно верно при $n = m$. По условию леммы в базисе B найдётся функция, отличная от тождественного нуля. Следовательно, существуют функция g и набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ такие, что $g(\tilde{\alpha}) = 1$. Воспользовавшись предположением индукции, найдём такое выражение Ψ_{α_1} со значением α_1 и сложностью $|\Psi_{\alpha_1}| = m - 1$, что $\pi(\Psi_{\alpha_1}) \neq 0$. Рассмотрим булево выражение $\Phi_1 = g(\Psi_{\alpha_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Это выражение имеет сложность $|\Phi_1| = m$ и $\pi(\Phi_1) = \pi(\Phi_{\alpha_1})\pi(\alpha_2)\cdots\pi(\alpha_k) > 0$.

Аналогично, из наличия в базисе B функции, отличной от тождественной единицы, следует, что найдётся такое выражение Φ_0 сложности m со значением 0, что $\pi(\Phi_0) \neq 0$. Шаг индукции завершён. Лемма 6 доказана.

Если базис B удовлетворяет условиям леммы 6, то при разложении в ряд функций $T(z)$ и $F(z)$ все коэффициенты $[z^n]T(z)$ и $[z^n]F(z)$ отличны от нуля, что влечёт апериодичность системы (11).

Опираясь на доказанные в леммах 4–6 свойства системы уравнений (11), выведем явное выражение для функции вероятности $P_1(p)$ при $0 < p < 1$.

Теорема 3. *Пусть задан базис B с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$. Пусть при некотором фиксированном p система уравнений (11) является полиномиальной, положительной, корректной, несводимой и апериодичной. Тогда существует положительное действительное число ω, являющееся ближайшей к нулю* *особой точкой функций $T(z)$ и $F(z)$, и определены значения $\tau = T(\omega)$, $\varphi = F(\omega)$. Кроме того, значение $P_1(p)$ определено и*

$$P_1(p) = \frac{A'_F(\tau,\varphi)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau,\varphi) + A'_F(\tau,\varphi)},$$

где A'_T и A'_F обозначают частные производные многочлена $A(T,F)$ по переменным T и F соответственно.

Доказательство. Производящие функции $T(z)$ и $F(z)$ связаны системой уравнений (11), которая по условию является полиномиальной, положительной, корректной, несводимой и апериодической. Следовательно, к системе (11) применима теорема 2. Используем асимптотику коэффициентов $t_n = [z^n]T(z)$ и $f_n = [z^n]F(z)$ для получения значения $P_1(p)$.

Рассмотрим величину $P_{1,n}(p) = t_n/s_n$, где $s_n = t_n + f_n$.

Из теоремы 2 следует, что $T(z)$ и $F(z)$ имеют общую ближайшую к нулю особую точку ω, являющуюся положительным действительным числом, и значения $T(\omega)$ и $F(\omega)$ определены. В окрестности точки ω при $|\omega - z| \to 0$ функции $T(z)$ и $F(z)$ представляются в виде рядов Пюизо (см. [3])

$$\begin{aligned} T(z) &= T(\omega) + C_T\sqrt{\omega - z} + o(\sqrt{\omega - z}),\\ F(z) &= F(\omega) + C_F\sqrt{\omega - z} + o(\sqrt{\omega - z}), \end{aligned} \tag{12}$$

где C_T и C_F — некоторые отрицательные постоянные. Кроме того, по следствию 2 для коэффициентов $t_n = [z^n]T(z)$ и $f_n = [z^n]F(z)$ при $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства

$$t_n \sim \omega^{-n+1/2} C_T n^{-3/2}/\Gamma(-1/2), \quad f_n \sim \omega^{-n+1/2} C_F n^{-3/2}/\Gamma(-1/2). \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} t_n/(t_n + f_n)$, т. е. определено значение $P_1(p) = \lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$ и $P_1(p) = C_T/(C_T + C_F)$. Преобразуем это соотношение в явное выражение для $P_1(p)$.

Функция $T(z)$ удовлетворяет уравнению $T = p + zA(T,F)$. Подставив в это уравнение вместо $T(z)$ и $F(z)$ их разложения в виде (12) и используя обозначения $\tau = T(\omega)$ и $\varphi = F(\omega)$, запишем следующее асимптотическое равенство (при $|\omega - z| \to 0$ с точностью до более высоких степеней величины $\sqrt{\omega - z}$):

$$\tau + C_T\sqrt{\omega - z} \sim p + \omega A\left(\tau + C_T\sqrt{\omega - z}, \varphi + C_F\sqrt{\omega - z}\right).$$

Разложим многочлен A по степеням $\sqrt{\omega - z}$, опуская степени величины $\sqrt{\omega - z}$ выше первой:

$$\tau + C_T\sqrt{\omega - z} \sim p + \omega\left(A(\tau,\varphi) + A'_T(\tau,\varphi)C_T\sqrt{\omega - z} + A'_F(\tau,\varphi)C_F\sqrt{\omega - z}\right).$$

Приравняем коэффициенты при $\sqrt{\omega - z}$ в правой и левой частях равенства:

$$C_T = \omega A'_T(\tau,\varphi)C_T + \omega A'_F(\tau,\varphi)C_F.$$

Следовательно, $C_F = \frac{\omega^{-1} - A'_T(\tau,\varphi)}{A'_F(\tau,\varphi)}C_T$. Таким образом, $P_1(p)$ выражается как

$$P_1(p) = \frac{C_T}{C_T + C_F} = \frac{C_T}{\left(1 + \frac{\omega^{-1} - A'_T(\tau,\varphi)}{A'_F(\tau,\varphi)}\right)C_T} = \frac{A'_F(\tau,\varphi)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau,\varphi) + A'_F(\tau,\varphi)}.$$

Теорема 3 доказана.

В силу лемм 4–6 теорема 3 применима, если $0 < p < 1$, а базис B содержит хотя бы одну функцию, отличную от конъюнкции переменных и тождественного нуля, и хотя бы одну функцию, отличную от дизъюнкции переменных и тождественной единицы. Далее (теорема 5) мы обобщим этот результат на случай произвольных базисов. Прежде чем перейти к формулировке теоремы 5, рассмотрим подробнее величину ω, фигурирующую в условии теоремы 3.

Теорема 3 утверждает существование точки ω. Рассмотрим вопрос о нахождении величины ω для заданного базиса B. По теореме 3 величина ω является ближайшей к нулю особой точкой функций $T(z)$ и $F(z)$. Отметим, что если ω является особой точкой для каждой из функций $T(z)$ и $F(z)$, то она будет особой точкой для суммы $S(z) = T(z) + F(z)$ в силу неотрицательности коэффициентов t_n и f_n. При этом если ω является ближайшей к нулю особой точкой функций $T(z)$ и $F(z)$, то она является ближайшей к нулю особой точкой и для функции $S(z)$.

Как было установлено ранее, функция $S(z)$ удовлетворяет уравнению $S = 1 + zB(S)$. Следовательно, точка ω не зависит от p. Для нахождения особой точки функции $S(z)$ воспользуемся теоремой о неявной функции [3].

Теорема 4. *Пусть функция* $\Phi(z, y)$ *определена в области* $|z - a| < r$, $|y - b| < R$ *и непрерывна в этой области по совокупности переменных, а также регулярна* (*т. е. представляется в виде сходящегося ряда*):

1) *по* z *в круге* $|z - a| < r$ *при любом фиксированном* y, $|y - b| < R$;

2) *по* y *в круге* $|y - b| < R$ *при любом фиксированном* z, $|z - a| < r$.

