ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2006. Серия 1. Том 13, № 3. 3–12

УДК 519.8

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА НА МАКСИМУМ*)

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Рассматривается задача поиска связного остовного подграфа с заданными степенями вершин максимального суммарного рёберного веса в полном взвешенном неориентированном графе. Для решения задачи представлен полиномиальный приближённый алгоритм. Проведён его анализ и обоснованы гарантированные оценки точности получаемых решений задачи в общем случае, а также в случаях метрической и евклидовой задач.

Введение

Задача коммивояжёра заключается в отыскании гамильтонова цикла экстремального веса во взвешенном графе. Наиболее полные обзоры работ по этой задаче можно найти в [8, 9]. Ранее интенсивно исследовалась задача отыскания гамильтонова цикла минимального веса, которая является одной из основных NP-полных задач. Однако в последнее время всё бóльший интерес уделяется задаче коммивояжёра на максимум. Как известно, для этой задачи в общем виде существует порог неприближаемости в классе полиномиальных алгоритмов (в предположении, что $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$).

В статье исследуется естественное обобщение задачи коммивояжёра на максимум.

В [3] сформулирована задача отыскания графического представления заданного набора натуральных чисел d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant d_i < n$. Задача заключалась в построении неориентированного графа G без петель с n вершинами, степени которых равны числам d_i. Набор чисел $d_1, \dots, d_n$, для которых существует графическое представление, называется *графическим разбиением* числа $m = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$. Очевидно, что такое m чётно и $d_i \leqslant n-1$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Однако эти условия не

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395) и INTAS (грант 04–77–7173).

являются достаточными для существования указанного представления. Например, набор $D = (3,3,3,1)$ не является графическим разбиением. Конструктивный критерий существования графического разбиения для набора натуральных чисел может быть получен из следующего утверждения.

Теорема 1 [7]. *Разбиение $D = (d_1, \ldots, d_p)$ чётного числа на p частей, $p > d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_p$, является графическим тогда и только тогда, когда графическим является модифицированное разбиение $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_p)$.*

Это утверждение даёт полиномиальный алгоритм проверки представимости графического разбиения.

Оптимизационный вариант задачи поиска графического представления набора натуральных чисел впервые был упомянут в [4].

Задан полный n-вершинный неориентированный граф $G(V,E)$ без петель. На рёбрах графа определена весовая функция $w : E \to R^+$, а для вершин графа заданы такие натуральные числа d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 < d_i < n$, что набор $(d_1, \ldots, d_n)$ является графическим разбиением суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$. В графе $G(V,E)$ требуется найти связный подграф с максимальным суммарным весом рёбер и заданными степенями вершин d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 < d_i < n$. Эта задача изучалась в [6] и обозначалась как CSDP (Connected subgraph with given vertex degrees). Задача коммивояжёра на максимум совпадает с CSDP, если степени всех вершин искомого подграфа равны 2.

Суммарный вес рёбер оптимального решения задачи для графа G обозначим через $W^*(G)$. Суммарный вес рёбер решения, полученного с применением алгоритма A для графа G, обозначим через $W_A(G)$. Величину $\Delta_A = \min\limits_G \dfrac{W_A(G)}{W^*(G)}$, зависящую от алгоритма A и заданного набора степеней вершин искомого подграфа, (в случае её существования) называют *оценкой точности* алгоритма A.

Задача CSDP называется *метрической*, если веса рёбер исходного графа удовлетворяют неравенству треугольника.

Задача CSDP называется *евклидовой*, если вершинам исходного графа задачи поставлены в соответствие точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, и вес любого ребра равен расстоянию между концевыми точками этого ребра.

Полиномиальный алгоритм приближённого решения метрической задачи CSDP был предложен в [6]. Этот алгоритм применим только для

случая чётных значений d_i. Оценка точности алгоритма не меньше величины $(1 - \dfrac{1}{d(d+1)})$, где $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$. В настоящей статье описывается новый алгоритм приближённого решения CSDP, работающий произвольных числах d_i. Проводится его анализ для разных классов исходной задачи с детерминированными входами и обосновываются гарантированные оценки точности получаемых решений в общем случае, а также в случаях метрической и евклидовой задач.