Если $\Phi(a, b) = 0$ *и* $\Phi'_y(a, b) \neq 0$, *то существует единственная непрерывная в точке* $z = a$ *функция* $y(z)$, *удовлетворяющая условиям*:

$$\Phi(z, y(z)) = 0, \quad y(a) = b.$$

Функция $y(z)$ регулярна в точке $z = a$ и

$$y'(z) = -\frac{\Phi'_z(z, y(z))}{\Phi'_y(z, y(z))}$$

для всех z в некоторой окрестности точки $z = a$.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 3. *Пусть B — некоторый базис и $B(S)$ — его базисный многочлен. Пусть ω — ближайшая к нулю особая точка функции $S(z)$ и $S(\omega) = \sigma$. Тогда пара чисел (ω, σ) удовлетворяет системе уравнений*:

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega B(\sigma), \\ 1 = \omega B'(\sigma). \end{cases}$$

Решение этой системы, у которого значение $|\omega|$ наименьшее, соответствует ближайшей к нулю особой точке функций $S(z), T(z)$ и $F(z)$. Для числа σ имеет место равенство $\tau + \varphi = \sigma$. Вследствие неотрицательности коэффициентов рядов $T(z)$ и $F(z)$ справедливы неравенства $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \sigma$.

Отметим, что в силу неотрицательности коэффициентов многочлена $B'(S)$ минимальное значение ω соответствует максимальному значению σ.

Поскольку $\tau = T(\omega)$ и T удовлетворяет уравнению $T = p + zA(T, F)$, величина τ является решением уравнения

$$\tau = p + \omega A(\tau, \sigma - \tau). \tag{14}$$

Как будет показано далее (теорема 7), уравнение (14) вместе с условием $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$ задаёт величину τ единственным образом, т. е. при выполнении указанного условия уравнение (14) неявно задаёт алгебраическую функцию $\tau = \tau(p)$, однозначно определённую на отрезке $p \in [0, 1]$.

Рассмотрим базисы B, не удовлетворяющие условиям лемм 5 и 6. Для базисов, состоящих только из конъюнкций переменных и тождественно нулевых функций, или же только из дизъюнкций переменных и тождественно единичных функций, система (11) не обладает свойствами несводимости и апериодичности. Поэтому теорема 3 оказывается неприменимой.

Теорема 5. *Пусть базис B содержит только функции, являющиеся конъюнкциями переменных или тождественным нулём, или же только функции, являющиеся дизъюнкциями переменных или тождественной* *единицей. Пусть $A(T,F)$ — характеристический, а $B(S)$ — базисный многочлен базиса B. Тогда при любом фиксированном p, $0<p<1$, значение $P_1(p)$ определено и*

$$P_1(p)=\frac{A'_F(\tau,\varphi)}{\omega^{-1}-A'_T(\tau,\varphi)+A'_F(\tau,\varphi)}, \tag{15}$$

где A'_T и A'_F обозначают частные производные многочлена $A(T,F)$ по T и F соответственно, ω — ближайшая к нулю особая точка функции $S(z)$, $\tau=T(\omega)$, $\varphi=F(\omega)$.*

Доказательство. Пусть базис B содержит только функции, являющиеся конъюнкциями переменных или тождественными нулями. Тогда уравнение для $T(z)$ имеет вид:

$$T=p+z\sum_{k=0}^{r}a_{kk}T^k. \tag{16}$$

Оно не содержит F, поэтому система уравнений для T и F не является несводимой, т. е. в этом случае теорема 2 неприменима к системе уравнений (11).

Сначала рассмотрим тривиальный случай, когда базис состоит только из функций, являющихся тождественным нулём. В этом случае, с одной стороны, $T(z)=p$, а с другой — $A(T,F)=0$ при всех T и F. Следовательно, выражение в левой части равенства (15) определено и равно нулю. Для $P_1(p)$ в этом случае справедливо равенство (15).

Если в базисе B найдётся функция, отличная от тождественного нуля, то многочлен $A(T,F)$ ненулевой и теорему 2 можно применить отдельно к уравнению (16) как к системе из одного алгебраического уравнения. В этом случае многочлен $A(T,F)$ не зависит от переменной F. Поэтому будем обозначать его через $A(T)$.

Согласно следствию 2 коэффициенты t_n по порядку равны $\omega_T^{-n}n^{-3/2}$, где положительное действительное число ω_T — ближайшая к нулю особая точка функции $T(z)$.

Аналогично, функция $S(z)$ удовлетворяет уравнению $S=1+zB(S)$ и коэффициенты s_n по порядку равны $\omega^{-n}n^{-3/2}$, где положительное действительное число ω — ближайшая к нулю особая точка функции $S(z)$.

Заметим, что $\omega_T\geqslant\omega$, так как иначе t_n по порядку больше s_n, что противоречит определению коэффициентов t_n и s_n.

---

*В рассматриваемом случае число ω может не являться особой точкой для одной из функций $T(z)$, $F(z)$.

Покажем, что при $p \in (0,1)$ случай равенства $\omega_T = \omega$ невозможен. Пусть ω есть общая особая точка для $T(z)$ и $S(z)$. Тогда для величин $\tau = T(\omega)$ и $\sigma = S(\omega)$ имеем $\tau \leqslant \sigma$, и, кроме того, по теореме 4 выполнены соотношения:

$$\tau = p + \omega A(\tau), \quad \sigma = 1 + \omega B(\sigma), \tag{17}$$

$$1 = \omega A'(\tau), \quad 1 = \omega B'(\sigma). \tag{18}$$

В общем случае выполнены неравенства $\tau \leqslant \sigma$, $A(\tau) \leqslant B(\sigma)$ и $A'(\tau) \leqslant B'(\sigma)$. Из равенств (18) следует, что в рассматриваемом случае выполнены равенства $\tau = \sigma$ и $A(\tau) = B(\sigma)$. Эти соотношения вместе с (17) влекут равенство $p = 1$, что невозможно в силу предположения, что $p < 1$.

Итак, $\omega_T > \omega$. Тогда с учётом порядка роста t_n и s_n приходим к выводу, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n/s_n = 0$, т. е. $P_1(p) = 0$. С другой стороны, $\dfrac{\partial}{\partial F}A(T) = 0$ при любых значениях T и F.

При $0 < p < 1$ выполнено неравенство $\tau < \sigma$, так как предположение $\tau = \sigma$ влечет равенство $p = 1$. С учётом уже упоминавшихся неравенств получаем, что $A'_T(\tau) < A'_T(\sigma) \leqslant B'(\sigma) = \omega^{-1}$. Следовательно, выражение $\dfrac{A'_F}{\omega^{-1} - A'_T + A'_F}$ определено и равно 0. Таким образом, равенство $P_1(p) = \dfrac{A'_F}{\omega^{-1} - A'_T + A'_F}$ верно.

Итак, для базиса, состоящего из конъюнкций переменных и тождественных нулей, теорема верна. Перейдём к рассмотрению базисов, состоящих из дизъюнкций переменных и тождественных единиц.

Пусть базис B содержит только функции, являющиеся дизъюнкцией переменных или тождественной единицей. Рассмотрим базис B^*, двойственный базису B. Базис B^* содержит только функции, являющиеся конъюнкцией переменных или тождественным нулём. Базисный многочлен для базиса B^* совпадает с базисным многочленом для базиса B, а следовательно, совпадают числа ω и σ. Для характеристического многочлена $A^*(T,F)$ базиса B^* выполнено соотношение $A^*(T,F) = B(T+F) - A(F,T)$. Кроме того, функции τ, φ для базиса B и функции τ^*, φ^* для базиса B^* связаны соотношениями $\tau(p) = \varphi^*(1-p)$ и $\varphi(p) = \tau^*(1-p)$. Как показано выше, значение $P_1^*(p)$ для базиса B^* определено и

$$P_1^*(p) = \frac{{A^*}'_F(\tau^*(p), \varphi^*(p))}{\omega^{-1} - {A^*}'_T(\tau^*(p), \varphi^*(p)) + {A^*}'_F(\tau^*(p), \varphi^*(p))}.$$

Используя соотношения между характеристическими многочленами двойственных базисов, а также равенство $\omega^{-1} = B'(\sigma)$, получаем

$$P_1^*(p) = \frac{B'(\sigma)-A'_T(\tau(1-p),\varphi(1-p))}{B'(\sigma)-B'(\sigma)+A'_F(\tau(1-p),\varphi(1-p))+B'(\sigma)-A'_T(\tau(1-p),\varphi(1-p))} = \\ = 1 - \frac{A'_F(\tau(1-p),\varphi(1-p))}{\omega^{-1}-A'_T(\tau(1-p),\varphi(1-p))+A'_F(\tau(1-p),\varphi(1-p))}.$$

Тогда согласно теореме 1 для базиса B значение функции вероятности $P_1(p)$ определено и

$$P_1(p) = 1 - P_1^*(1-p) = \frac{A'_F(\tau(p),\varphi(p))}{\omega^{-1} - A'_T(\tau(p),\varphi(p)) + A'_F(\tau(p),\varphi(p))}.$$

Теорема 5 доказана.

Объединение теорем 3 и 5, а также следствия 3 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$. Тогда при любом фиксированном p, $0 < p < 1$, значение $P_1(p)$ определено и*

$$P_1(p) = \frac{A'_F(\tau,\sigma-\tau)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau,\sigma-\tau) + A'_F(\tau,\sigma-\tau)}, \tag{19}$$

где ω и σ — однозначно определённые положительные действительные числа, являющиеся решением системы уравнений

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega B(\sigma), \\ 1 = \omega B'(\sigma), \end{cases} \tag{20}$$

с минимальным значением $|\omega|$ (среди всех решений (20)), A'_T и A'_F — частные производные многочлена $A(T,F)$, а $\tau = \tau(p)$ — однозначно определённая алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\tau(p) = p + \omega A(\tau(p), \sigma - \tau(p)) \tag{21}$$

и условию $0 \leqslant \tau(p) \leqslant \sigma$.

Единственность функции $\tau(p)$, удовлетворяющей уравнению (21) и условию $0 \leqslant \tau(p) \leqslant \sigma$, будет доказана в теореме 7.

Следствие 4. *Функция $P_1(p)$ представляется в виде композиции функций: $P_1(p) = \hat{P}(\tau(p))$, где $\hat{P}(\tau)$ — некоторая дробно-рациональная функция, а $\tau(p)$ — алгебраическая функция из теоремы 6.*

Приведём примеры, иллюстрирующие теорему 6.

Пример 6. Рассмотрим базис $B = \{\&, \vee\}$. Ранее было установлено, что многочлен $A(T, F)$ для этого базиса имеет вид $2TF + 2T^2$. По теореме 6 имеем

$$P_1(p) = \frac{A'_F(\tau, \sigma - \tau)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma - \tau) + A'_F(\tau, \sigma - \tau)} = \frac{2\tau}{\omega^{-1} - 2(\sigma - \tau) - 4\tau + 2\tau} = \frac{2\tau}{\omega^{-1} - 2\sigma}.$$

Система (20) для данного базиса имеет вид

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega \cdot 2\sigma^2, \\ 1 = \omega \cdot 4\sigma, \end{cases}$$

откуда $\sigma = 2$ и $\omega = 1/8$. Подстановка значения в выражение для $P_1(p)$ даёт $P_1(p) = 2\tau/(8 - 4) = \tau/2$. Найдём значение τ. Оно удовлетворяет уравнению $\tau = p + \frac{1}{8}(2\tau(2 - \tau) + 2\tau^2)$, откуда $\tau = 2p$. Следовательно, $P_1(p) = p$.

Пример 7. Найдём функцию вероятности $P_1(p)$ для базиса $B = \{\&, \vee, \neg\}$. Многочлен $A(T, F)$ для этого базиса равен $F + 2TF + 2T^2$. По теореме 6 имеем

$$P_1(p) = \frac{1 + 2\tau}{\omega^{-1} - 2(\sigma - \tau) - 4\tau + 1 + 2\tau} = \frac{1 + 2\tau}{\omega^{-1} - 2\sigma + 1}.$$

Величины ω и σ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega(\sigma + 2\sigma^2), \\ 1 = \omega(1 + 4\sigma). \end{cases}$$

Решениями этой системы являются $\omega = 5 \pm 2\sqrt{6}$ и $\sigma = 1 \mp \sqrt{3/2}$. Парой (ω, σ) с наименьшим $|\omega|$ является $\omega = 5 - 2\sqrt{6}$ и $\sigma = 1 + \sqrt{3/2}$. Уравнение $\tau = p + \omega A(\tau, \sigma - \tau)$ даёт следующее выражение для τ:

$$\tau = \frac{p + \omega\sigma}{1 + \omega(1 - 2\sigma)}.$$

В итоге имеем

$$P_1(p) = \frac{\omega\left(1 + 2\frac{p + \omega\sigma}{1 + \omega(1 - 2\sigma)}\right)}{1 + \omega(1 - 2\sigma)} = \frac{\omega(2p + 1 + \omega)}{(1 + \omega(1 - 2\sigma))^2}.$$

Подстановка в это выражение значений $\omega = 5 - 2\sqrt{6}$ и $\sigma = 1 + \sqrt{3/2}$ даёт $P_1(p) = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}(p + 3 - \sqrt{6})$.

4. Непрерывность функции вероятности

4.1. Свойства функции $\tau(p)$

Согласно следствию 4 функция $P_1(p)$ является композицией функций $\hat{P}(\tau)$ и $\tau(p)$, где $\tau(p)$ является алгебраической функцией, удовлетворяющей уравнению (21), причём значение $\tau(p)$ лежит на отрезке $[0,\sigma]$ при любом $p \in [0,1]$. Изучим свойства функции $\tau(p)$.

Преобразуем уравнение (21) к виду

$$p = \tau - \omega A(\tau, \sigma - \tau). \tag{22}$$

Тем самым явно задана функция $p = p(\tau)$, являющаяся многочленом от τ. Отсюда следует, что функция $p(\tau)$ бесконечно непрерывно дифференцируема при всех τ. Поведение функции $p(\tau)$ на $[0,\sigma]$ характеризуется леммой 7 и её следствием.