Получены следующие оценки точности алгоритма для решения задачи CSDP:

$$\Delta_A \geqslant \begin{cases} 1 - \frac{1}{d(d+1)} & \text{в общем случае,} \\ 1 - \frac{1}{d(d+1)} & \text{в случае метрической задачи,} \\ 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{d(d+1)} & \text{в случае евклидовой задачи.} \end{cases}$$

Здесь $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$.

Кроме того, алгоритм, предложенный для нахождения подграфа с вершинами произвольной чётности, является алгоритмом приближённого решения задачи коммивояжёра на максимум с гарантированной оценкой точности $2/3$. При решении этой задачи его времен́ая сложность равна $O(n^3)$. При этом для метрической задачи коммивояжёра на максимум алгоритм даёт приближённое решение с гарантированной оценкой точности $5/6$. Такой же гарантированной оценкой точности для метрической задачи коммивояжёра на максимум обладает алгоритм Косточки–Сердюкова из [1]. Понятно, что для задачи коммивояжёра с учетом её специфики удаётся получить лучшие оценки точности (см., например, [9, гл. 11]) по сравнению с более общей задачей — задачей CSDP.

1. Алгоритм приближённого решения задачи CSDP

Для решения задачи CSDP для заданного графа G предлагается следующий алгоритм, называемый алгоритмом A.

Шаг 1. С использованием алгоритма Габова из [5] находится такой подграф $G'(V, E')$ графа G с заданными степенями вершин, что суммарный вес рёбер в G' максимален.

Шаг 2. В подграфе G' выделяются компоненты связности $C_1, \ldots, C_\mu$. Если $\mu = 1$, то подграф G' является результатом работы алгоритма A и алгоритм A заканчивает работу.

Шаг 3. В каждой компоненте C_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ выделяется подмножество S_i её рёбер. Подмножество S_i состоит из всех рёбер в C_i, не являю-

щихся перешейками (рёбрами, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности).

Шаг 4. В каждом множестве S_i находится ребро $e_i = u_i v_i$ минимального веса.

Шаг 5. Полагается $p_1 = v_1$, $q_1 = u_1$, $i = 1$.

Шаг 6. Если $w(q_i u_{i+1}) + w(p_i v_{i+1}) \geqslant w(q_i v_{i+1}) + w(p_i u_{i+1})$, то полагается $q_{i+1} = v_{i+1}$, $p_{i+1} = u_{i+1}$. В противном случае полагается $q_{i+1} = u_{i+1}$ и $p_{i+1} = v_{i+1}$.

Шаг 7. Полагается $i = i + 1$. Если $i < \mu$, то выполняется шаг 6. В противном случае выполняется шаг 8.

Шаг 8. Если $w(q_i u_1) + w(p_i v_1) \geqslant w(q_i v_1) + w(p_i u_1)$, то полагается $q_{\mu+1} = v_1$ и $p_{\mu+1} = u_1$. В противном случае полагается $q_{\mu+1} = u_1$ и $p_{\mu+1} = v_{i+1}$.

Шаг 9. Рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ удаляются из G', формируется подграф $G''(V, E'')$, где $E'' = E' \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_\mu\}$.

Шаг 10. Формируется подграф $H(V, \widetilde{E})$, где

$$\widetilde{E} = \begin{cases} E'' \cup \{q_1 p_2,\ q_2 p_3,\ \ldots,\ q_\mu p_{\mu+1}\}, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{\mu} w(q_i p_{i+1}) > \sum\limits_{i=1}^{\mu} w(p_i q_{i+1}), \\ E'' \cup \{p_1 q_2,\ p_2 q_3,\ \ldots,\ p_\mu q_{\mu+1}\}, \text{ если } \sum\limits_{i=1}^{\mu} w(q_i p_{i+1}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\mu} w(p_i q_{i+1}). \end{cases}$$

Остовный связный подграф H графа G является результатом работы алгоритма A. Алгоритм A заканчивает свою работу.

Описание алгоритма закончено. На рис. 1 изображена структура полученного связного остовного подграфа H.