Лемма 7. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T,F)$. Пусть ω и σ являются решением системы* (20) *с наименьшим значением $|\omega|$. Пусть функция $p(\tau)$ задана соотношением* (22). *Тогда при любом $\tau \in (0,\sigma)$ выполняется неравенство $\dfrac{d}{d\tau}p(\tau) > 0$.*

Доказательство. Дифференцируя функцию $p(\tau)$, имеем

$$\frac{d}{d\tau}p(\tau) = 1 - \omega A'_T(\tau, \sigma - \tau) + \omega A'_F(\tau, \sigma - \tau).$$

Оценим сверху величину $A'_T(\tau, \sigma - \tau) - A'_F(\tau, \sigma - \tau)$ для произвольного $\tau \in (0,\sigma)$:

$$\omega(A'_T(\tau, \sigma - \tau) - A'_F(\tau, \sigma - \tau)) \leqslant \omega A'_T(\tau, \sigma - \tau),$$

причём равенство возможно тогда и только тогда, когда $A'_F(\tau, \sigma - \tau) = 0$. С учётом явного вида характеристического многочлена имеем

$$\omega A'_T(\tau, \sigma - \tau) = \omega \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{k} a_{ki} i \tau^{i-1} (\sigma - \tau)^{k-i}.$$

Из определения коэффициентов a_{ki} следует, что для них выполнены неравенства $a_{ki} \leqslant |B_k|\binom{k}{i}$ при всех i и k. Используя эти неравенства, а также тот факт, что $\tau > 0$ и $\sigma - \tau > 0$, имеем

$$\begin{aligned}\omega A'_T(\tau, \sigma - \tau) &\leqslant \omega \sum_{k=1}^{r} |B_k| \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} i\tau^{i-1}(\sigma - \tau)^{k-i} \\ &= \omega \sum_{k=1}^{r} |B_k| \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \frac{k}{i} i\tau^{i-1}(\sigma - \tau)^{k-1-(i-1)} \\ &= \omega \sum_{k=1}^{r} |B_k| k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \tau^{i}(\sigma - \tau)^{k-1-i}. \qquad (23)\end{aligned}$$

С учётом биномиального разложения последнее выражение приводится к виду $\omega \sum\limits_{k=1}^{r} |B_k| k\sigma^{k-1}$, что совпадает с величиной $\omega B'(\sigma)$, которая согласно системе уравнений (20) равна 1. Таким образом

$$\omega(A'_T(\tau, \sigma - \tau) - A'_F(\tau, \sigma - \tau)) \leqslant 1, \qquad (24)$$

причём равенство в (24) возможно только в случае, если все неравенства в (23) обращаются в равенства.

По условию $\tau \in (0, \sigma)$. Поэтому неравенство (24) обращается в равенство, если

$$a_{ki} = |B_k| \binom{k}{i} \text{ при } k = 1, \ldots, r \text{ и } i = 1, \ldots, k, \qquad (25)$$

$$A'_F(\tau, \sigma - \tau) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki}(k - i)\tau^{i}(\sigma - \tau)^{k-i-1} = 0. \qquad (26)$$

Из (26) в силу положительности τ и $\sigma - \tau$ получаем, что $a_{ki} = 0$ для всех $k = 1, \ldots, r$ и $i = 0, \ldots, k-1$. В частности, $a_{k1} = 0$ при любом $k > 1$. Поэтому из (25) вытекает, что $\binom{k}{1}|B_k| = a_{k1} = 0$. Следовательно, при $k > 1$ все $|B_k|$ равны 0, т. е. в базисе B содержатся только функции не более одной переменной, что невозможно в силу предположения о порядке базиса. Таким образом, неравенство (24) не может обращаться в равенство при $\tau \in (0, \sigma)$. Из неравенства (24) следует, что

$$\frac{d}{d\tau} p(\tau) = 1 - \omega A'_T(\tau, \sigma - \tau) + \omega A'_F(\tau, \sigma - \tau) > 0.$$

Лемма 7 доказана.

Непосредственно из леммы 7 и непрерывности функции $\dfrac{d}{d\tau} p(\tau)$ вытекает

Следствие 5. *Для базиса, удовлетворяющего условиям леммы 7, имеют место неравенства* $\frac{d}{d\tau}p(\tau)\big|_{\tau=0} \geqslant 0$ *и* $\frac{d}{d\tau}p(\tau)\big|_{\tau=\sigma} \geqslant 0$.

Рассмотрим многочлен $a(\tau, p) = \tau - \omega A(\tau, \sigma - \tau) - p$. При каждом фиксированном значении p величина τ является решением уравнения (21) тогда и только тогда, когда $a(\tau, p) = 0$. Рассмотрим $a(\tau, p)$ как многочлен от τ с параметром p. При этом

$$\frac{\partial}{\partial\tau}a(\tau, p) = \frac{d}{d\tau}p(\tau).$$

Следовательно, на отрезке $\tau \in [0, \sigma]$ при каждом фиксированном p многочлен $a(\tau, p)$ является монотонно неубывающей функцией, причём производная $\frac{\partial}{\partial\tau}a(\tau, p)$ может обращаться в нуль только на границе отрезка. С учётом свойств характеристического и базисного многочленов легко проверить, что $a(0, p) \leqslant -p$ и $a(\sigma, p) \geqslant 1 - p$. Отсюда вытекает

Теорема 7. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T, F)$, и пусть ω и σ являются решением системы* (20) *с наименьшим значением* $|\omega|$. *Тогда для каждого фиксированного* $p \in [0, 1]$ *существует единственное значение* $\tau \in [0, \sigma]$, *удовлетворяющее соотношению* (21).

Таким образом, имеем два взаимно обратных отображения $p(\tau) : [0, \sigma] \to [p(0), p(\sigma)]$ и $\tau(p) : [p(0), p(\sigma)] \to [0, \sigma]$. Непрерывность функции $\tau(p)$ на отрезке $[p(0), p(\sigma)]$ следует из непрерывности функции $p(\tau)$.

Так как $[0, 1] \subseteq [p(0), p(\sigma)]$, то функция $\tau(p)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, из теоремы 4 и леммы 7 следует

Теорема 8. *Пусть B — некоторый базис с базисным многочленом $B(S)$ и характеристическим многочленом $A(T, F)$, и пусть ω и σ являются решением системы* (20) *с наименьшим значением* $|\omega|$. *Пусть $\tau(p)$ есть функция, заданная на отрезке* $[0, 1]$ *соотношением* (21). *Тогда $\tau(p)$ является непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей функцией на интервале* $(0, 1)$ *и*

$$\frac{d}{dp}\tau(p) = \frac{1}{1 - \omega(A'_T(\tau, \sigma - \tau) - A'_F(\tau, \sigma - \tau))}. \tag{27}$$

Доказательство. Непрерывность функции $\tau(p)$ на отрезке $[0, 1]$ установлена выше. Функция $\tau(p)$ задана неявно уравнением $a(\tau, p) = 0$. Применяя к этому уравнению теорему 4 (о неявной функции), получаем дифференцируемость функции $\tau(p)$ и соотношение (27). Так как $\tau'(p) =$

$(p'(\tau))^{-1}$, то в силу леммы 7 функция $\tau(p)$ монотонно возрастает на интервале $(0,1)$. Теорема 8 доказана.

В граничных точках отрезка $[0,1]$ производная функции $\tau(p)$, вообще говоря, может обращаться* в $+\infty$. Непосредственно из теоремы 8 получаем следующие утверждения.

Следствие 6. *Для базиса B, удовлетворяющего условиям теоремы 8, функция $P_1(p)$ на интервале $p \in (0,1)$ представима в виде $P_1(p) = \omega A'_F(\tau(p), \sigma - \tau(p))\frac{d}{d\tau}\tau(p)$.*

Следствие 7. *Для базиса B, удовлетворяющего условиям теоремы 8, функция $\tau(p)$ является бесконечно непрерывно дифференцируемой на интервале $p \in (0,1)$.*

Из двух последних следствий непосредственно вытекает следующая

Теорема 9. *Для любого базиса B функция $P_1(p)$ является бесконечно непрерывно дифференцируемой на интервале $p \in (0,1)$.*

4.2. Определённость $P_1(p)$ в граничных точках

Прежде всего отметим, что в граничных точках отрезка $[0,1]$ для нахождения значений $P_1(p)$ нельзя воспользоваться непосредственно теоремой 3, так как в граничных точках может нарушаться условие апериодичности системы уравнений (11), связывающей производящие функции $T(z)$ и $F(z)$. Для точки $p = 0$ апериодичность системы зависит от наличия в базисе функций, сохраняющих нуль, а для точки $p = 1$ — от наличия в базисе функций, сохраняющих единицу. Напомним, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей нуль* (*сохраняющей единицу*), если $g(0, \ldots, 0) = 0$ $(g(1, \ldots, 1) = 1)$.

Рассмотрим подробно возможные варианты поведения функции $P_1(p)$ в точке $p = 0$. Утверждения, касающиеся поведения функции $P_1(p)$ в точке $p = 1$, будут получены из соображений двойственности. Для произвольного базиса B возможны следующие случаи:

1. Все функции из базиса B сохраняют нуль;

2. В базисе B найдётся как функция сохраняющая нуль, так и функция, не сохраняющая нуль;

3. Все функции из базиса B не сохраняют нуль.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Базисы, состоящие только из функций, сохраняющих нуль, полностью характеризуются следующей леммой.

---

*Например, для базиса, состоящего из одной функции $\oplus$ — суммы по модулю 2, $\tau'(0) = +\infty$.

Лемма 8. *Пусть B — базис, в котором все функции сохраняют нуль. Тогда значение $P_1(0)$ определено и $P_1(0) = 0$.*

Перейдём к рассмотрению второго случая.

Лемма 9. *Пусть базис B содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую нуль, и хотя бы одну функцию, сохраняющую нуль. Пусть $p = 0$. Тогда при $n > 0$ выполняются неравенства $t_n \neq 0$ и $f_n \neq 0$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ неравенства $t_1 > 0$ и $f_1 > 0$ вытекают непосредственно из условия леммы. Базис индукции установлен.

Опишем шаг индукции. Пусть утверждение выполнено при $n = k-1$. Покажем, что оно выполнено при $n = k$. Согласно индуктивному предположению $f_{k-1} \neq 0$. Поэтому найдётся выражение Φ сложности $k-1$ со значением 0. По условию леммы в базисе B найдётся функция g_0, сохраняющая нуль. Рассмотрим выражение $g_0(\Phi, 0, \ldots, 0)$; оно имеет сложность k и значение 0. Следовательно, $f_k > 0$.

В базисе B также найдётся функция g_1, не сохраняющая нуль. Тогда выражение $g_1(\Phi, 0, \ldots, 0)$ имеет сложность k и значение 1. Следовательно, $t_k > 0$. Шаг индукции выполнен. Лемма 9 доказана.

Итак, в случае, когда в базисе присутствуют как функции, сохраняющие нуль, так и функции, не сохраняющие нуль, при $p = 0$ система уравнений для T и F обладает свойством апериодичности. В базисе есть как функции, сохраняющие, так и функции, не сохраняющие нуль. Поэтому базис B не может состоять только из конъюнкций и тождественных нулей. Если базис состоит не только из дизъюнкций и тождественно единичных функций, то система уравнений для T и F является несводимой. Тогда к базису B в точке $p = 0$ применима теорема 3 и $P_1(0)$ вычисляется по формуле (19). В случае базиса, состоящего только из дизъюнкций и тождественно единичных функций, формула (19) проверяется непосредственно.

Перейдём к рассмотрению третьего случая. Пусть все функции из базиса B на нулевом наборе равны единице. Далее будем говорить об апериодичности последовательностей $\{t_n\}$ и $\{f_n\}$, подразумевая апериодичность их производящих функций T и F. Докажем следующие леммы, касающиеся свойств последовательностей $\{t_n\}$ и $\{f_n\}$.

Прежде всего отметим, что если в последовательности есть два последовательных ненулевых члена и еще хотя бы один ненулевой член, то последовательность является апериодичной в силу леммы 3.

Лемма 10. *Пусть все функции из B не сохраняют нуль и в последо-*

вательности $\{f_n\}$ есть по крайней мере два последовательных отличных от нуля члена f_k, f_{k+1}. Тогда в последовательности $\{t_n\}$ также найдутся два последовательных отличных от нуля члена.

Доказательство. Так как $f_k \neq 0, f_{k+1} \neq 0$, то найдутся выражения Φ_k и Φ_{k+1} со значением 0, сложности k и $k+1$ соответственно. Пусть g есть некоторая функция базиса B. На нулевом наборе функция g равна 1. Выражения $g(\Phi_k, 0, \ldots, 0)$ и $g(\Phi_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ имеют значение 1 и сложности $k+1$ и $k+2$ соответственно. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть все функции из B не сохраняют нуль и хотя бы одна из них отлична от тождественно единичной функции. Пусть в последовательности $\{t_n\}$ есть по крайней мере два последовательных отличных от нуля члена t_k, t_{k+1}. Тогда в последовательности $\{f_n\}$ также найдутся два последовательных отличных от нуля члена.*

Доказательство. Так как $t_k \neq 0, t_{k+1} \neq 0$, то найдутся выражения Φ_k и Φ_{k+1} со значением 1, сложности k и $k+1$ соответственно. Пусть g — функция базиса B, отличная от тождественно единичной функции. Тогда найдётся набор значений её переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ такой, что $g(\tilde{\alpha}) = 0$. При этом* $\tilde{\alpha} \neq \tilde{0}$, так как все функции из B не сохраняют нуль. Следовательно, среди компонент набора $\tilde{\alpha}$ найдётся $\alpha_i = 1$.

Заметим, что в базисе B можно получить как выражения со значением 0, так и выражения со значением 1: выражение 0 (нулевой сложности) имеет значение 0, а выражение $g(\tilde{0})$ имеет значение 1. Используя это свойство, для компонент α_l с номерами, отличными от i, подберём выражения Ψ_l со значениями, равными α_l.

Рассмотрим выражения

$$g(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{i-1}, \Phi_k, \Psi_{i+1}, \ldots) \text{ и } g(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{i-1}, \Phi_{k+1}, \Psi_{i+1}, \ldots).$$

Оба выражения имеют значение 0, а их сложности различаются на единицу. Отсюда следует, что в последовательности $\{f_n\}$ есть два ненулевых подряд расположенных элемента. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть все функции базиса B не сохраняют нуль и хотя бы одна из них отлична от тождественно единичной функции. Тогда в каждой из последовательностей $\{t_n\}$ и $\{f_n\}$ имеется бесконечно много ненулевых членов.*

Доказательство. Все функции в базисе B не сохраняют нуль, поэтому существует выражение Φ_1 со значением 1. Кроме того, по условию

*Через $\tilde{0}$ обозначается набор, все компоненты которого нулевые.