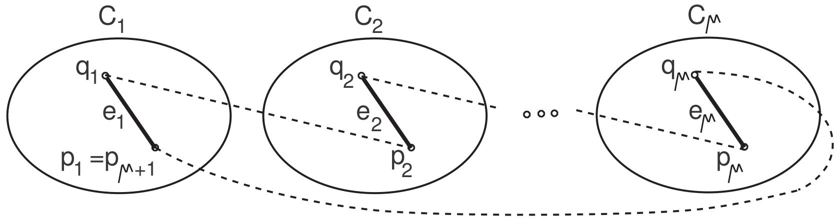

Рис. 1. Структура остовного связного подграфа H

2. Анализ алгоритма A

Алгоритм решения оптимизационной задачи назовём *корректным,* если для любых исходных данных он заканчивает работу за конечное число шагов и находит допустимое решение.

Лемма 1. *Алгоритм A корректен.*

Доказательство. Алгоритм A конечен, так как единственный цикл этого алгоритма (шаги 6–7) повторяется ровно $\mu - 1$ раз, а $\mu \leqslant n/2$. На шаге 9 набор рёбер удаляется из G', что понижает степень двух вершин каждой компоненты связности на 1. На шаге 10 набор рёбер добавляется в G'', что повышает степени тех же вершин на 1. Следовательно, степени всех вершин графа H определяются на шаге 1, где они становятся равными входным числам $d_1, \ldots, d_n$. На шаге 10 все компоненты связности графа соединяются. Полученный граф H является остовным и связным. Лемма 1 доказана.

Обозначим через m число рёбер искомого подграфа. Тогда $m = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$.

Лемма 2. *Временна́я сложность алгоритма A равна $O(mn^2)$.*

Доказательство. Построение множеств S_i осуществляется за линейное по количеству рёбер время, т. е. за время $O(n^2)$. Временна́я сложность остальных этапов алгоритма не превышает $O(n)$. Следовательно, временна́я сложность алгоритма A определяется временно́й сложностью алгоритма Габова [5], равной $O(n^2 \sum\limits_{i=1}^{n} d_i)$. Лемма 2 доказана.

Пусть W — суммарный вес рёбер графа G' после выполнения шага 1.

Лемма 3. *Пусть $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$. Тогда* $\sum\limits_{i=1}^{\mu} w(e_i) \leqslant \dfrac{2}{d(d+1)} W.$

Доказательство. В каждой компоненте связности C_i имеется не менее $d+1$ вершины. Поэтому в каждой компоненте имеется не менее $d(d+1)/2$ рёбер.

В случае, если в компоненте связности C_i отсутствуют перешейки, в множестве S_i присутствуют все рёбра компоненты C_i. Поэтому $|S_i| \geqslant d(d+1)/2$.

В случае, когда в компоненте связности C_i содержится хотя бы один перешеек (т. е. C_i не является двусвязной), можно рассмотреть компоненты связности C_{i1}, $C_{i2}, \ldots, C_{ik_i}$, образующиеся при удалении всех перешейков из C_i. Пример строения компоненты C_i с перешейками изображен на рис. 2. Отметим, что среди них найдутся хотя бы две такие компоненты (назовём их K_{i1}, K_{i2}), вершины которых инцидентны лишь одному перешейку, иначе компонента C_i была бы двусвязной. В каждой из этих компонент имеется не менее $d+1$ вершин. Степени всех этих вершин (за исключением, быть может, концевых вершин перешейков) не меньше d. Следовательно, в каждой из компонент K_{i1} и K_{i2} имеется не

менее $d^2/2$ рёбер. Так как $d \geqslant 2$, то общее число рёбер в компонентах K_{i1} и K_{i2} не меньше $d^2 + d - 1$. Эти рёбра не являются перешейками в C_i. Следовательно, $|S_i| \geqslant d(d+1)/2$.