леммы в базисе B есть функция, отличная от тождественной единицы, а следовательно, имеется выражение Φ_0 со значением 0 и сложностью, отличной от нуля.

Выражение Φ_0 содержит хотя бы одну константу 0. Подставим вместо неё выражение Φ_0, в результате чего получим новое выражение со значением 0 большей сложности. Выполняя такую подстановку многократно, получим выражения со значением 0 сколь угодно большой сложности.

Аналогично, подставляя выражение Φ_0 вместо константы 0 в выражении Φ_1, получаем выражения со значением 1 сколь угодно большой сложности. Лемма 12 доказана.

Из лемм 10–12 следует, что достаточным условием апериодичности последовательностей $\{t_n\}$ и $\{f_n\}$ в случае базиса, содержащего хотя бы одну функцию, неравную тождественной единице, является наличие хотя бы в одной из последовательностей двух подряд расположенных ненулевых членов. Это условие можно сформулировать в терминах свойств базиса B.

Соседними называем двоичные наборы одинаковой длины, которые различаются в одной компоненте.

Лемма 13. *Пусть базис B, все функции которого не сохраняют нуль, содержит функцию, отличную от тождественной единицы, а также функцию g, значения которой на каких-нибудь двух соседних наборах совпадают. Тогда последовательности $\{t_n\}$ и $\{f_n\}$ апериодичны.*

Доказательство. Пусть наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}'$ — соседние наборы, различающиеся в i-й компоненте и $g(\tilde{\alpha}) = g(\tilde{\alpha}')$. Для номеров j, отличных от i, выберем какие-нибудь выражения Ψ_j со значениями α_j.

Заметим, что выражения 0 и $g(\tilde{0})$ имеют значения 0 и 1 и сложности 0 и 1 соответственно. Рассмотрим выражения

$$g(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{i-1}, 0, \Psi_{i+1}, \ldots) \text{ и } g(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{i-1}, g(\tilde{0}), \Psi_{i+1}, \ldots).$$

Их значения равны $g(\tilde{\alpha})$ и $g(\tilde{\alpha}')$, и, следовательно, равны между собой. Сложности этих выражений различаются на единицу. Следовательно, хотя бы одна из последовательностей ($\{t_n\}$ или $\{f_n\}$, в зависимости от значения $g(\tilde{\alpha})$) апериодична, а следовательно, в силу лемм 10, 11 апериодичны обе последовательности. Лемма 13 доказана.

Из леммы 13 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 14. *Пусть базис B, все функции которого не сохраняют нуль, содержит функцию, отличную от тождественной единицы, и хотя бы одна из последовательностей $\{t_n\}$ или $\{f_n\}$ периодична. Тогда у каждой* *функции из B значения на любых двух соседних наборах различаются.*

Таким образом, если в базисе, состоящем из функций, не сохраняющих нуль, есть функция, отличная от тождественной единицы, и хотя бы одна из последовательностей $\{t_n\}$ или $\{f_n\}$ периодична, то все функции из B являются симметрическими* и на любых двух соседних наборах принимают различные значения. Кроме того, все функции из B на нулевом наборе принимают значение 1. Легко проверить, что любая функция g из B_k, имеет вид

$$g = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k \oplus 1, \tag{28}$$

т. е. g является не сохраняющей нуль симметрической линейной функцией.

Если базис состоит только из тождественных единиц, то, очевидно $P_1(0) = 1$. Отметим, что в этом случае для $P_1(0)$ справедливо равенство (19).

Для других базисов, состоящих из функций, не сохраняющих нуль и содержащих хотя бы одну функцию, отличную от линейной симметрической функции, выполнены условия апериодичности и несводимости. Поэтому к ним применима теорема 3, а следовательно, значение $P_1(0)$ определено и вычисляется по формуле (19).

Рассмотрим базис, состоящий только из функций вида (28). Покажем, что в этом случае при $p = 0$ предел отношения t_n/s_n не существует.

Теорема 10. *Пусть для заданного базиса B при любом k каждая функция $g \in B_k$ имеет вид $g = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_k \oplus 1$. Тогда $t_n/s_n \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)$.*

Доказательство. Покажем, что $\Phi \equiv |\Phi| (\mathrm{mod}\, 2)$ для любого выражения Φ, составленного из функций базиса B и констант 0.

Докажем утверждение индукцией по величине сложности n. При $n = 0$ утверждение выполнено. Пусть утверждение верно для выражений сложности $n < k$. Покажем, что оно верно и для выражений сложности $n = k$. Пусть $\Phi = g(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ есть некоторое выражение сложности k. По условию теоремы значение выражения Φ равно $\Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_m \oplus 1$. Согласно предположению индукции для каждого выражения Φ_l его значение сравнимо с $|\Phi_l| (\mathrm{mod}\, 2)$. Таким образом, значение Φ сравнимо с $(|\Phi_1| + \ldots + |\Phi_m| + 1) (\mathrm{mod}\, 2) \equiv |\Phi| (\mathrm{mod}\, 2)$.

Из доказанного утверждения, связывающего значения выражений с

* *Симметрическими* называются функции, значения которых сохраняются при любой перестановке переменных.

их сложностью, непосредственно следует, что $t_n = s_n$ при нечётных n и $t_n = 0$ при чётных n. Теорема 10 доказана.

Таким образом, для базисов, состоящих из линейных функций, существенно зависящих от всех переменных и не сохраняющих нуль, значение $P_1(0)$ не определено.

Полученные для точки $p = 0$ результаты с использованием соображений двойственности переносятся на случай $p = 1$. Оформим совокупность утверждений относительно значений $P_1(p)$ в граничных точках в виде теоремы.

Теорема 11. *Пусть задан базис B. Значение $P_1(0)$ ($P_1(1)$) определено тогда и только тогда, когда в базисе B найдётся функция, отличная от линейной, существенно зависящей от всех переменных, не сохраняющей нуль (не сохраняющей единицу) функции. Если в B найдётся функция, не сохраняющая нуль (не сохраняющая единицу), то значение $P_1(0)$ ($P_1(1)$) вычисляется по формуле* (19), *в противном случае $P_1(0) = 0$ ($P_1(1) = 1$).*

4.3. Непрерывность $P_1(p)$ в граничных точках

Согласно теореме 9 функция $P_1(p)$ является непрерывной на интервале $p \in (0, 1)$. Однако, непрерывность функции может нарушаться в граничных точках $p = 0$ и $p = 1$. Случаи, когда функция $P_1(p)$ не определена в одной из граничных точек рассмотрены ранее. Далее под разрывом функции $P_1(p)$ понимается ситуация, когда $P_1(p_0)$ определена и $\lim\limits_{\substack{p \to p_0 \\ p \in (0,1)}} P_1(p) \neq P_1(p_0)$, т. е. $P_1(p)$ имеет в точке p_0 разрыв первого рода.

Рассмотрим подробно случай наличия разрыва в точке $p = 0$, а условия наличия разрыва в точке $p = 1$ получим из соображений двойственности.

Пусть функция $P_1(p)$ определена в точке $p = 0$. Согласно теореме 11 значение $P_1(p)$ в точке $p = 0$ либо равно нулю, либо вычисляется по формуле (19). В первом случае наличие разрыва у функции $P_1(p)$ в точке $p = 0$ соответствует тому, что $\lim\limits_{p \to 0^+} P_1(p) \neq 0$. Во втором случае наличие разрыва $P_1(p)$ является следствием наличия разрыва у функций $\tau(p)$ или $\hat{P}(\tau)$. Так как функция $\tau(p)$ является непрерывной при $p \in [0, 1]$, то причиной возникновения разрыва может быть только наличие разрыва у дробно-рациональной функции $\hat{P}(\tau)$, т. е. обращение в нуль знаменателя дроби, выражающей $\hat{P}(\tau)$.

Прежде всего покажем, что из обращения в нуль знаменателя дроби, выражающей $\hat{P}(\tau)$, следует, что все функции из B сохраняют нуль.

Пусть знаменатель дробно-рациональной функции $\hat{P}(\tau)$ обращается в нуль. Согласно следствию 6 знаменатель функции $\hat{P}(\tau)$ равен $\frac{\omega^{-1}}{\tau'(p)} = \omega^{-1}p'(\tau)$. Из леммы 7 и следствия 5 получаем, что равенство $p'(\tau) = 0$ возможно только в точках $\tau = 0$ и $\tau = \sigma$. В силу монотонного возрастания функции $\tau(p)$ равенство $\tau(0) = \sigma$ невозможно. Следовательно, $\tau = 0$. Поскольку $\tau \geqslant \omega a_{00}$, получаем, что $a_{00} = 0$, т. е. в базисе нет функций от нуля переменных, равных 1. Из явного вида $p'(\tau)$ следует, что для обращения $p'(0)$ в нуль, необходимо, чтобы обращались в нуль величины $\omega^{-1} - A'_T(0,\sigma)$ и $A'_F(0,\sigma)$. Равенство $A'_F(0,\sigma) = 0$ влечет $a_{k0} = 0$ при любом $k = 1,\ldots,r$. Таким образом, все функции из базиса B сохраняют нуль.

Следовательно, сохранение нуля всеми функциями из базиса B есть *необходимое* условие наличия разрыва в точке $p = 0$.

Покажем теперь, что сохранение нуля всеми функциями из B и наличие разрыва в точке $p = 0$ влечёт обращение в нуль знаменателя дроби, выражающей $\hat{P}(\tau)$.

Пусть все функции из B сохраняют нуль. Тогда $\tau(0) = 0$ и числитель $P_1(p)$ стремится к нулю при $p \to 0^+$ (в силу непрерывности $\tau(p)$). Разрыв в точке $p = 0$ возможен тогда и только тогда, когда знаменатель $P_1(p)$ также стремится к нулю при $p \to 0^+$. Следовательно, обращение в нуль знаменателя $\hat{P}(\tau)$ в точке $\tau = 0$ также является *необходимым* условием наличия разрыва в точке $p = 0$.

Обращение в нуль знаменателя $\hat{P}(\tau)$ в точке $\tau = 0$ влечёт, в частности, равенство $\omega^{-1} - A'_T(0,\sigma) = 0$. Из определения характеристического многочлена следует, что $A'_T(0,\sigma) = \sum\limits_{k=1}^{r} a_{k1}\sigma^{k-1}$. Из уравнений (20) вытекает равенство $\omega^{-1} = B'(\sigma)$, преобразуемое к виду

$$\omega^{-1} = \sum_{k=1}^{r} k|B_k|\sigma^{k-1}. \tag{29}$$

Наконец, для коэффициентов a_{k1} при всех k выполнены неравенства $a_{k1} \leqslant \binom{k}{1}|B_k| = k|B_k|$. Следовательно, соотношение $\omega^{-1} - A'_T(0,\sigma) = 0$ влечёт равенства $a_{k1} = k|B_k|$ для всех $k = 0,\ldots,r$.

Таким образом, необходимые условия разрыва в точке $p = 0$ имеют вид:

$$a_{k0} = 0, \quad a_{k1} = k|B_k| \text{ для всех } k = 0,\ldots,r. \tag{30}$$

Докажем *достаточность* этих условий.

Пусть для базиса B выполнены равенства $a_{k0} = 0$, $a_{k1} = k|B_k|$ при всех $k = 0, \dots, r$. Тогда $P_1(0) = 0$, так как все функции из B сохраняют нуль. Покажем, что $\lim\limits_{p\to 0^+} P_1(p) \neq 0$. Прежде всего заметим, что $\lim\limits_{p\to 0^+} P_1(p) = \lim\limits_{\tau\to 0^+} \hat{P}(\tau)$. Рассмотрим функцию $\hat{P}(\tau)$. Согласно теореме 6 и следствию 4 имеем

$$\hat{P}(\tau) = \frac{A'_F(\tau, \sigma - \tau)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma - \tau) + A'_F(\tau, \sigma - \tau)}.$$

С учётом равенств (30) многочлен $A(T, F)$ записывается в виде (здесь и далее полагаем $a_{ki} = 0$ при $i > k$):

$$A(T, F) = \sum_{k=1}^{r} \Big(k|B_k| T F^{k-1} + a_{k2} T^2 F^{k-2} \Big) + T^3 \tilde{A}(T, F),$$

где $\tilde{A}(T, F)$ — некоторый многочлен. Тогда для частных производных многочлена $A(T, F)$ имеем следующие равенства:

$$A'_F(T, F) = \sum_{k=1}^{r} \Big(k(k-1)|B_k| T F^{k-2} + (k-2) a_{k2} T^2 F^{k-3} \Big) + T^3 \tilde{A}'_F(T, F),$$

$$A'_T(T, F) = \sum_{k=1}^{r} \Big(k|B_k| F^{k-1} + 2a_{k2} T F^{k-2} \Big) + 3T^2 \tilde{A}(T, F) + T^3 \tilde{A}'_T(T, F).$$

Кроме того, $\omega^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{r} k|B_k|\sigma^{k-1}$. При $\tau \to 0^+$ выполняется соотношение $A'_F(\tau, \sigma - \tau) = \tau \left(\sum\limits_{k=2}^{r} k(k-1)|B_k|\sigma^{k-2} + o(\tau) \right)$. Рассмотрим знаменатель в выражении функции $\hat{P}(\tau)$:

$$\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma - \tau) + A'_F(\tau, \sigma - \tau) = \omega^{-1} - \sum_{k=1}^{r} k|B_k|(\sigma - \tau)^{k-1}$$
$$- \tau \sum_{k=2}^{r} 2a_{k2}\sigma^{k-2} + o(\tau^2) + \tau \left(\sum_{k=2}^{r} k(k-1)|B_k|\sigma^{k-2} + o(\tau) \right).$$

Представим $(\sigma - \tau)^{k-1}$ в виде $\sigma^{k-1} - (k-1)\sigma^{k-2}\tau + o(\tau^2)$. Тогда с учётом равенства (29) для ω^{-1} получаем, что знаменатель функции $\hat{P}(\tau)$ имеет вид

$$\tau \left(\sum_{k=2}^{r} \left(2k(k-1)|B_k| - 2a_{k2} \right) \sigma^{k-2} + o(\tau) \right).$$

Сокращая τ в числителе и знаменателе функции $\hat{P}(\tau)$, получаем равенство

$$\lim_{\tau\to 0^+} \hat{P}(\tau) = \frac{\sum\limits_{k=2}^{r} k(k-1)|B_k|\sigma^{k-2}}{\sum\limits_{k=2}^{r} \left(2k(k-1)|B_k| - 2a_{k2}\right)\sigma^{k-2}}.$$

Значение этого предела отлично от нуля (более того, $\lim\limits_{\tau\to 0^+} \hat{P}(\tau) \geqslant 1/2$), а значит, функция $P_1(p)$ имеет разрыв в точке $p = 0$. Следовательно, условия (30) являются достаточными.