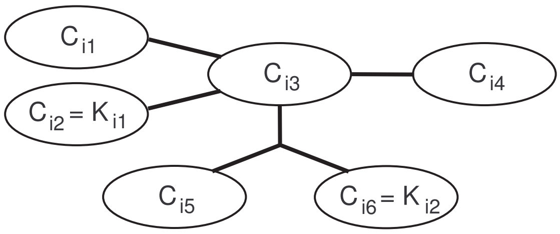

Рис. 2. Пример строения компоненты связности C_i с перешейками

В множестве S_i ребро e_i имеет минимальный вес. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\mu} w(e_i) \leqslant \frac{W}{\min\limits_{i=1,\ldots,\mu} |S_i|} \leqslant \frac{2}{d(d+1)} W.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 2. *Алгоритм A находит точное решение задачи* CSDP, *если*

$$\min_{i=1,\ldots,n} d_i + \max_{i=1,\ldots,n} d_i > n - 2.$$

Доказательство. Пусть $\min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i + \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i > n-2$. Предположим, что $\mu > 1$. Рассмотрим компоненту связности C_i, в которой находится вершина v, имеющая наибольшую степень в графе G'. Тогда в компоненте C_i имеется не менее $\deg_{G'}(v) + 1$ вершин. Здесь и далее через $\deg_G(v)$ обозначается степень вершины v в графе G. Рассмотрим любую компоненту связности $C_j \neq C_i$. Пусть u — произвольная вершина в этой компоненте. Следовательно, в компоненте C_j имеется не менее $\deg_{G'}(u) + 1$ вершин. Общее число вершин в компонентах C_i и C_j не превосходит n. Следовательно, $\deg_{G'}(v) + \deg_{G'}(u) \leqslant n - 2$. Так как $\deg_{G'}(v) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$, получаем противоречие. Значит, $\mu = 1$. Алгоритм заканчивает работу на шаге 2. Найденное решение оптимально в силу того, что оно является точным решением релаксации исходной задачи (отсутствует условие связности искомого подграфа). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Алгоритм A находит приближённое решение задачи*

CSDP *с оценкой точности* $\Delta_A \geqslant 1 - \dfrac{2}{d(d+1)}$, *где* $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$.

Доказательство. Так как G' — оптимальное решение релаксации задачи CSDP (отсутствует требование связности решения), то $W \geqslant W^*(G)$. Поэтому

$$W_A(G) = W - \sum_{i=1}^{\mu} w(e_i) + \max\Big\{ \sum_{i=1}^{\mu} w(q_i p_{i+1}), \sum_{i=1}^{\mu} w(p_i q_{i+1}) \Big\}.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\frac{W_A(G)}{W^*(G)} \geqslant \frac{W_A(G)}{W} \geqslant 1 - \frac{2}{d(d+1)}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. В случае $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 2$ точность алгоритма не меньше 2/3. Тем самым алгоритм A является алгоритмом приближённого решения задачи коммивояжёра на максимум с гарантированной оценкой точности 2/3. При этом его временна́я сложность равна $O(n^3)$.

Теорема 4. *Алгоритм* A *находит приближённое решение метрической задачи* CSDP *с оценкой точности* $\Delta_A \geqslant 1 - \dfrac{1}{d(d+1)}$, *где* $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$.

Доказательство. В силу неравенства треугольника и выбора вершин p_i и q_i для каждого $i = 1, \ldots, \mu - 1$ имеем

$$\begin{aligned} w(e_i) + w(e_{i+1}) &\leqslant 2\Big(w(p_i q_{i+1}) + w(q_i p_{i+1}) \Big), \\ w(e_1) + w(e_\mu) &\leqslant 2\Big(w(p_\mu q_1) + w(q_\mu p_1) \Big). \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{\mu} e_i \leqslant \sum_{i=1}^{\mu} \Big(w(p_i q_{i+1}) + w(q_i p_{i+1}) \Big).$$

Пусть W — суммарный вес рёбер в графе G' после выполнения шага 1. Поскольку G' — оптимальное решение релаксации задачи CSDP, то

$W \geqslant W^*(G)$. Имеем

$$W_A(G) = W - \sum_{i=1}^{\mu} w(e_i) + \max\Big\{\sum_{i=1}^{\mu} w(q_i p_{i+1}), \sum_{i=1}^{\mu} w(p_i q_{i+1})\Big\} \geqslant W - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu} w(e_i).$$

Следовательно,

$$\frac{W_A(G)}{W^*(G)} \geqslant \frac{W_A(G)}{W} \geqslant 1 - \frac{1}{d(d+1)}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. В случае $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 2$ точность получаемого решения не меньше $5/6$. При этом алгоритм A за время $O(n^3)$ находит приближённое решение метрической задачи коммивояжёра на максимум с гарантированной оценкой точности $5/6$. Такую же гарантированную оценку точности для задачи коммивояжёра на максимум даёт алгоритм Косточки–Сердюкова из [1].

Ниже мы воспользуемся следующим фактом из [2].

Лемма 4. *Пусть* $I_j = (x_j, y_j)$, $I_l = (x_l, y_l)$ *— отрезки в* $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}$ *и* $\alpha \leqslant \pi/2$ *— угол между ними. Тогда*

$$\max\Big\{w(x_j, x_l) + w(y_j, y_l), w(x_j, y_l) + w(y_j, x_l)\Big\} \geqslant \max\Big\{w(I_j), w(I_l), \Big(w(I_j) + w(I_l)\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\Big\}.$$

Теорема 5. *Алгоритм A находит приближённое решение евклидовой задачи* CSDP *с оценкой точности* $\Delta_A \geqslant 1 - \dfrac{2-\sqrt{2}}{d(d+1)}$, *где* $d = \min\limits_{i=1,\ldots,n} d_i$.

Доказательство. В силу неравенства треугольника и выбора вершин p_i и q_i и леммы 4 для каждого $i = 1, \ldots, \mu - 1$ имеем

$$w(e_i) + w(e_{i+1}) \leqslant \sqrt{2}\Big(w(p_i q_{i+1}) + w(q_i p_{i+1})\Big),$$
$$w(e_1) + w(e_\mu) \leqslant \sqrt{2}\Big(w(p_\mu q_1) + w(q_\mu p_1)\Big).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{\mu} e_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{\mu}\Big(w(p_i q_{i+1}) + w(q_i p_{i+1})\Big).$$

Пусть W — суммарный вес рёбер в графе G' после выполнения шага 1. Так как $W \geqslant W^*(G)$ и G' — оптимальное решение релаксации задачи CSDP, то

$$\begin{aligned} W_A(G) &= W - \sum_{i=1}^{\mu} w(e_i) + \max\Big\{\sum_{i=1}^{\mu} w(q_i p_{i+1}), \sum_{i=1}^{\mu} w(p_i q_{i+1})\Big\} \\ &\geqslant W - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{i=1}^{\mu} w(e_i). \end{aligned}$$

Следовательно, $\dfrac{W_A(G)}{W^*(G)} \geqslant \dfrac{W_A(G)}{W} \geqslant 1 - \dfrac{2-\sqrt{2}}{d(d+1)}$. Теорема 5 доказана.

Замечание 3. В случае $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 2$ точность получаемого решения не меньше $(4+\sqrt{2})/6$. Следовательно, алгоритм A за время $O(n^3)$ находит приближённое решение евклидовой задачи коммивояжёра на максимум с гарантированной оценкой точности $(4+\sqrt{2})/6 \approx 0{,}902$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косточка А. В., Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжёра на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 26. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 55–59.
2. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжёра на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 27. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 79–87.
3. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
4. **Edmonds J., Johnson E. L.** Matchings: a well solvable class of integer linear programs // Combinatorial structures and their applications. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 89–92.
5. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.
6. **Gimadi E. Kh., Serdukov A. I.** A problem of finding the maximal spanning connected subgraph with given vertex degrees // Operation Research Proceedings. 2000. Berlin: Springer–Verlag, 2001. P. 55–59.
7. **Havel V.** A note to question of existance of finite graphs // Casopis Pest Mat. 1955. V. 80. P. 477–480.
8. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnoy Kan A. H. G., Shmoys D. B. (eds.)** The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization. Chichester: John Wiley & Sons, 1985.

9. The traveling salesman problem and its variations (ed. by A. Punnen and G. Gutin). Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.

Статья поступила
9 марта 2006 г.