Рассмотрим теперь условия наличия разрыва у функции $P_1(p)$ в точке $p = 1$. Функция вероятности $P_1(p)$ базиса B имеет разрыв в точке $p = 1$ тогда и только тогда, когда функция вероятности $P_1^*(p)$ двойственного базиса B^* имеет разрыв в точке $p = 0$. Как отмечалось ранее, характеристические многочлены двойственных базисов связаны соотношением $A^*(T, F) = B(T + F) - A(F, T)$. Применив условия (30) к характеристическому многочлену $A^*(T, F)$, получаем, что $P_1(p)$ имеет разрыв в точке $p = 1$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_{k\,k-1} = 0$, $a_{kk} = |B_k|$ при всех $k = 0, \dots, r$.

Сформулируем условия разрыва в граничных точках в виде теоремы.

Теорема 12. *Пусть B — базис с базисным и характеристическим многочленами $B(S) = \sum\limits_{k=0}^{r} |B_k| S^k$ и $A(T, F) = \sum\limits_{k=0}^{r}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ki} T^i F^{k-i}$ соответственно. Функция $P_1(p)$ имеет разрыв в точке $p = 0$ ($p = 1$) тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_{k0} = 0$, $a_{k1} = k|B_k|$ ($a_{k\,k-1} = 0$, $a_{kk} = |B_k|$) при каждом $k = 0, \dots, r$.*

Содержательно, выполнение равенств $a_{k0} = 0$, $a_{k1} = k|B_k|$ при каждом $k = 0, \dots, r$, входящие в условие теоремы 12, означает, что все функции из базиса B сохраняют нуль и равны единице на всех наборах веса 1. Аналогично, выполнение равенств $a_{k\,k-1} = 0$, $a_{kk} = |B_k|$ при каждом $k = 0, \dots, r$ означает, что все функции из базиса B сохраняют единицу и равны нулю на наборах, содержащих ровно одну нулевую компоненту.

5. Функции вероятности базисов первого порядка

Рассмотрим отдельно случай базисов с $r = 1$. Пусть $B = B_1$ (случай $B = B_0 \cup B_1$ не имеет существенных отличий, но делает вычисления более громоздкими). Теорема 6 в этом случае неприменима, так как производящие функции T и F связаны линейной системой уравнений, что нарушает условие нелинейности. Однако, величины $P_{1,n}(p)$ и $P_1(p)$ в данном случае могут быть получены непосредственно.

Производящие функции T и S удовлетворяют уравнениям

$$S = 1 + z|B_1|S, \quad T = p + z(a_{10}(S - T) + a_{11}T).$$

Эти уравнения разрешаются явным образом

$$S = \frac{1}{1 - |B_1|z}, \quad T = \frac{p - (p|B_1| - a_{10})z}{1 - (a_{11} - a_{10})z}.$$

Коэффициенты s_n и t_n также выражаются явно

$$\begin{aligned} s_n =& |B_1|^n, \\ t_n =& \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}} |B_1|^n + \left(p - \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}}\right) (a_{11} - a_{10})^n. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $p \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$P_{1,n}(p) = \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}} + \left(p - \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}}\right) \left(\frac{a_{11} - a_{10}}{|B_1|}\right)^n.$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}(p)$. Заметим, что $\left|\frac{a_{11}-a_{10}}{|B_1|}\right| \leqslant 1$. Если неравенство строгое, то при $n \to \infty$ слагаемое

$$\left(p - \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}}\right) \left(\frac{a_{11} - a_{10}}{|B_1|}\right)^n$$

в пределе обратится в нуль. Поэтому

$$P_1(p) = \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}},$$

что формально совпадает с выражением для $P_1(p)$ из теоремы 6 (с учётом того, что $\omega^{-1} = B'(\sigma)$).

Максимум $\left|\dfrac{a_{11} - a_{10}}{|B_1|}\right|$ достигается на базисах, состоящих только из тождественных функций, или только из отрицаний. Выражение $\dfrac{a_{11} - a_{10}}{|B_1|}$ в первом случае равно 1, а во втором случае равно -1. В первом случае $P_1(p) = p$, а во втором $P_1(p)$ не определено при $p \neq 1/2$, так как величины $P_{1,n}(p)$ равны p или $1 - p$ в зависимости от чётности или нечётности n, а $P_1(1/2) = 1/2$. Итак, доказана

Теорема 13. *Пусть B — базис, состоящий только из функций одной переменной (т. е. $B = B_1$), с характеристическим многочленом $A(T,F) = a_{10}F + a_{11}T$. Пусть в базисе B есть функция, отличная от тождественной, а также функция, отличная от отрицания. Тогда функция вероятности $P_1(p)$ базиса B определена при каждом $p \in [0,1]$ и*

$$P_1(p) = \frac{a_{10}}{|B_1| - a_{11} + a_{10}}.$$

Если базис B содержит только тождественные функции, то $P_1(p) = p$ при каждом $p \in [0,1]$. Если же B содержит только функции отрицания, то $P_1(1/2) = 1/2$, а при любом $p \neq 1/2$ функция $P_1(p)$ не определена.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю О. М. Касим-Заде за постановку задачи и полезные советы на протяжении всего исследования, а также Р. М. Колпакову за сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гросс М., Лантен А.** Теория формальных грамматик. М.: Мир, 1971.
2. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
3. **Евграфов М. А.** Аналитические функции. М.: Наука, 1968.
4. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Высш. школа, 2001.
5. **Chauvin B., Flajolet Ph., Gardy D., Gittenberger B.** And/or trees revisited // Combinatorics, Probability and Computing. 2004. V. 13, N 4–5. P. 475–497.
6. **Chomsky N., Schutzenberger M. P.** The algebraic theory of context-free languages // Computer Programming and Formal Systems. Amsterdam: North-Holland, 1963. P. 118–161. [Русский перевод: **Хомский Н., Шютценберже М. П.** Алгебраическая теория контекстно-свободных языков // Кибернетический сборник (н.с.). Вып. 3. М.: Мир, 1966. С. 195–242].
7. **Flajolet Ph., Sedgewick R.** Analytic combinatorics: functional equations, rational and algebraic functions // Research Report 4103, INRIA, 2001.
8. **Savický P.** Complexity and probability of some Boolean formulas // Combinatorics, Probability and Computing. 1998. V. 7, N 4. P. 451–463.

9. **Yashunsky A. D.** On the properties of asymptotic probability for random Boolean expression values in binary bases // Third International symposium, SAGA 2005 (Moscow, October 20–22, 2005). Proc. Berlin: Springer, 2005. P. 202–212. (Lecture Notes on Comput. Sci.; V. 3777).

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: yashunsky@comtv.ru

Статья поступила
17 марта 2006 г.